NOTA

SOBRE EL COEFICIENTE DE ESTABILIDAD.

—

1 Se sabe por las reglas de Estática, que la condicion general de equilibrio de un macizo A B E D (fig. 1.ª) apoyado en un plano invariable A B, es que la resultante R de todas las fuerzas que actúan en él pase por un punto *a* interior de la base, y que su tendencia sea á comprimirla. Si el ángulo que forma la direccion *d* R con la perpendicular á la base es menor que el de rozamiento entre el macizo y el plano de apoyo, la componente Q paralela quedará destruida por este rozamiento, y solo habrá que considerar el efecto que produce en los materiales de la obra la otra componente perpendicular P, que es la presion resultante que sufre la base del macizo.

2 Si para producir la tendencia al giro del macizo A B E D se le aplica un par que junto con el peso de este macizo dé una resultante que pase por un punto A del contorno de la base, es evidente que acumulada toda la presion en un solo punto, destruiria el material por grande que fuese su resistencia, y por esto al establecer el equilibrio al rededor del punto A, se multiplica el momento de las fuerzas aplicadas al macizo por un coeficiente σ, que se llama *coeficiente de estabilidad*, determinado prácticamente por la comparacion con las construcciones existentes, y cuyo efecto es simplemente retirar el punto de aplicacion de la resultante una cierta distancia hácia el interior de la base. Se trata ahora de determinar por consideraciones teóricas los límites del coeficiente de estabilidad que conviene á cada obra.

3 Siendo en realidad elástico el material de que se compone el macizo, aunque para mas facilidad del cálculo se le suponga rígido, la fuerza P producirá una compresion en la base A B, que será uniforme si esta fuerza se halla aplicada al centro de gravedad, y variable si se encuentra fuera de este centro, pudiendo en algun caso convertirse en extension en una porcion de la base, que se reducirá á una simple separacion ó desunion entre el macizo y su cimiento, porque se supone que no hay adherencia entre ellos. Las condiciones de completa estabilidad en el macizo son: 1.ª que en ningun punto de la base haya tendencia á la desunion, porque entonces si el macizo está compuesto de sillares ó piezas diferentes, la tendencia á desunirse en la base producirá grietas efectivas en las juntas verticales, que impidiendo la trasmision de las fuerzas á la masa entera del macizo, pueden ser ocasion de su ruina, á no ser que se cuente con la adherencia y cohesion del mortero, que por lo comun es pequeña; y 2.ª que la compresion variable no llegue al límite de las cargas permanentes que corresponde al material en el punto en que mayor intensidad alcance; porque si se aplasta ó destruye por un accidente el trozo de material en que se halla ese punto, faltará el apoyo necesario á los materiales superiores y la obra se arruinará.

4 Para determinar la intensidad de las fuerzas elásticas originadas por la compresion de la base del macizo, y cuya resultante es igual á la fuerza P, se observará que siendo planas las superficies de contacto del macizo y su cimiento antes de la compresion, tendrán que seguir siendo planas despues, bien se considere como invariable y rígido el plano de apoyo, en cuyo caso es evidente, bien se considere como elástico, porque aun entonces la igualdad de las reacciones en cada punto de los dos planos en contacto les haria tomar formas simétricas, que no podrian coincidir, ni por consiguiente producirse sino son planas: siendo plana antes y despues de la accion de las fuerzas la forma de la seccion A B, se podrán aplicar á su movimiento las fórmulas de los cuerpos

elásticos que se usan comunmente en la resistencia de materiales. Sea A B E D la seccion del macizo por un plano vertical que contenga la resultante R y uno de los ejes principales de la base que pasa por el centro de gravedad C de esta. Trasladada la fuerza P á este punto C, producirá una compresion C C′ uniforme en toda la base, cuyo efecto será equivalente á haber trasportado el plano A B á la posicion paralela A′ B′; y el par (P, dC) que proviene de esta traslacion hará girar á este plano al rededor del punto C′ hasta una nueva posicion inclinada ab que será la definitiva, resultando el sólido A B E D comprimido en el punto A en la cantidad $Aa = CC' + A'a$, y en el punto opuesto B en la cantidad $Bb = CC' - B'b$. Haciendo $P \times dC = M$, $CB = v_1$, $CA = v_2$, y llamando ω al área de la base é I á su momento de inercia respecto del eje perpendicular al plano de la figura que pasa por C, se sabe por la resistencia de materiales que la compresion uniforme C C′ está representada, relativamente á la unidad de longitud y de superficie por la espresion

$$\frac{P}{\omega},$$

y que las variaciones $A'a$, $B'b$, están representadas del mismo modo respectivamente por

$$\frac{M v_2}{I}, \quad \frac{M v_1}{I},$$

y por consiguiente, que la mayor y la menor desviacion del plano de la base respecto de su posicion primitiva estan representadas por las espresiones

$$\frac{P}{\omega} + \frac{M v_2}{I}, \quad \frac{P}{\omega} - \frac{M v_1}{I}.$$

5 La primera condicion de estabilidad exige que al girar el plano A′ B′ y tomar la posicion ab, el punto b no baje de B, ó sea que $BB' - B'b > 0$, lo que se espresa por la fórmula

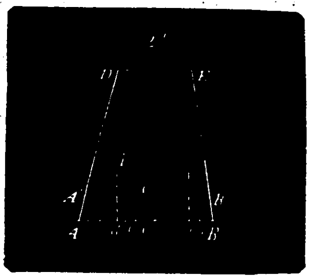
$$\frac{P}{\omega} - \frac{M v_1}{I} > 0 \ldots\ldots (1)$$

La segunda condicion exige que la mayor compresion A a no llegue al límite, que para la unidad de longitud y de superficie se espresa por R. Pueden suceder dos casos: ó que juntamente con esta condicion se verifique la anterior, y la base entera esté comprimida, como se representa en la figura 1.ª, ó que no se verifique dicha condicion, segun se representa en la figura 2.ª, y entonces solo se halla comprimida la parte Ab de la base, tendiendo la parte Bb á desunirse levantándose. En el primer caso, la condicion de estabilidad está espresada por la fórmula

$$\frac{P}{\omega} + \frac{M v_2}{I} < R; \ldots\ldots (2)$$

y en el segundo, caso llamando ω' al área de la porcion Ab de la base, I′ á su momento de inercia respecto del eje que pasa por su centro de gravedad C′, v'_2 á la distancia A C y M′ al momento $P \times dC'$, la condicion es

$$\frac{P}{\omega'} + \frac{M' v'_2}{I'} < R. \ldots (3)$$



6 Llamando m al momento de las fuerzas horizontales respecto del plano de la base, n al de las verticales respecto del punto C, y n', al de las mismas respecto del punto C′, se tendrá

$$M = m - n, \qquad M' = m - n',$$

valores que se habrán de sustituir en las tres últimas fórmulas. La ecuacion ordinaria de equilibrio de rotacion del macizo al rededor de la arista A es

$$\sigma m = P v_2 + n. \ldots\ldots (4)$$

que es idéntica á esta otra

$$\sigma m = P v'_2 + n'.$$

Combinando sucesivamente la ecuacion (4) con cada una de las tres anteriores para eliminar m y llamando σ_1, σ_2, σ' los valores que resultan para σ respectivamente, se tendrá

$$\sigma_1 > \frac{P v_2 + n}{\frac{P I}{\omega v_1} + n} \dots\dots\dots (5)$$

$$\sigma_2 > \frac{P v_2 + n}{\left(R - \frac{P}{\omega}\right)\frac{I}{v_2} + n} \dots\dots (6)$$

$$\sigma' > \frac{P v'_2 + n'}{\left(R - \frac{P}{\omega'}\right)\frac{I'}{v_2'} + n'} \dots\dots (7)$$

En obras en que se requiere gran solidéz es inescusable la condicion primera y por consiguiente, el menor coeficiente de estabilidad que se podrá aplicar es el de la fórmula (5). En obras de menos importancia puede atenderse solo á la condicion de resistencia, y entonces si el coeficiente σ_2 es mas pequeño que el σ_1, se podrá adoptar el σ', poniendo en la fórmula (7) los valores que corresponden á la parte de base que se quiere que se comprima; pero si σ_2 es mayor que σ_1, deberá tomarse como límite absoluto la fórmula (6), tanto en obras importantes como en construcciones ligeras. De modo que

si $\sigma_2 > \sigma_1$, el coeficiente será σ_2,

$\sigma_2 < \sigma_1$, ... $\begin{cases} \sigma_1 \text{ en obras de gran solidéz.} \\ \sigma' \text{ en obras ligeras.} \end{cases}$

7 Por una construccion gráfica se puede examinar si una fuerza ó un sistema de fuerzas aplicadas á un macizo satisfacen á la condicion primera de estabilidad. Haciendo $d\,C = b$, la condicion (1) se puede poner bajo la forma

$$\frac{P}{\omega} - \frac{P b v_1}{I} > 0,$$

de donde se deduce

$$b > \frac{I}{\omega v_1}.$$

El segundo miembro es una cantidad constante que depende esclusivamente de la forma y dimensiones de la base, y llamándola c_1, se tiene por condicion indispensable que b sea menor que c_1. Tomando, pues, en la linea AB las distancias $C e_1 = c_1$ y $C e_2 = \frac{I}{\omega v_2} = c_2$, si la resultante corta á la base entre los puntos e_1 y e_2, no habrá desunion en ningun punto de ella; si pasa por uno de estos puntos, la presion será nula en B ó en A, y si cae entre e_1 y A ó entre e_2 y B, habrá desunion en B (figura 2.ª) ó en A. En un rectángulo de altura a se tiene $c_1 = c_2 = \frac{1}{6} a$, y $e_1 e_2 = \frac{1}{3} a$; en un círculo de radio r, $c_1 = c_2 = \frac{1}{4} r$, y $e_1 e_2 = \frac{1}{2} r$

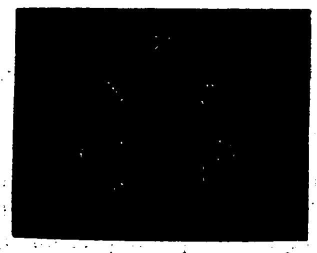
8 Haciendo $b = i c_1$, la máxima presion por unidad superficial, representada en el caso de la figura 1.ª por el primer miembro de la fórmula (2) será

$$\frac{P}{\omega}\left(1 + i \frac{v_2}{v_1}\right).$$

El número i no puede ser mayor que la unidad, porque si la resultante cae mas allá del punto e_1 la parte comprimida de la base se reduce á Ab (fig. 2.ª), de modo que la distancia dC' sea igual á $\frac{I'}{\omega' v'_1}$ y entonces tambien $i = 1$, siendo la máxima compresion la que da la fórmula anterior, en que se sustituyan los valores de ω, v_1 y v_2 que corresponden á la nueva base Ab. Como las figuras de la base suelen ser simétricas, casi siempre se tendrá $v_1 = v_2$, y la fórmula anterior será

$$\frac{P}{\omega}(1 + i)$$

cuyo máximo será, haciendo $i = 1$, $\frac{2P}{\omega}$ para el caso de la figura 1.ª, y $\frac{2P}{\omega'}$ para el de la figura 2.ª.



9 Para hallar la posicion de la línea bT figura 3.ª) que divide la parte comprimida de la base de la que no lo está, se traza por el punto de aplicacion d de la resultante una línea dX perpendicular á AB, y dividiendo el momento de inercia de la superficie $AZUbTX$ respecto del eje XZ, por el momento de su área respecto del mismo eje, deberá resultar la distancia db, porque

$$bd=bC'+C'd=v'_1+b'=\frac{I}{\omega' b'}+b'=\frac{I'+\omega' b'^2}{\omega' b'},$$

que es la relacion enunciada, porque b' es la distancia de la línea XZ al centro de gravedad. Esta investigacion se puede hacer en general por tanteos y con una curva de error; pero en el caso de ser la figura un rectángulo, haciendo $Ad=z$, $db=x$, resulta $b'={}^1/_2(x-z)$ y $x=2z$ ó sea $bA=3\,dA$.

10 Las consideraciones que preceden pueden servir para dar formas mas sencillas á los valores de los coeficientes de estabilidad. Si es g (figs. 1.ª y 2.ª) el punto de aplicacion de la resultante de todas las fuerzas verticales, se tendrá $P\times gC=n$, y las fórmulas (5, 6 y 7) se convierten en estas

$$\sigma_1>\frac{gA}{ge_1}$$

$$\sigma_2>\frac{gA}{ge_2+\frac{R\omega}{P}\times e_2C}$$

$$\sigma'>\frac{gA}{gd'+\frac{R\omega'}{P}\times C'd'},$$

y si se ha aplicado al macizo un par m que produzca la resultante R, la estabilidad efectiva está representada por

$$\sigma=\frac{gA}{gd},$$

cuyo valor debe ser mayor que el que se deba adoptar de los tres anteriores.

11 El último coeficiente σ' tiene diferentes valores segun la magnitud Bb de la parte desunida (fig. 2.ª), y el menor será cuando la longitud Ab sea tal que la presion en el punto A sea igual al límite R. Como dicha presion (8) equivale á

$$\frac{P}{\omega'}\left(1+\frac{v_2'}{v_1'}\right)$$

el valor mínimo del coeficiente será

$$\sigma'>\frac{Pv_2'+n'}{\frac{PI'}{\omega' v_1'}+n'},\ \text{ó sea}\ \sigma'=\frac{gA}{gd}\ .\ .\ .\ (8)$$

que debe ir unido á la condicion

$$P\left(1+\frac{v_2'}{v_1'}\right)=R\omega',\ \text{ó sea}\ P\frac{Ab}{C'b}=R\omega'\ .\ (9)$$

para determinar ω', I', v_2', v_1' y n'. Cuanto mas se aleje el coeficiente de estabilidad de este valor mínimo, y se acerque mas á σ_1, será la obra mas firme y mas capaz de resistir á un accidente.

12 Para aplicar estas fórmulas á los muros, basta suponer que la base es un rectángulo de una longitud igual á la unidad y de altura a, en cuyo caso se tiene

$$v_1=v_2={}^1/_2 a,\ \omega=a,\ I=\frac{a^3}{12},\ c_1=c_2={}^1/_6 a,$$

y los coeficientes son, por las fórmulas (5) y (6), representando por d la distancia g C,

$$\sigma_1>\frac{{}^1/_2 Pa+n}{{}^1/_6 Pa+n},\ \text{ó sea}\ \sigma_1>\frac{{}^1/_2 a+d}{{}^1/_6 a+d}\ .\ .\ (10)$$

$$\sigma_2>\frac{{}^1/_2 Pa+n}{{}^1/_6(Ra-P)a+n},\ \text{ó sea}\ \sigma_2>\frac{{}^1/_2 a+d}{{}^1/_6\left(\frac{Ra}{P}-1\right)a+d}(11)$$

y por las fórmulas (8) y (9) se obtiene, haciendo $Ab=a'$, y teniendo presente que

$$AC'=C'b={}^1/_2 a',\ C'd=C'd'={}^1/_6 a',\ Ad={}^1/_3 a'$$

$$\sigma'>\frac{{}^1/_2 Pa'+n'}{{}^1/_6 Pa'+n'}$$

$$2P=Ra',$$

de las que se deduce, eliminando a' y observando que $n'=P\times gC'=P\,({}^1/_2 a+d-{}^1/_2 a')$

$$\sigma'>\frac{1}{1-\frac{2}{3}\frac{P}{R({}^1/_2 a+d)}}\ .\ .\ .\ .\ (12)$$

13 Si el muro es de paramentos vertica-

les, n y d son cero, y llamando h á su altura y π á su peso específico, haciendo al mismo tiempo $R=\pi h'$, se tendrá

$$\sigma_1 > 3, \quad \sigma_2 > \frac{3h}{h'-h}, \quad \sigma' > \frac{1}{1-\frac{4}{3}\frac{h}{h'}}.$$

Para un muro de 10 metros de altura, suponiendo $h'=100$ metros, se tendrá

$$\sigma_1 > 3 \quad \sigma_2 > 0{,}333 \quad \sigma' > 1{,}154,$$

de modo que se habrán de usar los coeficientes σ_1 ó σ', ú otro cuyo valor esté comprendido entre ambos. Si el giro está producido por una fuerza horizontal Q aplicada á una altura H, el espesor estará comprendido entre los valores

$$a_1=2{,}45\sqrt{\frac{QH}{\pi h}}, \quad a'=1{,}52\sqrt{\frac{QH}{\pi h}},$$

y suponiendo que el empuje Q provenga de un macizo de tierra, de la misma altura que el muro, cuya densidad sea $^2/_3$ de la de este, y el talud natural de 45°, los dos límites del espesor práctico serán:

$$a_1=4^m{,}46 \quad a'=2^m{,}76.$$

El primer espesor será próximamente el que convenga al muro si se hiciese en seco: si se adopta el segundo, la faja comprimida se reduce á $0^m{,}55$.

13 El perfil tipo de revestimiento de Vauban, para la altura de 10 metros, tiene el paramento interior vertical, el esterior con un talud de $^1/_5$, y la base es de $3^m{,}6$. Despreciando el peso del triángulo de tierra que pueda cubrir la coronacion, porque influye poco en estos resultados, se tendrá

$$a=0{,}36h, \quad d=0{,}0436h, \quad P=0{,}26\pi h^2$$

$$\sigma_1 > 2{,}15, \quad \sigma_2 > \frac{12236\,h}{831\,h'-164\,h}, \quad \sigma' > \frac{1}{1-0{,}778\frac{h}{h'}};$$

y para $h=10$ y $h'=100$,

$$\sigma_1 > 2{,}15 \quad \sigma_2 > 0{,}27 \quad \sigma' > 1{,}08:$$

para el caso de una sobrecarga de 2 metros de tierra de la misma especie que en el ejemplo anterior, Mr. Poncelet ha encontrado $\sigma=1{,}92$; y para la sobrecarga de 1 metro se encontraria próximamente $\sigma=\sigma_1$.

14 Para las torres de los faros no tiene aplicacion el límite σ' y se ha de adoptar el mayor de los otros dos, que suele ser siempre el primero. En estas se tiene $n=0$ y $d=0$; si la planta se compone de círculos concéntricos

$$v_1=v_2=r, \quad \omega=\pi(r^2-r'^2+r''^2-r'''^2+\ldots)$$

$$I={}^1/_4\pi(r^4-r'^4+r''^4-r'''^4+\ldots\ldots).$$

y si se compone de cuadrados

$$v_1=v_2={}^1/_2 a, \quad \omega=(a^2-a'^2+a''^2-a'''^2+\ldots),$$

$$I={}^1/_{12}(a^4-a'^4+a''^4-a'''^4+\ldots\ldots).$$

El siguiente cuadro contiene los elementos calculados para seis faros, cuyas dimensiones se hallan en una memoria de Mr. L. Fresnel (*), así como los valores de σ_1 y σ_2, suponiendo $R=250\,000$. La columna penúltima contiene el valor del coeficiente efectivo para un viento equivalente á 275 kilógramos por metro cuadrado, y la última la relacion de este coeficiente con el límite σ_1, que es en realidad la medida de la solidez del faro en el caso dado, porque el coeficiente σ por sí solo puede ser muy grande y no llegar sin embargo al límite necesario. Así se ve que mientras que el autor de la memoria considera al faro de Lorient como la obra mas sólida, en realidad lo es el de Génova, que teniendo mayor altura que los otros, necesita un coeficiente menor.

(*) Annales des ponts et chaussées, 1. série, t. 2 1831.

TORRES.	P	v	ω	I	σ_2	σ_1	σ	$\frac{\sigma}{\sigma_1}$
1 Lorient.	1717600	3,57	35,53	126,35	0,85	3,58	7,4	2,07
2 Génova.	6613880	4,50	56,00	494,67	2,08	2,29	6,2	2,71
3 Belle-Ile.	2403584	3,49	28,62	104,87	1,69	3,33	5,8	1,74
4 Planier.	333200	2,60	16,22	33,66	0,50	3,25	4,6	1,41
5 Pilier.	368451	2,30	13,56	21,98	0,66	3,26	4,4	1,35
6 Columna de Boulogne.	851040	2,02	9,65	11,99	1,75	3,28	3,5	1,07

EDUARDO SAAVEDRA.