HOËNE WRONSKI.

—

(Continuacion.)

Supongamos segregada la funcion determinada X_μ y el indice indeterminado ξ_ρ; (es decir, que este pueda tener todos los valores desde ξ_1 á ξ_ω). Formemos para cada valor de ξ_ρ y con los $\omega-1$ indices restantes las funciones ϖ correspondientes, que serán en número de ω: para obtener la funcion ϖ que contenga á X_μ bastará introducirla en cada una de aquellas con el valor particular de ξ_ρ escluido, y tendremos todos los términos que la componen. En efecto, no hay ninguno duplicado, porque si le hubiese y segregásemos el factor $\Delta^{\xi_\rho}X_\mu$, quedarian dos términos iguales pertenecientes á la funcion ϖ de órden inferior, lo cual es contra el supuesto. Si faltase algun término, segregando tambien en él el factor $\Delta^{\xi_\rho}X_\mu$ obtendriamos un término perteneciente á una de las funciones ϖ inferiores, el cual no figuraria en ellas, tambien contra el supuesto: resultando de aqui estar completo el número de términos, y faltar solo deducir el signo que corresponde á cada uno.

Escribase el primer término de la funcion ϖ anterior suponiendo primero que $\rho<\mu$.

$$\Delta^{\xi_1}X_1\Delta^{\xi_2}X_2\ldots\,\Delta^{\xi_{\rho-1}}X_{\rho-1}\,.\,\Delta^{\xi_{\rho+1}}X_\rho\ldots.\Delta^{\xi_\mu}X_{\mu-1}\,.\,\Delta^{\xi_{\mu+1}}X_{\mu+1}\ldots.\Delta^{\xi_\omega}X_\omega$$

Coloquemos á $\Delta^{\xi_\rho}X_\mu$ en el lugar que le corresponde segun el órden de las funciones $\Delta^{\xi_1}X_1$,

$$\Delta^{\xi_2}X_2\ldots.\Delta^{\xi_\mu}X_{\mu-1}\,.\,\Delta^{\xi_\rho}X_\mu\,.\,\Delta^{\xi_{\mu+1}}X_{\mu+1}\ldots.\Delta^{\xi_\omega}X_\omega$$

y tendremos un término de la funcion que buscamos. Desde el factor $\Delta^{\xi_\rho}X_\mu$ en adelante no hay inversion ninguna por ser ρ menor que todos los que siguen; pero desde 1 á μ habrá $\mu-\rho$ inversiones; es decir $1\ldots\rho$, $2\ldots\rho$.... hasta $\rho-1\ldots\rho$, estarán escritos en el órden natural, pero $\rho+1\ldots\rho$, $\rho+2\ldots\rho$..... $\mu=\rho+(\mu-\rho)\ldots\rho$ lo estarán inversamente; luego el signo de aquel término será el de la funcion ϖ anterior multiplicado por

$$(-1)^{(\mu-\rho)}=(-1)^{\mu}.(-1)^{\rho};$$

queda por lo tanto demostrada la proposicion para aquel término.

Si ahora permutamos todos los indices de la espresion anterior dejando invariable el factor $\Delta^{\xi_\rho}X_\mu$ obtendremos todos los términos en que entra este factor introducido en la funcion ϖ de órden inmediato; vamos á ver que alteraciones sufre el signo de cada término respecto del ya examinado, por las inversiones introducidas con el cambio de indices.

1.° Habrá inversiones por los cambios de los indices independientemente del ξ_ρ, pero como estas inversiones se han tenido en cuenta para dar el signo verdadero al término correspondiente de la funcion ϖ anterior, no aparecerán fuera de esta funcion ϖ.

2.° Habrá modificaciones respecto de ξ_ρ por el cambio entre sí de indices que precedan ó sigan á aquel; esto no produce ninguna inversion.

3.° Cambiando un indice que siga á ξ_ρ con otro que preceda mayor que ρ, se gana una inversion por lo primero, que se pierde por lo segundo; el número de inversiones introducidas es cero.

4.° Cambiando un indice que sigue con otro que preceda, pero menor que ρ, se gana una inversion por lo primero y otra por lo segundo; total dos inversiones

Luego si prescindimos de las inversiones quedan los indices diferentes de ξ_ρ, el número de inversiones de un término cualquiera diferirá de las del primero en cero ó en un número par; cualquiera que sea el término, su signo será por lo tanto el correspondiente en la funcion ϖ anterior multiplicado por

Madrid 15 de Noviembre de 1862.

$$(-1)^{\mu+\rho}.$$

Si $\rho>\mu$ demostrariamos de igual manera que todas las inversiones estan despues de μ y son

$$(-1)^{\rho-\mu}=(-1)^{\mu}.(-1)^{\rho}$$

Harémos observar que estos esponentes no son los de los indices sino en cuanto estos representan el lugar que ocupan en el órden de numeracion, de manera que al desarrollar de nuevo, por ejemplo, la funcio ϖ que constituye el primer término de la fórmula (2) es necesario al término $\Delta^{\delta_2}X_\mu$ multiplicarlo por $(-1)^1$ y no por $(-1)^2$ etc., etc.

Segunda parte. Toda funcion ϖ se puede espresar en valores de las de un órden inferior ordenando los términos con relacion á las diversas cantidades que entran en la funcion, aplicándolas sucesivamente el mismo esponente; es decir que se tiene

$$(3)\quad \varpi\left[\Delta^{\delta_1}X_1\Delta^{\delta_2}X_2\ldots\Delta^{\delta_\omega}X_\omega\right]=(-1)^{\nu}\left\{\begin{array}{l}(-1)^1\,\Delta^{\delta_\nu}X_1\left[\dfrac{\Delta X_1\ldots\Delta X_\omega}{\Delta X_1}\right]^{(\delta_1\ldots\delta_\omega)-\delta_\nu}\\ (-1)^2\,\Delta^{\delta_\nu}X_2\left[\dfrac{\Delta X_1\ldots\Delta X_\omega}{\Delta X_2}\right]^{(\delta_1\ldots\delta_\omega)-\delta_\nu}\\ \vdots\\ (-1)^{\rho}\,\Delta^{\delta_\nu}X_\rho\left[\dfrac{\Delta X_1\ldots\Delta X_\omega}{\Delta X_\rho}\right]^{(\delta_1\ldots\delta_\omega)-\delta_\nu}\\ \vdots\\ (-1)^{\omega}\,\Delta^{\delta_\nu}X_\omega\left[\dfrac{\Delta X_1\ldots\Delta X_\omega}{\Delta X_\omega}\right]^{(\delta_1\ldots\delta_\omega)-\delta_\nu}\end{array}\right.$$

Formemos el primer término de la funcion ϖ inferior, y coloquemos en el lugar correspondiente el factor $\Delta^{\delta_\nu}X_\rho$ que no figura en aquel; supongamos $\rho>\mu$ y obtendremos la siguiente espresion:

$$\Delta^{\delta_1}X_1\Delta^{\delta_2}X_2\ldots\Delta^{\delta_{\nu-1}}X_{\nu-1}\,.\,\Delta^{\delta_{\nu+1}}X_\nu\,\ldots\,\Delta^{\delta_\rho}X_{\rho-1}\,.\,\Delta^{\delta_\nu}X_\rho\,.\,\Delta^{\delta_{\rho+1}}X_{\rho+1}\ldots\Delta^{\omega}X_\omega$$

idéntica á la del caso anterior cambiando en aquella μ en ρ y ρ en ν; luego á cada término será preciso multiplicarle por $(-1)^{\nu+\rho}$. Las dos fórmulas (2) (3) pueden representarse abreviadamente en la forma siguiente:

$$(4)\quad \varpi\left[\Delta^{\delta_1}X_1\Delta^{\delta_2}X_2\ldots\Delta^{\delta_\omega}X_\omega\right]=(-1)^{\mu}\sum_{\rho=1}^{\rho=\omega}(-1)^{\rho}\Delta^{\delta_\rho}X_\mu\varpi\left[\frac{\Delta X_1\ldots\Delta X_\omega}{\Delta X_\mu}\right]^{(\delta_1\ldots\delta_\omega)-\delta_\rho}$$

$$(5)\quad \varpi\left[\Delta^{\delta_1}X_1\ldots\Delta^{\delta_\omega}X_\omega\right]=(-1)^{\nu}\sum_{\rho=1}^{\rho=\omega}(-1)^{\rho}\Delta^{\delta_\nu}X_\rho\varpi\left[\frac{\Delta X_1\ldots\Delta X_\omega}{\Delta X_\rho}\right]^{(\delta_1\ldots\delta_\omega)-\delta_\nu}$$

Valiéndonos de las dos fórmulas anteriores, vamos á demostrar el siguienté lema en el cual se funda el teorema que va á servirnos para deducir la ley universal de la Technia.

LEMA.

Además de las funciones, $X_1.\ X_2\ldots X_\omega$ tomemos otra, que para distinguirla de ellas representarémos por una letra diferente, Z: se verificará siempre que

$$(6)\ \Delta^{\delta_\nu} Z \varpi \Big[\Delta X_1 \Delta X_2 \ldots \Delta X_\omega \Big]^{\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_\nu \ldots \delta_\omega} =$$

$$\Sigma_{\mu=1}^{\mu=\omega} \Big\{ (-1)^{1+\mu} \Delta^{\delta_\nu} X_\mu \varpi \left[\frac{\Delta Z . \Delta X_1 \ldots \Delta X_\omega}{\Delta X_\mu} \right]^{(\delta_1 \delta_2 \ldots \delta_\mu \ldots \delta_\omega)}$$

Aplicando la fórmula (5) á la funcion ϖ del 2.° miembro para separar el término correspondiente á Z, observarémos en primer lugar que aquí como allí son ω el número de funciones, y en segundo que escritas por el siguiente órden

$$Z . X_1 . X_2 \ldots X_{\mu-1} . X_{\mu-1} \ldots X_\omega$$

corresponde á Z el índice δ_1; á X_1, δ_2; á $X_{\mu-1}$ δ_μ; á $X_{\mu+1}$ $\delta_{\mu+1}$; y por último á X_ω, δ_ω: basta pues, poner á Z en lugar de X_1 en la fórmula (5), y obtendrémos para el valor del 2.° miembro

$$\Sigma_{\mu=1}^{\mu=\omega} \left\{ (-1)^{1+\mu} \Delta^{\delta_\nu} X_\mu \left\{ (-1)^\nu \left\{ \begin{array}{l} (-1)^1 \Delta^{\delta_\nu} Z \varpi \left[\dfrac{\Delta X_1 \ldots \Delta X_\omega}{\Delta X_\mu} \right]^{(\delta_1 \ldots \delta_\omega) - \delta_\nu} \\ (-1)^2 \Delta^{\delta_\nu} X_1 \varpi \left[\dfrac{\Delta Z \Delta X_1 \ldots \Delta X_\omega}{\Delta X_\mu \Delta X_1} \right]^{(\delta_1 \ldots \delta_\omega) - \delta_\nu} \\ \vdots \\ (-1)^\omega \Delta^{\delta_\nu} X_\omega \varpi \left[\dfrac{\Delta Z \Delta X_1 \ldots \Delta X_\omega}{\Delta X_\mu \Delta X_\omega} \right]^{(\delta_1 \ldots \delta_\omega) - \delta_\nu} \end{array} \right. \right. \right.$$

que se trasforma representando abreviadamente la suma de los términos á contar desde el 2.° en

$$\Sigma_{\mu=1}^{\mu=\omega} \Big\{ (-1)^{1+\mu} \Delta^{\delta_\nu} X_\mu \Big\{ (-1)^\nu \left\{ \begin{array}{l} (-1)^1 \Delta^{\delta_\nu} Z \varpi \left[\dfrac{\Delta X_1 \ldots \Delta X_\omega}{\Delta X_\mu} \right]^{(\delta_1 \ldots \delta) - \delta_\nu} \\ + \Sigma_{\varpi, \rho} (-1)^\rho \Delta^{\delta_\nu} X_\varpi \varpi \left[\dfrac{\Delta X \Delta X_1 \ldots \Delta X_\omega}{\Delta X_\mu \Delta X_\varpi} \right]^{(\delta_1 \ldots \delta_\omega) - \delta_\nu} \end{array} \right.$$

en la cual ϖ tomará todos los valores desde 1 hasta ω menos el de μ, y ρ todos los valores desde 2 hasta ω, hallándose relacionados ϖ y ρ de manera que para todos los valores inferiores á μ, vale ρ una unidad mas, y para los superiores tiene el mismo valor. Separando los dos términos, efectuando en el primero las operaciones indicadas y suprimiendo en él un $(-1)^2$, se convertirá en

$$\Sigma_{\mu=1}^{\mu=\omega} (-1)^{\nu+\mu} \Delta^{\delta_\nu} X_\mu \Delta^{\delta_\nu} Z \varpi \left[\frac{\Delta X_1 \ldots \Delta X_\omega}{\Delta X_\mu} \right]^{(\delta_1 \ldots \delta_\omega) - \delta_\nu};$$

sacando $(-1)^\nu \Delta^{\delta_\nu} Z$ fuera del Σ por ser independiente de μ

$$\Delta^{\delta_\nu} Z \times \left\{ (-1)^\nu \Sigma_{\mu=1}^{\mu=\omega} (-1)^\mu . \Delta^{\delta_\nu} X_\mu \varpi \left[\frac{\Delta X_1 \ldots \Delta X_\omega}{\Delta X_\mu} \right]^{(\delta_1 \ldots \delta_\omega) - \delta_\nu} \right\}$$

:

que segun la fórmula (5) se convierte en

$$\Delta^{\delta_\nu} Z \dot{\varpi} [\Delta X_1 \ldots \Delta X_\omega]^{\delta_1 \ldots \delta_\nu \ldots \delta_\omega}.$$

Falta ahora tan solo para terminar la demostracion hacer ver que el segundo término

$$(-1)^{1+\nu} \sum_{\mu=1}^{\mu=\omega} (-1)^{1+\mu} \Delta^{\delta_\nu} X_\mu \; \Sigma_{\bar{\omega},\rho} (-1)^\rho \Delta^{\delta_\nu} X_{\bar{\omega}} \dot{\varpi} \left[\frac{\Delta Z \Delta X_1 \Delta X_2 \ldots \Delta X_\omega}{\Delta X_\mu \; \Delta X_{\bar{\omega}}} \right]^{[\delta_1 \ldots \delta_\omega] - \delta_\nu}$$

es siempre cero.

Demos á μ un valor determinado m en la série 1. 2. 3.. hasta $\bar{\omega}$, y á $\bar{\omega}$ otro p tomado tambien en la misma série (el cual, segun lo dicho antes, deberá ser diferente de m); invirtamos el órden dando á μ el valor p y á $\bar{\omega}$ el valor m; el valor de la funcion $\dot{\varpi}$ no se habrá alterado, pues en la série de funciones $Z . X_1 . X_2 \ldots X_\omega$ se suprimen siempre las mismas X_m X_p. El signo de estos dos factores dependerá del esponente de (-1) afecto á ellos; luego si demostramos que en los dos términos resultantes son contrarios, se destruirán todos dos á dos. En el primer caso la funcion está multiplicada por $(-1)^{m+\rho_{\bar{\omega}=p}}$ y en el segundo por $(-1)^{p+\rho_{\bar{\omega}=p}}$; y para fijar las ideas supongamos que de los dos valores sea p el mayor (lo cual es indiferente para la demostracion).

Escribamos las dos séries

$$Z . X_1 X_2 \ldots X_m \ldots X_p \ldots X_\omega$$

$$Z . X_1 X_2 \ldots X_m \ldots X_p \ldots X_\omega$$

indicando el círculo que falta aquel término de la série.

Si m y p son ambos pares, X_p ocupará el lugar par en la primera, y X_m el impar en la segunda, y viceversa si ambos son impares: luego $(-1)^{\rho_{\bar{\omega}=m}}$ y $(-1)^{\rho_{\bar{\omega}=p}}$ son de signo contrario y lo mismo $(-1)^{m+\rho_{\bar{\omega}=p}}$ y $(-1)^{p+\rho_{\bar{\omega}=m}}$.

Si m es par y p impar, $\rho_{\bar{\omega}=p}$ y $\rho_{\bar{\omega}=m}$ serán impares, y pares si m es impar y p par: luego lo mismo que antes los dos términos serán de signos contrarios y se destruirán dos á dos; con lo cual resulta demostrado el lema.

TEOREMA.

Sean $Y_0, Y_1 \ldots Y_\omega$, $\omega+1$ funciones de la variable x y formemos con ellas las siguientes

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = \dot{\varpi}[\Delta^{\delta_0} Y_0 \Delta^{\delta_1} Y_1] \\ X_2 = \dot{\varpi}[\Delta^{\delta_0} Y_0 \Delta^{\delta_1} Y_2] \\ \vdots \\ X_\rho = \dot{\varpi}[\Delta^{\delta_0} Y_0 \Delta^{\delta_1} Y_\rho] \\ \vdots \\ Y_\omega = \dot{\varpi}[\Delta^{\delta_0} Y_0 \Delta^{\delta_1} Y_\omega] \end{array} \right.$$

Formemos tambien las siguientes

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
T_1 &= \Delta^{\delta_0} Y_0 + i\,\Delta^{\delta_1} Y_1\\
T_2 &= \Delta^{\delta_0} Y_0 + 2\,i\,\Delta^{\delta_1} Y_0 + i^2\,\Delta^{\delta_2} Y_2\\
&\;\vdots\\
T_\rho &= \Delta^{\delta_0} Y_0 + i\frac{\rho}{1}\Delta^{\delta_1} Y_0 + i^2\frac{\rho(\rho-1)}{1\,.\,2}\Delta^{\delta_2} Y_0 + i^3\frac{\rho(\rho-1)(\rho-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\Delta^{\delta_3} Y_0 + \&\\
&\;\vdots\\
T_{\omega-1} &= \Delta^{\delta_0} Y_0 + i\,\frac{\omega-1}{1}\Delta^{\delta_1} Y_0 + i^2\frac{(\omega-1)(\omega-2)}{1\,.\,2}\Delta^{\delta_2} Y_0 + \&
\end{aligned}
\right.
$$

En estas funciones Δ representa ahora la operacion concreta de tomar las diferencias ya progresiva, ya regresivamente (a), sirviendo el número $i=\pm 1$ para distinguirlas: $\sigma_1\,\sigma_2 \ldots \sigma_\omega$ tienen aquí los valores determinados

$$(9)\quad \sigma_1=0 \text{ « } \sigma_2=1 \text{ » } \sigma_3=2 \ldots \sigma_\omega=\omega-1 \text{ y los } \delta_0,\, \delta_1,\, \delta_2 \ldots d_\nu$$

$$(10)\quad \delta_0=\delta \text{ « } \delta_1=1+\delta_0=1+\delta \text{ » } \delta_2=2+\delta \ldots \delta_\nu=\nu+\delta.$$

El teorema está formulado en la igualdad siguiente:

$$(11)\quad \text{ש}\left[\Delta^{\sigma_1} X_1\, \Delta^{\sigma_2} X_2 \ldots \Delta^{\sigma_\omega} X_\omega\right] = (T_1 . T_2 \ldots . T_{\omega-1})\, \text{ש}\left[\Delta^{\delta_0} Y_0\, \Delta^{\delta_1} Y_1 \ldots \Delta^{\delta_\omega} Y_\omega\right]$$

y quedará demostrado si hacemos ver que cuando

$$(12)\quad \text{ש}\left[\frac{\Delta X_1\, \Delta X_2 \ldots \Delta X_\omega}{\Delta X_\mu}\right]^{(\sigma_1 . \sigma_2 \ldots . \sigma_{\omega-1})} = M\,\text{ש}\left[\frac{\Delta Y_0\, \Delta Y_1 \ldots \Delta Y_\omega}{\Delta Y_\mu}\right]^{(\delta_0 . \delta_1 \ldots \delta_\omega)}$$

para todos los valores del indice μ (siendo M una cantidad independiente de dicho indice), tambien se verifica

$$(12')\quad \text{ש}\left[\Delta^{\sigma_1} X_1 \Delta^{\sigma_2} X_2 \ldots \Delta^{\sigma_\omega} X_\omega\right] = M\,T_{\omega-1}\,\text{ש}\left[\Delta^{\delta_0} Y_0 . \Delta^{\delta_1} Y_1 \ldots \Delta^{\delta_\omega} Y_\omega\right]$$

Desarrollemos por la fórmula (4) el primer miembro de esta última ecuacion.

$$\text{ש}\left[\Delta^{\sigma_1} X_1 \Delta^{\sigma_2} X_2 \ldots \Delta^{\sigma_\omega} X_\omega\right] = (-1)^\omega \sum_{\mu=1}^{\mu=\omega} (-1)^\omega \Delta^{\sigma_\mu} X_\mu \,.\, \text{ש}\left[\frac{\Delta X_1\, \Delta X_2 \ldots \Delta X_\omega}{\Delta X_\mu}\right]^{(\sigma_1 \ldots \sigma_\omega)-\sigma_\omega}$$

y hagamos intervenir la hipótesis (12): teniendo en cuenta los valores (10) y sacando M fuera del signo Σ.

$$(13)\quad \text{ש}\left[\Delta^{\sigma_1} X_1 \Delta^{\sigma_2} X_2 \ldots \Delta^{\sigma_\omega} X_\omega\right] = (-1)^\omega M \sum_{\mu=1}^{\mu=\omega} (-1)^\mu \Delta^{\omega-1} X_\mu\, \text{ש}\left[\frac{\Delta Y_0 \Delta Y_1 \ldots \Delta Y_\omega}{\Delta Y_\mu}\right]^{(\delta_0\, \delta_1 \ldots \delta_\omega)}$$

(a) Llama Wronski diferencias progresivas á las obtenidas por el método ordinario $f(x+\Delta x)-f(x)$, y regresivas á las formadas restando de la funcion la funcion en su estado anterior: es decir que Δ regr. $fx=f(x)-f(x-\Delta x)$. Aunque la demostracion se refiere á las diferencias, es aplicable á todas las funciones en que se verifique la misma ley, como por ejemplo, en las llamadas por Laplace sumas deltas y representadas por el mismo autor con el signo ∇.

Para obtener esta espresion en funcion de Y falta solo eliminar á $\Delta^{\omega-1}X_{\omega}$ cuyo valor es (7).

$$(14)\quad \Delta^{\omega-1}X_{\mu}=\Delta^{\omega-1}\left(\Delta^{\partial_0}Y_0\Delta^{\partial_1}Y_{\mu}\right)-\Delta^{\omega-1}\left(\Delta^{\partial_1}Y\Delta\partial_0 Y_{\mu}\right);$$

Lo que sigue no ofrece dificultad ninguna, reduciéndose á desarrollos mas ó menos estensos, pero todos lógicos. Apliquemos á los dos términos (14) la fórmula del binomio de las diferencias para obtenerlos en funcion de las diferencias de las funciones Y_0, Y_μ

$$
\begin{aligned}
(15)\quad \Delta^{m}[F(x).\,f(x)] = {} & F(x)\Delta^{m}f(x)+\frac{m}{1}\Delta F(x)\left[\Delta^{m-1}f(x)+i\,\Delta^{m}f(x)\right]\\
& +\frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^{2}F(x).\left[\Delta^{m-2}f(x)+2\,i\Delta^{m-1}f(x)+i^{2}\Delta^{m}f(x)\right]\\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
& +\frac{m(m-1)\ldots.(m-k+1)}{1.2.3\ldots k}\Delta^{k}F(x)\left[\Delta^{m-k}f(x)+i\frac{k}{1}\Delta^{m-k+1}f(x)+\&\right]\\
& +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
& +\Delta^{m}F(x)\left[fx+i\frac{m}{1}\Delta f(x)+i^{2}\frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^{2}f(x)+\&\right]
\end{aligned}
$$

El primer término de la fórmula (14) se deduce haciendo en (15) $m=\omega-1$, $F(x)=\Delta^{\partial_0}Y_0$, y $f(x)=\Delta^{\partial_1}Y_\mu$ Ordenando luego con relacion á las diferencias de Y_μ

$$
\begin{aligned}
\Delta^{\omega-1}\left(\Delta^{\partial_0}Y_0\Delta^{\partial_1}Y_{\mu}\right)= {} & \Delta^{\omega-1+\partial_1}Y_{\mu}\times P_0\\
& +\Delta^{\omega-2+\partial_1}Y_{\mu}\times\frac{\omega-1}{1}P_1\\
& +\Delta^{\omega-3+\partial_1}Y_{\mu}\times\frac{(\omega-1)(\omega-2)}{1.2.}P_2\\
& +\&
\end{aligned}
$$

siendo

$$
(16)\quad \left\{
\begin{aligned}
P_0 &= \Delta^{\partial_0}Y_0+i\frac{\omega-1}{1}\Delta^{\partial_1}Y_0+i^{2}\frac{(\omega-1)(\omega-2)}{1.2}\Delta^{\partial_2}Y_0+\&\\
P_1 &= \Delta^{\partial_1}Y_0+i\frac{\omega-2}{1}\Delta^{\partial_2}Y_0+i^{2}\frac{(\omega-2)(\omega-3)}{1.2.}\Delta^{\partial_3}Y_0+\&\\
P_2 &= \Delta^{\partial_2}Y_0+i\frac{\omega-3}{1}\Delta^{\partial_3}Y_0+i^{2}\frac{(\omega-3)(\omega-4)}{1.2.}\Delta^{\partial_4}Y_0+\&\\
&\vdots\\
P_n &= \Delta^{\partial n}Y_0+i\frac{\omega-n-1}{1}\Delta^{\partial n+1}Y_0+i_2\frac{(\omega-n-1)(\omega-n-2)}{1.2}\Delta^{\partial n+2}Y_0+\&
\end{aligned}
\right.
$$

De un modo análogo hallaremos

$$
\begin{aligned}
\Delta^{\omega-1}\left(\Delta^{\partial_1}Y_0\Delta^{\partial_0}Y_{\mu}\right)= {} & \Delta^{\omega-1+\partial_0}Y_{\mu}\times Q_0\\
& +\Delta^{\omega-2+\partial_0}Y\times\frac{\omega-1}{1}Q_1\\
& +\Delta^{\omega-3+\partial_0}Y_{\mu}\times\frac{(\omega-1)(\omega-2)}{1.2}Q_2\\
& +\&
\end{aligned}
$$

y el valor general de Q será

$$(17)\quad Q_n = \Delta^{\delta n+1} Y_0 + i\frac{\omega-n-1}{1}\Delta^{\delta n+2} Y_0 + i^2\frac{(\omega-n-1)(\omega-n-2)}{1.2}\Delta^{\delta n+3} Y_0 + \&$$

Sustituyendo los valores de los dos términos que componen á $\Delta^{\omega-1} X_\mu$, teniendo presente que $\delta_1 = 1+\delta_0$ (10) y ordenando con relacion á las diferencias de Y_μ

$$\begin{aligned}\Delta^{\omega-1} X_\mu = {} & P_0 \Delta^{\omega-\delta_0} Y_\mu \\ & + \left(\frac{\omega-1}{1}P_1 - Q_0\right)\Delta^{\omega-1+\delta_0} Y_\mu \\ & + \frac{(\omega-1)}{1}\left(\frac{\omega-2}{2}P_2 - Q_1\right)\Delta^{\omega-2+\delta_0} Y_\mu \\ & + \frac{(\omega-1)(\omega-2)}{1.2.}\left(\frac{\omega-3}{3}P_3 - Q_2\right)\Delta^{\omega-3+\delta_0} Y_\mu \\ & \vdots \\ & + \frac{(\omega-1)\ldots(\omega-n-1)}{1.2\ldots n-1}\left(\frac{\omega-n}{n}P_n - Q_{n-1}\right)\Delta^{\omega-n+\delta_0} Y_\mu \\ & \vdots \\ & + \left(0 - Q_{\omega-1}\right)\Delta^{\delta_0} Y_\mu\end{aligned}$$

Harémos para abreviar

$$(18)\quad P_n(\omega-n) - n\, Q_{n-1} = R_n$$

y adoptarémos la notacion de las factoriales (a), lo cual da, sacando fuera el divisor n en cada término

$$\begin{aligned}\Delta^{\omega-1} X_\mu = {} & \Delta^{\omega+\delta_0} Y_\mu \times P_0 \quad \text{(b)} \\ & + \Delta^{\omega-1+\delta_0} Y_\mu \times \frac{\omega-1^{\,0|-1}}{1^{\,1|1}} R_1 \\ & + \Delta^{\omega-2+\delta_0} Y_\mu \times \frac{\omega-1^{\,1|-1}}{1^{\,2|1}} R_2 \\ & + \Delta^{\omega-3+\delta_0} Y_\mu \times \frac{\omega-1^{\,2|-1}}{1^{\,3|1}} R_3 \\ & + \&.\end{aligned}$$

ó abreviadamente

$$(19)\quad \Delta^{\omega-1} X_\mu = \sum_{n=0}^{n=\omega} \Delta^{\omega-n+\delta_0} Y_\mu \times \frac{(\omega-1)^{\,n-1|-1}}{1^{\,n|1}} R_n\,.$$

El término general de R_n se obtiene (18) poniendo $n-1$ en vez de n en (17), multiplicándole por n, y al valor de P_n (16) por $\omega-n$, y tomando el término general de la diferencia que será

(a) Esta notacion de las factoriales empleada por Kramp, es mas clara y da mejor idea de su analogía con las potencias que la de funciones Γ (gamma) de Lagrange, ó la ! adoptada por algunos autores modernos. Llamaremos factorial á todo producto de la forma $x(x+r)(x+2r)\ldots(x+(n-1)r)$ y lo representaremos por $x^{n|r}$

(b) Se pudiera emplear en este término la misma notacion R_0 que entonces sería $\frac{(\omega-1)^{-1|-1}}{1^{0|1}} R_0 = P_0$ porque $R_0 = \omega P_0$, y $\frac{(\omega-1)^{-1|-1}}{1^{0|1}} = (\omega-1)^{-1|-1} = \frac{1}{(\omega-1+1)^{1|1}} = \frac{1}{\omega}$

$$(\omega-n)\, i^{k} \frac{(\omega-n-1)^{k|-1}}{1^{k|1}} \Delta^{\delta n+k} Y_0 - n\, i^{k} \frac{(\omega-n)^{k|1}}{1^{k|1}} \Delta^{\delta n+k} Y_0 =$$

$$\frac{i^{k} \Delta^{\delta n+k} Y_0}{1^{k|1}} \left[(\omega-n)(\omega-n-1)^{k|-1} - n\,(\omega-n)^{k|-1}\right] = \frac{i^{k} \Delta^{\delta n+k} Y_0}{1^{k|1}} \left[(\omega-n)^{k+1|-1} - n(\omega-n)^{k|-1}\right] =$$

$$i^{k} \frac{\Delta^{\delta n+k} Y_0}{1^{k|k}} (\omega-n)^{k|-1} \left[(\omega-n)-k-n\right] = i^{k} (\omega-2n-K) \frac{(\omega-n)^{k|-1}}{1^{k|1}} \Delta^{\delta n+k} Y_0$$

lo cual da para el término general

$$R_n = \sum_{k=o}^{k=\omega-n} \left[i^{k} (\omega-2n-k) \frac{(\omega-n)^{k|-1}}{1^{k|1}} \Delta^{\delta n+k} Y_0 \right]$$

que sustituido en (9)

$$\Delta^{\omega-1} X_\mu = \sum_{n=o}^{n=\omega} \Delta^{\omega-n+\delta_0} Y_\mu \times \frac{(\omega-1)^{n-1|-1}}{1^{n|1}} \sum_{k=o}^{k=\omega\times n} \quad (\&.)$$

P. Perez de la Sala

(Se continuará.)

PLANÍMETRO DE G. STARKE.

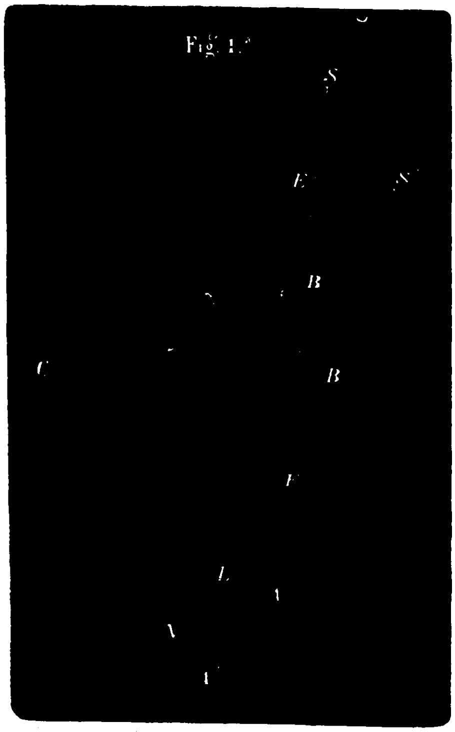
TEORÍA, USO Y RECTIFICACION DE ESTE INSTRUMENTO.

Sea C B A una posicion cualquiera del instrumento, para la cual representaremos por α el ángulo que forma la varilla B A con el rádio vector CA$=\rho$. La ruedecilla se encuentra en S, en A el puntero. Supongamos que este último recorre un elemento AA'$=d.\,s$, de modo que ρ se trasforma en $(\rho+d.\,\rho)$. Llamemos $d.\,\varphi$ al ángulo A CA'.

Sea C B'A' la segunda posicion del instrumento, α' el ángulo CA'B' y llamemos u al que forma el elemento AA' con el rádio vector. Si SS' es la linea recorrida por la ruedecilla, el arco desarrollado por la rotacion de la misma será S'E, componente normal á BS. Si llamamos r el rádio de la ruedecilla y $d.\,v$ un elemento de su desarrollo tendrémos

$$S\,E = r\times d.\,v.$$

Calculemos pues, estos valores y hagamos CB$=c$; A B$=a$ y AS$=b$.



En el triángulo E T G' tenemos

$$r\times d.\,v = S'.\,T\times \text{sen}\ E\,T\,S'.$$