

HOËNE WRONSKI.

(Continuacion.)

Introduciendo la factorial dentro de la segunda Σ y observando que el producto de las dos factoriales dan una tercera representada por

tendremos definitivamente

$$(20) \quad \Delta^{\omega-1} X_{\mu} = \sum_{n=0}^{n=\omega} \frac{\Delta^{\omega-n+\delta_0} Y_{\mu}}{1 \cdot n!} \sum_{k=0}^{k=\omega-n} i^k \frac{(\omega-2n-k)(\omega-1)^{n+k-1}}{1 \cdot k!} \Delta^{\delta n+k} Y_0$$

$$= \sum_{n=0}^{n=\omega} \left(V_n \Delta^{\omega-n+\delta_0} Y_{\mu} \right)$$

haciendo para abreviar

$$1^n! V_n = \sum_{k=0}^{k=\omega-n} i^k \frac{(\omega-2n-k)(\omega-1)^{n+k-1}}{1 \cdot k!} \Delta^{\delta n+k} Y_0.$$

Todavía podemos simplificar mas la espresion (20) sacando el término correspondiente a $n=0$, con lo cual se consigue á la vez que los límites de las dos Σ sean los mismos

$$V_0 = \sum_{k=0}^{k=\omega} i^k \frac{(\omega-k)(\omega-1)^{k-1}}{1 \cdot k!} \Delta^{\delta k} Y_0 =$$

$$\sum_{k=0}^{k=\omega} i^k \frac{(\omega-1)^{k-1}}{1 \cdot k!} \Delta^{\delta k} Y_0 = \Delta^{\delta_0} Y_0 + i \frac{\omega-1}{1} \Delta^{\delta_1} Y_0 + i^2 \frac{(\omega-1)(\omega-2)}{1 \cdot 2} \Delta^{\delta_2} Y_0 + \&$$

cuyo desarrollo es (8) el de $T_{\omega-1}$: lo que convierte la espresion (20) en

$$(21) \quad \Delta^{\omega-1} X_{\mu} = T_{\omega-1} \Delta^{\omega+\delta_0} Y_{\mu} + \sum_{n=1}^{n=\omega} \left(V_n \Delta^{\omega-n+\delta_0} Y_{\mu} \right)$$

Sustituyamos ahora este valor en la ecuacion (15) separando los dos términos y sacando $T_{\omega-1}$ fuera de las Σ

$$\varpi \left[\Delta^{\delta_1} X_1 \Delta^{\delta_2} X_2 \dots \Delta^{\delta_{\omega}} X_{\omega} \right] = (-1)^{\omega} M T_{\omega-1} \sum_{\mu=1}^{\mu=\omega} (-1)^{\mu} \Delta^{\omega+\delta_0} Y_{\mu} \times \varpi \left[\frac{\Delta Y_1 \dots \Delta Y_{\omega}}{\Delta Y_{\mu}} \right] (\delta_0 \dots \delta_{\omega-1})$$

$$+ (-1)^{\omega} M \sum_{\mu=1}^{\mu=\omega} \sum_{n=1}^{n=\omega} (-1)^{\mu} V_n \times \Delta^{\omega-n+\delta_0} Y_{\mu} \varpi \left[\frac{\Delta Y_0 \dots \Delta Y_{\omega}}{\Delta Y_{\mu}} \right] (\delta_0 \dots \delta_{\omega-1})$$

Este último factor se puede trasformar por medio del Lema (6) multiplicando por -1 dentro y fuera de las Σ , teniendo presente que las $Z, X_1 \dots X_{\omega}$ del Lema son aquí $Y_0, Y_1 \dots Y_{\omega}$ y haciendo $\delta_{\nu}, \omega-n+\delta_0$, lo cual es permitido por hallarse este comprendido entre δ_0 y $\delta_0+\omega-1 = \delta_{\omega-1}$, como δ_{ν} lo estaba entre δ_1 y δ_{ω}

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\omega} (-1)^{\mu+1} \Delta^{\omega-n+\delta_0} Y_{\mu} \varpi \left[\frac{\Delta Y_0 \dots \Delta Y_{\omega}}{\Delta Y_{\mu}} \right] (\delta_0 \delta_1 \dots \delta_{\omega-1}) =$$

$$\Delta^{\omega-n+\delta_0} Y_0 \varpi \left[\Delta Y_1 \Delta Y_2 \dots \Delta Y_{\omega} \right] (\delta_0 \delta_1 \dots \delta_{\omega-1})$$

Sustituyendo y sacando del Σ_n todo lo independiente de n

Tomo X.

Madrid 1.º de Diciembre de 1862.

$$\psi \left[\Delta^{\delta_1} X_1 \Delta^{\delta_2} X_2 \dots \Delta^{\delta_\omega} X_\omega \right] = (-1)^\omega M T_{\omega-1} \sum_{\mu=1}^{\mu=\omega} (-1)^\mu \Delta^{\omega+\delta_0} Y_\mu \times \\ \times \psi \left[\frac{\Delta Y_0 \Delta Y_1 \dots \Delta Y_\omega}{\Delta Y_\mu} \right] (\delta_0 \dots \delta_{\omega-1}) + (-1)^{1+\omega} M \psi [\Delta Y_1 \dots \Delta Y_\omega] (\delta_0 \dots \delta_\omega) \times \sum_{n=1}^{n=\omega} V_n \Delta^{\omega-n+\delta_0} Y_0$$

Para deducir el valor de esta última Σ recurriremos á las ecuaciones (14) y (21) haciendo en ellas $\mu=0$: la 1.ª da $\Delta^{\omega-1} X_0=0$ y sustituido este valor el de la 2.ª

$$\sum_{n=1}^{n=\omega} V_n \Delta^{\omega-n+\delta_0} Y_0 = -T_{\omega-1} \Delta^{\omega+\delta_0} Y_0$$

Sustituyendo este valor y multiplicando por (-1) dentro y fuera de la Σ del primer término

$$\psi \left[\Delta^{\delta_1} X_1 \dots \Delta^{\delta_\omega} X_\omega \right] = (-1)^{1+\omega} M T_{\omega-1} \left\{ \sum_{\mu=1}^{\mu=\omega} (-1)^{1+\mu} \Delta^{\omega+\delta_0} Y_\mu \times \psi \left[\frac{\Delta Y_0 \dots \Delta Y_\omega}{\Delta Y_\mu} \right] (\delta_0 \dots \delta_{\omega-1}) \right. \\ \left. + \Delta^{\omega+\delta_0} Y_0 \psi \left[\frac{\Delta Y_0 \Delta Y_1 \dots \Delta Y_\omega}{\Delta Y_0} \right] (\delta_1 \dots \delta_\omega) \right\}$$

pero este segundo término es el valor del primero correspondiente á $\mu=0$; luego se puede encerrar en él tomando los límites desde $\mu=0$ á $\mu=\omega$.

$$\psi \left[\Delta^{\delta_1} X_1 \dots \Delta^{\delta_\omega} X_\omega \right] = (-1)^{1+\omega} M T_{\omega-1} \sum_{\mu=0}^{\mu=\omega} (-1)^{1+\mu} \Delta^{\omega+\delta_0} Y_\mu \times \psi \left[\frac{\Delta Y_0 \dots \Delta Y_\omega}{\Delta Y_\mu} \right] (\delta_0 \dots \delta_\omega) \\ = M T_{\omega-1} \psi \left[\Delta^{\delta_0} Y_0 \dots \Delta^{\delta_\omega} Y_\omega \right]$$

con arreglo á la fórmula (5). Q. E. L. Q. Q. D.

Falta únicamente hacer ver que la hipótesis (12) se verifica. Cuando ω vale 2, se verifica desde luego dando á M el valor 1:

$$\psi \left[\frac{\Delta X_1 \Delta X_2}{\Delta X_2} \right] \delta_1 = \Delta^{\delta_1} X_1 = \Delta^0 X_1 = X_1 \\ \psi \left[\frac{\Delta Y_0 \Delta Y_1 \Delta Y_2}{\Delta Y_2} \right] (\delta_0 \delta_1) = \psi [\Delta Y_0 \Delta Y_1] (\delta_0 \delta_1) = X_1 \quad (9)$$

De la misma manera y por iguales razones

$$\psi \left[\frac{\Delta X_1 \Delta X_2}{\Delta X_1} \right] \delta_2 = \psi \left[\frac{\Delta Y_0 \Delta Y_1 \Delta Y_2}{\Delta Y_1} \right] (\delta_0 \delta_1) = X_2 \quad (9)$$

luego (12')

$$\psi [\Delta X_1 \Delta X_2] (\delta_1 \delta_2) = T_1 \psi [\Delta Y_0 \Delta Y_1 \Delta Y_2] \delta_0 \delta_1 \delta_2$$

Haremos observar que estas ecuaciones lo mismo se verificarán para cualesquiera índices de Y, con tal que la primera Y_0 conserve el suyo de manera que

$$\psi [\Delta X_{\alpha_1} \Delta X_{\alpha_2}] \delta_1 \delta_2 = T_1 \psi [\Delta Y_0 \Delta Y_{\alpha_1} \Delta Y_{\alpha_2}] \delta_0 \delta_1 \delta_2$$

dando á α_1, α_2 los valores que mejor nos convengan.

La expresion anterior podemos ponerla bajo esta forma

$$\psi \left[\frac{\Delta X_{\alpha 1} \Delta X_{\alpha 2} \Delta X_{\alpha 3}}{\Delta X_{\alpha \mu}} \right]^{\delta_1 \delta_2} = T_1 \psi \left[\frac{\Delta Y_0 \Delta Y_{\alpha 1} \Delta Y_{\alpha 2} \Delta Y_{\alpha 3}}{\Delta Y_{\alpha \mu}} \right]$$

en la cual $\alpha \mu$ puede representar sucesivamente los valores que demos á $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Dando á M el valor T_1 resulta (12')

$$\psi \left[\Delta X_{\alpha_1} \Delta X_{\alpha_2} \Delta X_{\alpha_3} \right]^{\delta_1 \delta_2 \delta_3} = T_1 T_2 \psi \left[\Delta Y_0 \Delta Y_{\alpha_1} \Delta Y_{\alpha_2} \Delta Y_{\alpha_3} \right]^{\delta_0 \dots \delta_3}$$

y así sucesivamente llegaremos en general para ω funciones α'

$$(25) \psi \left[\Delta X_{\alpha_1} \Delta X_{\alpha_2} \dots \Delta X_{\alpha_\omega} \right]^{\delta_1 \dots \delta_\omega} = T_1 T_2 \dots T_{\omega-1} \psi \left[\Delta Y_0 \Delta Y_{\alpha_1} \dots \Delta Y_{\alpha_\omega} \right]^{\delta_0 \dots \delta_\omega}$$

que es el teorema (14) con solo hacer $\alpha 1=1, \alpha 2=2, \alpha 3=3$ etc.

No se crea que la última fórmula es mas general que la (14) por tener índices mas indeterminados; los índices solo sirven para distinguir unas de otras las funciones é indicar el orden en que las consideramos, lo cual se consigue lo mismo con los índices (14) que con los (25): la ventaja real de estos últimos es (como lo acabamos de notar) que cuando solo entran algunas de las ω funciones, podemos hacer que la fórmula comprenda á cualesquiera de ellas que nos convenga elegir.

COROLARIO I.

Después de formadas con las $\omega+1$ funciones $Y_0, Y_1, \dots, Y_\omega$ y tomando á Y_0 por base, las ω funciones $X_1, X_2, \dots, X_\omega$, formemos con estas sobre la función X_1 otras análogas.

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{1,2}, X_{1,3}, X_{1,4}, \dots, X_{1,\omega} \\ X_{1,2} = \psi \left[\Delta^{\delta(1)_0} X_1, \Delta^{\delta(1)_1} X_2 \right] \\ X_{1,3} = \psi \left[\Delta^{\delta(1)_0} X_1, \Delta^{\delta(1)_1} X_3 \right] \\ \vdots \\ X_{1,\omega} = \psi \left[\Delta^{\delta(1)_0} X_1, \Delta^{\delta(1)_1} X_\omega \right] \end{array} \right.$$

en las cuales $\delta(1)_0$ tiene un valor cualquiera, y

$$\delta(1)_1 = 1 + \delta(1)_0, \delta(1)_2 = 2 + \delta(1)_0, \dots, \delta(1)_\nu = \nu + \delta(1)_0$$

Formemos igualmente las

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{1,1} = \Delta^{\delta(1)_0} X_1 + i \Delta^{\delta(1)_1} X_1 \\ T_{1,2} = \Delta^{\delta(1)_0} X_1 + 2 i \Delta^{\delta(1)_1} X_1 + i^2 \Delta^{\delta(1)_2} X_1 \\ T_{1,3} = \Delta^{\delta(1)_0} X_1 + 3 i \Delta^{\delta(1)_1} X_1 + 3 i^2 \Delta^{\delta(1)_2} X_1 + i^3 \Delta^{\delta(1)_3} X_1 \\ \vdots \\ T_{1,p} = \Delta^{\delta(1)_0} X_1 + \frac{p}{1} i \Delta^{\delta(1)_1} X_1 + \frac{p(p-1)}{1.2} i^2 \Delta^{\delta(1)_2} X_1 + \dots \end{array} \right.$$

Con las funciones $X_{1,2}, X_{1,3}, \dots, X_{1,\omega}$ y sobre la primera formemos las

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{2,3} = \varpi [\Delta^{\partial(2)_0} X_{1,2} \cdot \Delta^{\partial(2)_1} X_{1,3}] \\ X_{2,4} = \varpi [\Delta^{\partial(2)_0} X_{1,2} \cdot \Delta^{\partial(2)_1} X_{1,4}] \\ \vdots \\ X_{1,\omega} = \varpi [\Delta^{\partial(2)_0} X_{1,2} \cdot \Delta^{\partial(2)_1} X_{1,\omega}] \end{array} \right.$$

con estas formemos otras

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{2,4} = \varpi [\Delta^{\partial(3)_0} X_{2,3} \cdot \Delta^{\partial(3)_1} X_{2,4}] \\ X_{3,5} = \varpi [\Delta^{\partial(3)_0} X_{2,3} \cdot \Delta^{\partial(3)_1} X_{2,5}] \\ \vdots \\ X_{3,\omega} = \varpi [\Delta^{\partial(3)_0} X_{2,3} \cdot \Delta^{\partial(3)_1} X_{2,\omega}] \end{array} \right.$$

Continuando de esta suerte llegaremos á las fórmulas generales

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} X^{(\mu)}_{\mu+1} = \varpi [\Delta^{\partial(\mu)_0} X^{(\mu-1)}_{\mu} \cdot \Delta^{\partial(\mu)_1} X^{(\mu-1)}_{\mu+1}] \\ X^{(\mu)}_{\mu+2} = \varpi [\Delta^{\partial(\mu)_0} X^{(\mu-1)}_{\mu} \cdot \Delta^{\partial(\mu)_1} X^{(\mu-1)}_{\mu+2}] \\ \vdots \\ X^{(\mu)}_{\omega} = \varpi [\Delta^{\partial(\mu)_0} X^{(\mu-1)}_{\mu} \cdot \Delta^{\partial(\mu)_1} X^{(\mu-1)}_{\omega}] \end{array} \right.$$

siendo $\partial(\mu)$ un número arbitrario y

$$(25) \quad \partial(\mu)_1 = 1 + \partial(\mu)_0, \partial(\mu)_2 = 2 + \partial(\mu)_0 \dots \partial(\mu)_\nu = \nu + \partial(\mu)_0.$$

Tendremos además presente que cuando $\mu=0$, $\partial(0)_0$ es ∂_0 , $X(0)_1 = X_1$, $X(-1)_0 = Y_0$, $X(-1)_1 = Y_1$, etc., con lo cual abrazamos todas las fórmulas en estas generales.

Formemos también las cantidades

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} T^{(\mu)}_1 = \Delta^{\partial(\mu)_0} X^{(\mu-1)}_{\mu} + i \Delta^{\partial(\mu)_1} X^{(\mu-1)}_{\mu} \\ T^{(\mu)}_2 = \Delta^{\partial(\mu)_0} X^{(\mu-1)}_{\mu} + 2i \Delta^{\partial(\mu)_1} X^{(\mu-1)}_{\mu} + i^2 \Delta^{\partial(\mu)_2} X^{(\mu-1)}_{\mu} \\ \vdots \\ T^{(\mu)}_{\frac{\partial}{2}} = \Delta^{\partial(\mu)_0} X^{(\mu-1)}_{\mu} + i \frac{\partial}{4} \Delta^{\partial(\mu)_1} X^{(\mu-1)}_{\mu} + i^2 \frac{\partial(\partial-1)}{4 \cdot 2} \Delta^{\partial(\mu)_2} X^{(\mu-1)}_{\mu} \end{array} \right.$$

Para abreviar llamaremos á los productos

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_1 T_2 \dots T_{\omega-1} = \Pi_{\omega-1} \\ T^{(1)}_1 T^{(1)}_2 \dots T^{(1)}_{\omega-2} = \Pi^{(1)}_{\omega-2} \\ \vdots \\ T^{(\mu)}_1 T^{(\mu)}_2 \dots T^{(\mu)}_{\nu} = \Pi^{(\mu)}_{\nu} \end{array} \right.$$

y en virtud del teorema fundamental (11) aplicado á las funciones $X(1)$

$$(28) \quad \varpi \left[\Delta^{\delta_1} X(1)_{x_2} \Delta^{\delta_2} X(1)_{x_3} \dots \Delta^{\delta_{\omega-1}} X(1)_{x_{\omega}} \right] = \\ \Pi(1)_{\omega-2} \times \varpi \left[\Delta^{\delta(1)_0} X_1 \Delta^{\delta(1)_1} X_{x_3} \dots \Delta^{\delta(1)_{\omega-1}} X_{x_{\omega}} \right];$$

(en la cual x puede tener todos los valores menos 1) por ser X_1 la funcion invariable que entra forzosamente en la composicion de las $X(1)$, razon idéntica á la que antes dimos para hacer ver que en la fórmula (25) x podia tener todos los valores de 1 á ω pero no cero (a).

Dando á $\delta(1)_0$ el valor determinado cero, el segundo factor del segundo miembro de la ecuacion (28) se convierte en

$$\Pi_{\omega-1} \varpi \left[\Delta^{\delta_0} Y_0 \Delta^{\delta_1} Y_1 \Delta^{\delta_2} Y_{x_2} \dots \Delta^{\delta_{\omega}} Y_{x_{\omega}} \right]$$

y sustituido en aquella

$$(29) \quad \varpi \left[\Delta^{\delta_1} X(1)_{x_2} \dots \Delta^{\delta_{\omega-1}} X(1)_{x_{\omega}} \right] = \Pi_{\omega-1} \cdot \Pi(1)_{\omega-2} \varpi \left[\Delta^{\delta_0} Y_0 \Delta^{\delta_1} Y_1 \Delta^{\delta_2} Y_{x_2} \dots \Delta^{\delta_{\omega}} Y_{x_{\omega}} \right]$$

Formemos la funcion siguiente

$$\varpi \left[\Delta^{\delta_1} X(1)_{x_3} \dots \Delta^{\delta_{\omega-2}} X(2)_{x_{\omega}} \right] = \Pi(2)_{\omega-5} \varpi \left[\Delta^{\delta(2)_0} X(1)_x \Delta^{\delta(2)_1} X(1)_{x_3} \dots \Delta^{\delta(2)_{\omega-2}} X(1)_{x_{\omega}} \right]$$

en la cual por las razones ya espuestas x solo puede admitir los valores desde 5 en adelante (b).

Teniendo esto en cuenta en la ecuacion (29) y haciendo en la anterior $\delta(2)_0 = 0$, el segundo miembro de esta se convierte en el primero de la (29) multiplicado por $\Pi(2)_{\omega-3}$, luego

$$\varpi \left[\Delta^{\delta_1} X(2)_{x_3} \dots \Delta^{\delta_{(\omega-2)}} X(2)_{x_{\omega}} \right] = \\ = \Pi_{\omega-1} \cdot \Pi(1)_{\omega-2} \cdot \Pi(2)_{\omega-5} \varpi \left[\Delta^{\delta_0} Y_0 \Delta^{\delta_1} Y_1 \Delta^{\delta_2} Y_{x_2} \Delta^{\delta_3} Y_{x_3} \dots \Delta^{\delta_{\omega}} Y_{x_{\omega}} \right]$$

Continuando asi llegaríamos á la fórmula general, cuya ley es manifiesta.

$$(50) \quad \left[\Delta^{\delta_1} X(\mu)_{x(\mu+1)} \Delta^{\delta_2} X(\mu)_{x(\mu+2)} \dots \Delta^{\delta_{(\omega-\mu)}} X(\mu)_{x_{\omega}} \right] =$$

(a) Nótese que no mencionamos el caso en que alguna de las funciones fuese igual á Y_0 en la fórmula (25) ó á X_1 en la anterior, porque de todos modos siempre habria necesidad de darle un índice para distinguirla en el órden de colocacion: ademas que luego, aunque incidentalmente, encontraremos este caso, y entonces se verán los resultados obtenidos para él.

(b) Sylvester empleó una notacion análoga con igual objeto.

$$H_{\omega-1} H^{(1)}_{\omega-2} \dots H^{(\mu)}_{\omega-1-\mu} \psi \left[\Delta^{\delta_0} Y_0 \dots \Delta^{\delta_\mu} Y_\mu \cdot \Delta^{\delta_{\mu+1}} Y_{\alpha(\mu+1)} \dots \Delta^{\delta_\omega} Y_{\alpha(\omega)} \right]$$

fácil de demostrar, probando que si se verifica para μ , se verifica también para $\mu+1$.

Conviene hacer notar para el corolario siguiente que en las cantidades H , solo entran las funciones Y desde Y_0 hasta Y_μ y son por lo tanto independientes de las restantes $Y_{\alpha(\mu+1)}$ $Y_{\alpha(\mu+2)}$ hasta $Y_{\alpha(\omega)}$.

COROLARIO II.

Con las $\omega+1$ funciones $Y_0, Y_1, Y_2 \dots Y_\mu, Y_{\alpha(\mu+1)} \dots Y_{\alpha(\omega)}$ formemos la función

$$\psi \left[\Delta^{\delta_1} X^{(\mu)}_{\alpha(\mu+1)} \cdot \Delta^{\delta_2} X^{(\mu)}_{\alpha(\mu+2)} \dots \Delta^{\delta_{\omega-\mu}} X^{(\mu)}_{\alpha(\omega)} \right].$$

Tomemos otro número igual de funciones $Y_0, Y_1, Y_2 \dots Y_\mu, Y_{\alpha'(\mu+1)} \dots Y_{\alpha'(\omega)}$, de las cuales, las $\mu+1$ primeras sean comunes con las otras y formemos la función

$$\psi \left[\Delta^{\delta_1} X^{(\mu)}_{\alpha'(\mu+1)} \cdot \Delta^{\delta_2} X^{(\mu)}_{\alpha'(\mu+2)} \dots \Delta^{\delta_{\omega-\mu}} X^{(\mu)}_{\alpha'(\omega)} \right]$$

y dividiéndolas entre sí, la fórmula (50) da

$$(51) \quad \frac{\psi^{(\mu, \alpha)} \psi \left[\Delta^{\delta_0} Y_0 \dots \Delta^{\delta_\mu} Y_\mu \cdot \Delta^{\delta_{\mu+1}} Y_{\alpha(\mu+1)} \dots \Delta^{\delta_\omega} Y_{\alpha(\omega)} \right]}{\psi^{(\mu, \alpha')} \psi \left[\Delta^{\delta_0} Y_0 \dots \Delta^{\delta_\mu} Y_\mu \cdot \Delta^{\delta_{\mu+1}} Y_{\alpha'(\mu+1)} \dots \Delta^{\delta_\omega} Y_{\alpha'(\omega)} \right]}$$

que como caso particular haciendo $\omega = \mu+2$

$$(52) \quad \frac{\psi \left[\Delta^{\delta_1} X^{(\mu)}_{\alpha(\mu+1)} \cdot \Delta^{\delta_2} X^{(\mu)}_{\alpha(\mu+2)} \right]}{\psi \left[\Delta^{\delta_1} X^{(\mu)}_{\alpha'(\mu+1)} \cdot \Delta^{\delta_2} X^{(\mu)}_{\alpha'(\mu+2)} \right]} =$$

$$\frac{\psi \left[\Delta^{\delta_0} Y_0 \dots \Delta^{\delta_\mu} Y_\mu \cdot \Delta^{\delta_{\mu+1}} Y_{\alpha(\mu+1)} \cdot \Delta^{\delta_{\mu+2}} Y_{\alpha(\mu+2)} \right]}{\psi \left[\Delta^{\delta_0} Y_0 \dots \Delta^{\delta_\mu} Y_\mu \cdot \Delta^{\delta_{\mu+1}} Y_{\alpha'(\mu+1)} \cdot \Delta^{\delta_{\mu+2}} Y_{\alpha'(\mu+2)} \right]}$$

Pero esta fórmula es todavía demasiado general, y para aplicarla á nuestro propósito haremos

$$Y_{\alpha(\mu+1)} = Y_{\alpha'(\mu+1)}$$

y á la función $Y_{\alpha(\mu+2)}$ que, (como luego veremos) es de una procedencia diversa de la de las demás funciones, la designaremos para distinguirla de ella por el índice ρ , quedando reducida la fórmula (52) á la siguiente:

$$(55) \frac{\psi \left[\frac{\Delta^{\delta_1} X^{(\mu)}}{\mu+1} \cdot \frac{\Delta^{\delta_2} X^{(\mu)}}{\mu+2} \right]}{\psi \left[\frac{\Delta^{\delta_1} X^{(\mu)}}{\mu+1} \cdot \frac{\Delta^{\delta_2} X^{(\mu)}}{\mu+2} \right]} = \frac{\psi \left[\frac{\Delta^{\delta_0} Y_0 \dots \Delta^{\delta_{\mu+1}} Y_{\mu+1}}{\mu+1} \cdot \frac{\Delta^{\delta_{\mu+2}} Y_{\mu+2}}{\mu+2} \right]}{\psi \left[\frac{\Delta^{\delta_0} Y_0 \dots \Delta^{\delta_{\mu+1}} Y_{\mu+1}}{\mu+1} \cdot \frac{\Delta^{\delta_{\mu+2}} Y_{\mu+2}}{\mu+2} \right]}$$

LEY UNIVERSAL.

Establecido el teorema fundamental es muy sencilla la demostracion de la ley.

$$(1) F(x) = A_0 \Omega_0 + A_1 \Omega_1 + A_2 \Omega_2 + \dots$$

en la cual supondremos $\Omega_0 = 1$ para obtener el término independiente de x , lo cual nada quita á la generalidad de la fórmula (1).

Bajo este supuesto, despejemos á A_0 .

$$A_0 = F(x) - A_1 \Omega_1 - A_2 \Omega_2 - \dots$$

que verificándose para todos los valores de x , basta dar á la variable uno arbitrario que denotaremos por punto puesto encima de la funcion

$$A_0 = F(\dot{x}) - A_1 \dot{\Omega}_1 - A_2 \dot{\Omega}_2 - \dots$$

Tomando las diferencias en la ecuacion (1)

$$\Delta F(x) = A_1 \Delta \Omega_1 + A_2 \Delta \Omega_2 + A_3 \Delta \Omega_3 + \dots$$

y despejanda á A_1 ,

$$A_1 = \frac{\Delta F(x)}{\Delta \Omega_1} - A_2 \frac{\Delta \Omega_2}{\Delta \Omega_1} - A_3 \frac{\Delta \Omega_3}{\Delta \Omega_1} - \dots$$

y haciendo

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta \Omega_1} = F(1); \frac{\Delta \Omega_2}{\Delta \Omega_1} = \Omega(1)_2; \frac{\Delta \Omega_3}{\Delta \Omega_1} = \Omega(1)_3; \dots \frac{\Delta \Omega_p}{\Delta \Omega_1} = \Omega_p$$

y dando á x un valor arbitrario igual al anterior

$$A_1 = F(1) - A_2 \Omega(1)_2 - A_3 \Omega(1)_3 - \dots$$

Tomando de nuevo las diferencias en la anterior antes de dar un valor particular á x

$$\Delta F(1) = A_2 \Delta \Omega(1)_2 + A_3 \Delta \Omega(1)_3 + A_4 \Delta \Omega(1)_4 + \dots$$

de donde resulta

$$A_2 = \frac{\Delta F(1)}{\Delta \Omega(1)_2} - A_3 \frac{\Delta \Omega(1)_3}{\Delta \Omega(1)_2} - A_4 \frac{\Delta \Omega(1)_4}{\Delta \Omega(1)_2} - \dots$$

en la cual haremos para simplificar

$$\frac{\Delta F(1)}{\Delta \Omega(1)_2} = F(2); \frac{\Delta \Omega(1)_3}{\Delta \Omega(1)_2} = \Omega(2)_3; \frac{\Delta \Omega(1)_4}{\Delta \Omega(1)_2} = \Omega(2)_4; \dots \frac{\Delta \Omega(1)_p}{\Delta \Omega(1)_2} = \Omega(2)_p$$

De la misma manera, tomando las diferencias en la ecuacion anterior y despejando

$$A_5 = \frac{\Delta F(2)}{\Delta \Omega(2)_5} - A_4 \frac{\Delta \Omega(2)_4}{\Delta \Omega(2)_5} - A_3 \frac{\Delta \Omega(2)_3}{\Delta \Omega(2)_5} - \&$$

y haciendo de nuevo

$$\frac{\Delta F(2)}{\Delta \Omega(2)_5} = F(5), \quad \frac{\Delta \Omega(2)_4}{\Delta \Omega(2)_5} = \Omega(3)_4, \quad \frac{\Delta \Omega(2)_3}{\Delta \Omega(2)_5} = \Omega(3)_3, \dots, \frac{\Delta \Omega(2)_2}{\Delta \Omega(2)_5} = \Omega(3)_2$$

$$A_5 = F(5) - A_4 \Omega(3)_4 - A_3 \Omega(3)_3 - \&$$

la ley es evidente; y el término general dará

$$(34) \quad A_\mu = F(\mu) - A_{\mu+1} \Omega(\mu)_{\mu+1} - A_{\mu+2} \Omega(\mu)_{\mu+2} - \&$$

y fácil de demostrar que si se verifica para μ se verifica para $\mu+1$.

Poniendo aquí en vez de μ , $\mu+\nu$

$$(35) \quad A_{\mu+\nu} = F(\mu+\nu) - A_{\mu+\nu+1} \Omega(\mu+\nu)_{\mu+\nu+1} - A_{\mu+\nu+2} \Omega(\mu+\nu)_{\mu+\nu+2} - \&$$

que nos servirá para determinar los valores de $A_{\mu+1}$, $A_{\mu+2}$ & que entran en el valor general de A_μ

Supongamos

$$(36) \quad -\Omega(\mu)_{\mu+1} = \Psi(\mu)_1;$$

haciendo en (35) $\nu=1$ y substituyendo en (34) el valor resultante de $A_{\mu+1}$, obtendremos

$$\begin{aligned} A_\mu &= F(\mu) + \Psi(\mu)_1 \Omega(\mu+1)_{\mu+2} - A_{\mu+2} \{ \Omega(\mu)_{\mu+2} + \Psi(\mu)_1 \Omega(\mu+2)_{\mu+2} \} \\ &\quad - A_{\mu+3} \{ \Omega(\mu)_{\mu+3} + \Psi(\mu)_1 \Omega(\mu+1)_{\mu+2} \} \\ &\quad - A_{\mu+2} \{ \& \} \\ &\quad \& \end{aligned}$$

y substituyendo en esta por $A_{\mu+2}$ su valor deducido de la ecuacion (35) llegaremos á obtener haciendo

$$\begin{aligned} (37) \quad & - \{ \Omega(\mu)_{\mu+2} + \Psi(\mu)_1 \Omega(\mu+1)_{\mu+2} \} = \Psi(\mu)_2 \\ A_\mu &= F(\mu) + \Psi(\mu)_1 F(\mu+1) + \Psi(\mu)_2 F(\mu+2) \\ &\quad - A_{\mu+3} \{ \Omega(\mu)_{\mu+3} + \Psi(\mu)_1 \Omega(\mu+1)_{\mu+2} + \Psi(\mu)_2 \Omega(\mu+2)_{\mu+3} \} \\ &\quad - A_{\mu+4} \{ \Omega(\mu)_{\mu+4} + \Psi(\mu)_1 \Omega(\mu+1)_{\mu+2} + \Psi(\mu)_2 \Omega(\mu+2)_{\mu+3} \} \\ &\quad - \& \end{aligned}$$

Supondremos

$$(38) \quad - \{ \Omega(\mu)_{\mu+3} + \Psi(\mu)_1 \Omega(\mu+1)_{\mu+2} + \Psi(\mu)_2 \Omega(\mu+2)_{\mu+3} \} = \Psi(\mu)_3$$

y substituyendo el valor de $A_{\mu+5}$ (55)

$$(59) A_{\mu} = F(\mu) + \Psi(\mu)_1 F(\mu+1) + \Psi(\mu)_2 F(\mu+2) + \Psi(\mu)_3 F(\mu+3) + \Psi(\mu)_4 F(\mu+4) + \Psi(\mu)_5 F(\mu+5) + \dots$$

haciendo en general á $\Psi(\mu)_p$

$$(40) \Psi(\mu)_p = - \left\{ \Omega(\mu)_{\mu+p} + \Psi(\mu)_1 \Omega(\mu+1)_{\mu+p} + \Psi(\mu)_2 \Omega(\mu+2)_{\mu+p} + \dots + \Psi(\mu)_{p-1} \Omega(\mu+p-1)_{\mu+p} \right\}$$

(Se continuará.)

P. P. DE LA SALA.

ENSANCHE DE MADRID.

Dos cuestiones tienen el privilegio de ocupar la atención del pueblo de Madrid, por lo mucho que afectan el interés de todas las clases de la sociedad y al porvenir y engrandecimiento de la población: y aun hablando con mas exactitud, podemos decir que es una sola cuestión, puesto que si se divide en dos, la una es la solución de la otra.

Nos referimos á la escasez y extraordinaria carestía de habitaciones, cuyo mal solo puede desaparecer ó disminuir con la realización del ensanche de Madrid.

La escasez de habitaciones es notable, y el precio elevado que en poco tiempo han tomado, es verdaderamente extraordinario: no nos detendremos en este punto; todos los periódicos han publicado datos que ponen en evidencia la exactitud de lo que acabamos de consignar, y es además el mal tan general, afecta de tal manera á todas las clases y gerarquías sociales, aunque mas sensible y desgraciadamente á la media y poco acomodada, que está en la conciencia de todos la gravedad de la situación, que para algunos toma las proporciones de una verdadera calamidad.

Muchos medios se han propuesto para ven-

cer tan grave dificultad; algunos los creemos irrealizables, otros ineficaces, y otros contrarios á los buenos principios de administración; no nos proponemos analizarlos, vamos solo á presentar brevemente lo que á nuestro entender debe y puede hacerse inmediatamente en esta cuestión tan vital para el pueblo de Madrid.

Creemos que el único medio de que bajen los alquileres de las habitaciones, ó de que al menos no sigan en la escala ascendente que han tomado, consiste en que se edifique mucho. En Madrid no hay, aunque lo contrario se diga por algunos, espacios convenientes donde construir; ni debe provocarse el aumento de la edificación dentro del actual recinto, en el cual ya se halla escesivamente condensada la población. No conviene además que se levanten nuevos obstáculos que hagan difícil la realización de las grandes reformas que reclaman á la vez la necesidad de llevar la luz y la ventilación á unos barrios; la de establecer en todas buenas vías de comunicación para el tráfico, que crece de una manera asombrosa; y la no menos imperiosa de levantar en todos los distritos, mercados capaces y de buenas condiciones higiénicas, plazas y jardines de desahogo, y otro gran número de construcciones y dependencias que tan necesarias son para la salubridad, el tráfico, la policía y la comodidad del vecindario.

La edificación en grande escala solo es