AÑO XXVII DE LA PUBLICACION. REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS. AÑO VII DE LA TERCERA SÉRIE.

MADRID, 1.° DE JUNIO DE 1879.

TOMO XXVII. NÚM. 11.

## SUMARIO.



# ARITMÉTICA SUPERIOR.

### TEORÍA DE RESTOS.

*Lema. Para que dos números A y B divididos respectivamente por otro P den el mismo resto es preciso que su diferencia sea divisible por P.*

Que esta condicion es necesaria está demostrado en todas las obras elementales de Aritmética: vamos á probar que es suficiente. En efecto: supongamos que A y B no dieran el mismo resto, y sean éstos R y $R_1$ respectivamente. Llamemos Q y $Q_1$ á los cocientes obtenidos, y se tendrán las dos ecuaciones siguientes:

$$A = PQ + R$$
$$B = PQ_1 + R_1.$$

Restando estas expresiones, la segunda de la primera, se encuentra

$$A - B = P(Q - Q_1) + R - R_1$$

si $R > R_1$ y

$$A - B = P(Q - Q_1) - (R_1 - R),$$

si se supone $R < R_1$.

Ahora bien; por hipótesis P divide á $A - B$; á $P(Q - Q')$ tambien por ser esta cantidad un múltiplo de este número; luego P será un divisor de $R - R'$ ó de $R' - R$, lo que es imposible, por ser R y R' menores que P. Será, pues, preciso, para que la condicion anterior se verifique, que desaparezca el término $R - R'$, es decir, que $R = R'$ como se deseaba demostrar.

*Teorema. El resto que se encuentra dividiendo un polinomio aritmético por un número, es el mismo que daria otro formado, sustituyendo á los términos del primero los restos que se hallan, dividiendo éstos por el número dado; añadiendo, cuando las restas no sean posible, un múltiplo conveniente del divisor.*

Sea el polinomio aritmético

$$A_1 + A_2 + A_3 \pm A_4 \ldots\ldots \pm A_n;$$

P el divisor; $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots\ldots Q_n$ los cocientes de dividir los términos $A_1, A_2 \ldots\ldots A_n$ por este número y $R_1, R_2, R_3 \ldots\ldots R_n$ los restos, y sea, ademas, KP un múltiplo cualquiera de P.

Se tendrán las siguientes igualdades:

$$A_1 = PQ_1 + R_1$$
$$A_2 = PQ_2 + R_2$$
$$A_3 = PQ_3 + R_3$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$A_n = PQ_n + R_n$$

Sustituyendo estos valores en el polinomio aritmético propuesto, y añadiendo, para hacer las restas posibles, la cantidad PK, se tiene:

$$A_1 + A_2 + A_3 \pm A_4 \ldots\ldots \pm A_n = P(Q_1 + Q_2 + Q_3 \ldots\ldots \pm Q_n - K) + PK + R_1 + R_2 + R_3 + \ldots\ldots \pm R_n.$$

De la igualdad anterior se deduce la siguiente:

$$A_1 + A_2 + A_3 \pm A_4 \ldots\ldots \pm A_n - (PK + R_1 + R_2 + R_3 \ldots\ldots \pm R_n) = P(Q_1 + Q_2 + \ldots\ldots \pm Q_n - K).$$

expresion que indica que la diferencia de los polinomios aritméticos $(A_1 + A_2 + A_3 \pm A_4 \ldots\ldots \pm A_n)$ y $PK + R_1 + R_2 + R_3 \ldots\ldots \pm R_n$ es divisible por P; luego, segun el lema anterior, estas cantidades dan, divididas por P, el mismo resto, que es lo que se deseaba demostrar.

Corolario 1.° El resto de dividir una suma $A_1 + A_2 + A_3 + \ldots\ldots + A_n$ por un número P, es el mismo que se encuentra dividiendo la suma de los restos parciales por la misma cantidad.

En efecto: la igualdad anterior se convierte en este caso en la siguiente:

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots\ldots + A_n = P(Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots\ldots Q_n) + R_1 + R_2 + R_3 \ldots\ldots + R_n$$

que comprueba lo que se deseaba demostrar.

Corolario 2.° Si un número divide á uno de los sumandos de una suma y no divide al otro, el resto que da ésta es el mismo que el del sumando no divisible.

En efecto; la igualdad del teorema anterior se trasforma en:

$$A_1 + A_2 = P(Q_1 + Q_2) + R_2,$$

que demuestra lo enunciado.

Corolario 3.° Si un número divide al minuendo de una resta y no al sustraendo, el resto que da la diferencia es igual á lo que le falta el que da el sustraendo para ser igual al divisor.

En efecto; la igualdad citada se convierte en este caso en:

$$A_1 - A_2 = P(Q_1 - Q_2 - 1) + P - R_2,$$

como se deseaba demostrar.

*Problema.* Encontrar la ley que siguen los restos que se hallan dividiendo por un número entero $c$ los valores que puede tomar la expresion $an + b$, cuando se dan á $n$ valores enteros y sucesivos, siendo $a$ y $b$ números enteros y conocidos.

Los restos que se pueden obtener deben ser todos menores que $c$, y por lo tanto serán los siguientes:

$$0, 1, 2, 3, \ldots\ldots c-1,$$

cuyo número total es $c$.

Para que dos valores de la expresion $an + b$ den el mismo resto es preciso que su diferencia sea divisible por $c$, como se demostró en el lema fundamental; si se llama, pues, $n''$ y $n'$ los valores correspondientes de $n$, se tendrá:

$$(an'' + b) - (an' + b) = c.\, q,$$

siendo $q$ el cociente; reduciendo la igualdad anterior se trasforma en:

$$a(n'' - n') = c\, q.$$

Si ahora se dividen los dos miembros de esta expresion por el máximo comun divisor de $a$ y $c$, y se llama $a'$ y $c'$ los cocientes, se tendrá:

$$a'(n'' - n') = c'\, q.$$

Pero observando que $c'$ divide al segundo miembro, tambien debe dividir al primero; mas como es primo con $a'$, debe ser necesariamente un divisor de $n'' - n'$.

Por lo tanto, si se dan á $n$, $c'$ valores consecutivos, se hallarán, evidentemente, otros tantos restos distintos, pues la diferencia entre dos de estos valores no puede ser divisible por $c'$; si ahora se continúa dando á $n$ otro $c'$ valores consecutivos á continuacion de los anteriores, se reproducirán los restos encontrados, y de la misma manera periódica é indefinidamente.

Si $a$ y $c$ son primos entre sí, entónces el número de restos distintos será $c$, entre los cuales se hallará uno igual á cero forzosamente. Si se llama $n_1$ á uno de los valores de $n$ que hace nulo el resto, todos los demas serán de la forma:

$$n = n_1 + kc,$$

siendo $k$ un número entero.

Si $a$ y $c$ no son primos entre sí, pero si lo son $a$, $b$ y $c$, en este caso ninguno de los restos puede ser nulo. En efecto; supongamos que $n = n_1$ hace que $an_1 + b$ sea divisible por $c$, se tendrá:

$$an_1 + b = c.\, k;$$

pero todo divisor de $a$ y $c$ lo sería forzosamente de $b$, luego $a$, $b$ y $c$ no serian primos entre sí, como se habia supuesto.

Por último, si $a$, $b$ y $c$ no son primos y se representan por $a'$, $b'$ y $c'$ los cocientes de dividir los primeros números por su máximo comun divisor, los restos distintos que se encuentren dividiendo $an + b$ por $c$, serán iguales á los de $a'n + b'$ por $c'$, multiplicados respectivamente por dicho máximo comun divisor. Siendo $a'$, $b'$ y $c'$ primos entre sí se reduce este caso á uno de los anteriores.

*Teorema de Fermat generalizado. Si un número* c *es primo con otro* a, *divide á la expresion* $a^n - 1$, *siendo* n *el número de números menores que* c *que son primos con él.*

Si se supone $b = 0$ en la expresion fundamental del problema anterior, ésta quedará reducida á $an$. Demos ahora á $n$ la serie de valores $1, 2, 3 \ldots\ldots c$, y siendo, como se ha supuesto en el enunciado de este teorema, $a$ y $c$ primos entre sí, se tendrán las cantidades siguientes:

$$a;\ 2a;\ 3a \ldots\ldots (c-1)\, a \text{ y } ca,$$

que darán restos distintos.

Sea ahora $k_1$ un número menor que $c$ y primo con él; el producto $k_1 a$ estará comprendido en la serie anterior evidentemente; llamemos $q_{k_1}$ y $r_{k_1}$ al cociente y al resto que se encuentran dividiendo $k_1 a$ por $c$, y se tendrá:

$$k_1 a = q_{k_1} c + r_{k_1}.$$

Vamos á demostrar, ántes de pasar adelante, que $c$ y $r_{k_1}$ son primos entre sí. En efecto; si tuvieran un factor comun éste dividiria al segundo miembro, y por lo tanto al primero; pero no pudiendo dividir ni á $a$ ni á $k_1$ por ser primo con ellos, tampoco divide al producto; luego $c$ y $r_k$ deben ser primos entre sí.

Admitamos ahora que hay $n$ números primo con $c$ menores que esta cantidad, y que éstos sean:

$$k_1;\ k_2;\ k_3 \ldots\ldots k_n;$$

y llamemos $r_{k_1}, r_{k_2}, r_{k_3} \ldots\ldots r_{k_n}$ los restos respectivos de dividir por $c$ los productos $k_1 a$; $k_2 a$; $k_3 a \ldots\ldots k_n a$. Segun lo demostrado, los restos encontrados son primos con $c$, distintos entre sí y menores que este número; luego forzosamente tienen que ser iguales á $k_1$; $k_2$; $k_3 \ldots\ldots k_n$ si bien en distinto órden.

Pasando $r_{k_1}$ al primer miembro en la igualdad $k_1 a = cq_{k_1} + r_{k_1}$, se tiene:

$$k_1 a - r_{k_1} = cq_{k_1};$$

luego la serie de diferencias

$$k_1 a - r_{k_1};\ k_2 a - r_{k_2};\ k_3 a - r_{k_3} \ldots\ldots r_n a - r_n;$$

son todas divisibles por $c$; vamos á demostrar que tambien lo será la cantidad:

$$k_1 a.\ k_2 a.\ k_3 a \ldots\ldots k_n a - r_{k_1}.\ r_{k_2}.\ r_{k_3} \ldots\ldots r_{k_n}.$$

Para hacer ver la verdad de esta propórcion comprobémosla para las dos primeras, y despues demostremos que si es cierta para un cierto grupo, tambien lo será cuando haya una cantidad más.

Sean $k_1 a - r_{k_1}$ y $k_2 a - r_{k_2}$ las dos primeras diferencias y se tendrá:

$$k_1 a = cq_{k_1} + r_{k_1} \text{ y } k_2 a = cq_{k_2} + r_{k_2},$$

multiplicando entre sí estas dos igualdades se tiene:

$$k_1 a.\ k_2 a = c^2 q_{k_1} q_{k_2} + r_{k_1} cq_{k_2} + r_{k_2} cq_{k_1} + r_{k_1} r_{k_2},$$

y restando de ambos miembros la cantidad $r_{k_1} r_{k_2}$ se encuentra:

$$k_1 a\ k_2 a - r_{k_1} r_{k_2} = c\,(cq_{k_1} q_{k_2} + r_{k_1} q_{k_2} + r_{k_2} q_{k_1});$$

expresion que demuestra lo que se deseaba.

Sean ahora $m$ las diferencias, y empecemos por admitir que es cierta para $m - 1$; vamos á demostrar que tambien lo será para las $m$.

Sea

$$k_1 a\ k_2 a\ k_3 a \ldots\ldots k_{m-1} a_{m-1} - r_{k_1} r_{k_2} r_{k_3} \ldots\ldots r_{k_{m-1}} = ch$$

y ademas

$$k_m a - r_m = cq_{k_m}.$$

De estas igualdades se deducen

$$k_1 a.\ k_2 a.\ k_3 a. \ldots\ldots k_{m-1} a_{m-1} = ch + r_{k_1} r_{k_2} r_{k_3} \ldots\ldots r_{k_{m-1}}$$

y

$$k_m a = cq_{k_m} + r_m;$$

multiplicando estas expresiones miembro á miembro se saca

$$k_1 a\ k_2 a\ k_3 a \ldots\ldots k_{m-1} a_{m-1} \times k_m a =$$
$$c^2 h q_{k_m} + r_{k_1} r_{k_2} \ldots\ldots r_{k_{m-1}} cq_{k_m} + chr_m + r_{k_1} r_{k_2} r_{k_m}$$

ó bien

$$k_1 a.\ k_2 a.\ k_3 a. \ldots\ldots k_m a =$$
$$c\,(chq_{k_m} + r_{k_1} r_{k_2} \ldots\ldots r_{k_{m-1}} q_{k_m} + hr_m) + r_{k_1} r_{k_2} \ldots\ldots r_{k_m}$$

de donde

$$k_1 a\ k_2 a\ k_3 a \ldots\ldots k_m a - r_{k_1} r_{k_2} \ldots\ldots r_{k_m} =$$
$$c\,(chq_{k_m} + r_{k_1} r_{k_2} \ldots\ldots r_{k_{m-1}} q_{k_m} + hr_m);$$

luego el primer miembro es divisible por $c$, como se deseaba demostrar.

Ahora bien; el primer miembro de la igualdad anterior se puede poner bajo la forma

$$k_1 k_2 k_3 \ldots\ldots k_m a^m - r_{k_1} r_{k_2} r_{k_3} \ldots\ldots r_{k_m};$$

pero como se demostró anteriormente, se tiene

$$k_1 k_2 k_3 \ldots\ldots k_m = r_{k_1} r_{k_2} r_{k_3} \ldots\ldots r_{k_m},$$

la expresion anterior se trasforma en

$$k_1 k_2 k_3 \ldots\ldots k_m (a^m - 1).$$

Segun lo dicho anteriormente, esta expresion es divisible por $c$; pero este número es primo con todos los factores $k_1\ k_2\ k_3 \ldots\ldots k_m$, luego lo es con el producto, y por lo tanto tiene que dividir al término

$$a^m - 1,$$

como se deseaba demostrar.

*Corolario.* Si $c$ fuera primo, $m$ sería igual á $c - 1$, y el teorema anterior se trasforma en el siguiente: que si un número $c$ no divide á otro $a$, es divisor, sin embargo, de la diferencia

$$a^{c-1} - 1,$$

que es el antiguo enunciado del teorema de Fermat.

Teorema Wilson. Todo número primo $p$ es un divisor de la suma:

$$1.2.3. \ldots\ldots (p-1) + 1.$$

En efecto: consideremos en la serie $2.\ 3.\ 4 \ldots\ldots (p - 2)$ uno cualquiera de sus números $\alpha$, y calculemos los restos que se encuentran dividiendo por $p$ los productos parciales siguientes:

$$\alpha;\ 2\alpha;\ 3\alpha \ldots\ldots (p-1)\,\alpha;$$

todos ellos serán, segun lo demostrado anteriormente, distintos y ninguno de ellos será nulo.

Busquemos ahora cuál de estos productos da el resto 1: éste no puede ser $1.\alpha$, puesto que siendo $\alpha < p$ este número será su propio resto; tampoco puede ser $\alpha^2$, pues de serlo $\alpha^2 - 1$ sería divisible por $p$, y como $\alpha^2 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha + 1)$, $p$ dividiria á uno de estos factores, lo que es imposible, pues ambos son menores que $p$.

Por último, si lo fuera $(p - 1)\,\alpha$, como este número se puede poner bajo la forma $p\alpha - \alpha$, la cantidad $p\alpha - \alpha - 1$ ó $p\alpha - (\alpha + 1)$ sería divisible por $p$: luego este número sería un divisor de $\alpha + 1$, lo cual ya se ha visto que es imposible.

Por lo tanto, el número que multiplicado por $\alpha$ da un producto que dividido por $p$ da un resto 1, tiene que ser uno de los comprendidos en la serie

$$2, 3, 4, 5 \ldots\ldots p - 2,$$

distinto de $a$.

Ahora bien; el número de estos factores es par evidentemente, y segun lo demostrado ántes se agrupan de dos en dos, dando resultados que divididos por $p$ dan por restos 1 : se tendrán, pues, los productos siguientes :

$$2\alpha ; 3\alpha' ; 4\alpha'' \ldots\ldots (p-2)\,\alpha^{(4)};$$

si, pues, á estos números se les disminuye en una unidad, las diferencias que resulten serán divisibles por $p$, y se tendrá, pues,

$$(2\alpha-1); (2\alpha'-1) \ldots\ldots \big((p-2)(\alpha^4-1\big).$$

Repitiendo ahora una demostracion análoga á la del teorema anterior, se tendrá que el producto de los minuendos, que es evidentemente $2\ 3\ 4 \ldots\ldots p-2$, ménos el de los sustraendos que es 1, es un múltiplo de $p$, se hallará, pues, que

$$2.\,3.\,4.\,5.\ldots\ldots(p-2)-1 = kp$$

ó

$$2.\,3.\,4.\,5.\ldots\ldots(p-2) = kp+1;$$

y multiplicando ambos miembros por $(p-1)$ se deduce :

$$1.\,2.\,3.\ldots\ldots p-1 = (kp-1)\,(p-1),$$

y haciendo el producto indicado en el segundo miembro se encuentra

$$1.\,2.\,3.\ldots\ldots(p-1) = kp^2 - p - kp + 1$$

ó

$$1.\,2.\,3.\ldots\ldots(p-1) = p\,(kp-k-1)+1,$$

ó finalmente,

$$1.\,2.\,3.\ldots\ldots(p-1)-1 = p\,(kp-k-1)$$

como se deseaba demostrar.

Tal es uno de los capítulos de una aritmética que por circunstancias especiales no se ha publicado todavía.

E. DE ECHEGARAY.

---

# INSTALACION
## DEL SERVICIO MUNICIPAL DE AGUAS
### EN NIJNI-NOWGOROD (RUSIA),

POR

**L. POILLON,**

Ingeniero de Artes y Manufacturas de Paris.

(*Continuacion.*)

Cada bomba es movida directamente por el árbol de una máquina por medio de un manguito de Oldham, compuesto de dos partes reunidas por una clavija trasversal. Si se quita esta clavija, se puede con la misma máquina mover la segunda bomba con sólo colocar una correa sobre los volantes de ambas máquinas. Esta disposicion vence tambien la eventualidad de una desigualdad de desgaste entre los cojinetes de una bomba y los de la máquina, sin que resulte ningun accidente grave.

Hay tres calderas; cada una tiene 55 metros de superficie de calefaccion interior y 75 metros en total. Se puede, pues, con las tres calderas hacer funcionar los dos grupos de máquinas y suministrar así 7.200 metros cúbicos de agua por dia. En tiempo normal se marcha con un solo grupo de máquinas y dos calderas, estando la tercera en limpia; pero áun cuando haya una caldera, una máquina, una bomba y un conducto en reparacion, se podrá todavía producir económicamente el suministro normal.

Cada caldera está provista de una llave de toma de vapor colocada sobre la cúpula y destinada á establecer ó interceptar la comunicacion de esta caldera con un colector colocado sobre la mampostería que envuelve los generadores. En una de las extremidades del colector se hallan dos llaves que sirven para interceptar el paso del vapor por la tubería de una ú otra de las máquinas, separada ó simultáneamente. Tanto el colector de vapor como el de alimentacion llevan cada uno cinco llaves, destinadas á interrumpir la comunicacion con una ú otra de las calderas y de las máquinas. Cada máquina puede á voluntad impulsar directamente una bomba, y la otra por medio de correas. Al entrar el vapor en la sala de las máquinas encuentra un purgador, en donde queda toda el agua que pudiera arrastrar, y despues de pasar por la caja de mariposa y por la llave de introduccion, penetra, ya seco, en el pequeño cilindro.

Despues de haber trabajado en plena presion y á expansion en el cilindro, se introduce en un recalentador, pasa á terminar su expansion en el gran cilindro, yendo finalmente al condensador, á la atmósfera ó á los tubos de calefaccion.

El purgador comunica por su parte superior con una llave que permite la introduccion del vapor en plena presion en la caja de distribucion del gran cilindro, y por la parte inferior está en comunicacion con el recalentador, que se encuentra debajo. Este último suministra el vapor de la cubierta del gran cilindro, y como todas las aguas se concentran en su parte inferior, una bomba especial las toma para reintegrarlas á las calderas. El suplemento de las aguas necesarias para la alimentacion se toma del condensador. El colector de ali-