AÑO XXVII DE LA PUBLICACION.

REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS.

AÑO VII DE LA TERCERA SÉRIE.

MADRID, 1.° DE ABRIL DE 1879.

TOMO XXVII. NÚM. 7.°

SUMARIO.

Con sentimiento tenemos que participar á nuestros suscritores el fallecimiento del jóven Ingeniero don Heliodoro Menendez y Menendez, acaecido el dia 23 de Marzo último en Salamanca.

La REVISTA se asocia, en nombre de todo el Cuerpo, al dolor producido por la temprana muerte de nuestro compañero, y envia á su familia el pésame por tan irreparable pérdida.

MECÁNICA RACIONAL.

TEOREMA DE LAS VELOCIDADES VIRTUALES.

De las diversas demostraciones dadas al teorema de las velocidades virtuales por los autores que han escrito obras de Mecánica racional, ninguna más exacta, indudablemente, que la propuesta por Mr. Poinsot en una Memoria acerca del equilibrio de los sistemas; pero ésta tiene el inconveniente para poderse explicar en una cátedra, de no ser directa, sino que la verdad del teorema se deduce de todo lo dicho en el citado escrito.

Cuando en el programa de ingreso en la Escuela de Ingenieros de Caminos se exigió la demostracion de Mr. Poinsot al teorema de las velocidades virtuales, arreglé de su trabajo una demostracion directa y propia para ser explicada en un exámen, la cual voy á publicar hoy en el presente artículo.

Teorema de las velocidades virtuales.—Si un cierto número de cuerpos que forman un sistema se mueven en el espacio, de tal manera que los caminos recorridos por cada uno de ellos no alteran sus recíprocos enlaces, la suma de los productos de las fuerzas que en un instante dado se harian equilibrio sobre el sistema por las velocidades de los cuerpos, proyectadas sobre las direcciones de las fuerzas, es igual á cero.

Supongamos, para demostrar este teorema, un sistema definido por las ecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} f(x, y, z, x', y', z' \quad . \quad . \quad . \;) = 0 \\ \varphi(x, y, z, x', y', z' \quad . \quad . \quad . \;) = 0 \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{array}\right\} 1.^a$$

y demos á cada uno de los cuerpos que entran á formarle un cierto movimiento; las coordenadas de los puntos que ántes eran x, y, z, etc., se convertirán en las siguientes:

$$x + \frac{dx}{dt} dt; \quad x' + \frac{dx'}{dt} dt;$$

$$y + \frac{dy}{dt} dt; \quad y' + \frac{dy'}{dt} dt;$$

$$z + \frac{dz}{dt} dt; \quad z' + \frac{dz'}{dt} dt;$$

Para que el movimiento dado al sistema sea compatible con los enlaces, es preciso que los valores anteriores satisfagan á las ecuaciones 1.^{a}; sustituyéndolos en ellas, éstas se trasformarán, teniendo en cuenta que el primer término del desarrollo es nulo, en

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) \dfrac{dx}{dt} + f'(y) \dfrac{dy}{dt} + f'(z) \dfrac{dz}{dt} \ldots\ldots = o \\ \varphi'(x) \dfrac{dx}{dt} + x'(y) \dfrac{dy}{dt} + x'(z) \dfrac{dz}{dt} \ldots\ldots = o \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{array}\right\} 2.^a$$

llamando para simplificar la cuestion $f'(x)$, $f'(y)$, etc., á las derivadas parciales de $f(x, y, z\ldots)$ con relacion á x, y... etc., respectivamente.

Ahora bien, si se multiplican estas ecuaciones por coeficientes indeterminados λ, μ, ν..., etc., y se suman, se tendrá la ecuacion siguiente, despues de haber ordenado el resultado, con arreglo á las componentes de las velocidades:

$$\left.\begin{array}{l}[\lambda f'(x)+\mu\varphi'(x)+.\ .\ .\ .]\dfrac{dx}{dt}\\+[\lambda f'(y)+\mu\varphi'(y)+.\ .\ .\ .]\dfrac{dy}{dt}\\+[\lambda f'(z)+\mu\varphi'(z)+.\ .\ .\ .]\dfrac{dz}{dt}\end{array}\right\}=o;\ 3.^a$$

De ella se deduce con facilidad que basta que las velocidades satisfagan á las ecuaciones 3.ª independientemente de los valores de las constantes indeterminadas λ, μ... etc., para que tambien lo estén las 2.ª

Obtenidas las ecuaciones 3.ª, vamos á demostrar que las cantidades encerradas dentro de los paréntesis son exclusivamente las expresiones generales de los componentes de las fuerzas capaces de hacerse equilibrio sobre el sistema en el momento que se considera; pues demostrado esto, lo estará tambien el teorema de las velocidades virtuales, tal cual lo hemos enunciado.

Para probar la exactitud de nuestro aserto, demostrarémos que si sobre un sistema dado de puntos se hace equilibrio un cierto grupo de fuerzas, es siempre posible trasformarle en otro equivalente, cuyas fuerzas sean iguales dos á dos, en sentido contrario y dirigidas segun las rectas que unen los $m-3$ puntos de aplicacion primeros á los tres restantes. Una vez hecho esto, bastará buscar la forma general exclusiva del segundo grupo, y hacer ver que es idéntica á las cantidades encerradas dentro de las ecuaciones 3.ª para que quede demostrado lo que se deseaba.

La proposicion anterior es evidente, cuando se trata de dos ó tres puntos. Supongamos ahora que su número se eleva á cuatro y que las fuerzas obran en los vértices del tetraedro que resulta uniendo con líneas rectas sus puntos de aplicacion; llamemos F, F', F'' y F''', respectivamente, las que obran en los puntos A, B, C y D. Descompongamos la fuerza F en direccion de las aristas AB, AC y AD, componentes que representarémos por φ, φ' y φ''. Hagamos lo mismo despues con la fuerza F' en otras dos, una igual y opuesta á φ, y la otra situada en el plano BCD, y repitamos, por último, análogas contrucciones para las F'' y F'''. Si suprimimos las fuerzas que obran á lo largo de las aristas AB, AC y AD, que son iguales dos á dos y de sentidos opuestos, no quedarán en el sistema más que las tres fuerzas situadas en el plano B, C, D y aplicadas en los vértices de este triángulo. Pero, segun dijimos ántes, para que estas tres acciones se hagan equilibrio, es preciso que á su vez se descompongan en fuerzas dirigidas segun BC, BD y CD iguales dos á dos, y de sentido contrario; luego queda demostrado lo que nos proponiamos para el caso en que el número de puntos es cuatro.

Si el número de puntos y de fuerzas exceden de esta cantidad, elegirémos tres de ellos para formar la base comun de una serie de tetraedros que tengan sus vértices en los otros puntos de aplicacion; y repitiendo para cada uno de ellos todo cuanto hemos dicho anteriormente, quedará comprobada nuestra proposicion.

Pasemos, pues, á encontrar la expresion general de los sistemas de fuerzas que están en equilibrio sobre un grupo de cuerpos cuando las fuerzas son iguales dos á dos, de sentido contrario y dirigidas en direccion de las rectas que unen sus puntos de aplicacion. Dividirémos la cuestion en tres casos: 1.°, cuando los puntos del sistema no están ligados entre sí más que por una ecuacion entre las líneas que los unen; 2.°, cuando el número de ellas es mayor; y 3.° y último, cuando las ecuaciones de condicion son funciones cualesquiera de las coordenadas de los puntos y no de sus distancias mutuas.

Primer caso. Consideremos cuatro puntos cuyas distancias sean m, n, p, q, r y s, ligadas por la ecuacion:

$$f(m, n, p, q, r, s)=\mathrm{L}=\text{constante},\ 4$$

Tomemos tres ejes rectangulares en el espacio, y refiramos á ellos los cuatro puntos, llamando x, y, z .. x''', y''', z''' á sus coordenadas. Se tiene en virtud de una fórmula conocida las relaciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l}m=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\\n=\sqrt{(x-x'')^2+(y-y'')^2+(z-z'')^2}\\.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\end{array}\right\}5.^a$$

cuyos valores puestos en la ecuacion 4.ª la trasforman en la siguiente:

$$\varphi(x, y, z...)=\mathrm{L}=\text{constante},\ 6$$

que da la condicion de enlace por medio de una relacion especial entre las coordenadas rectangulares.

Observemos ahora, que en cada una de las seis líneas m, n.., y aplicadas en los puntos A, B, C y D, hay fuerzas iguales y contrarias que se hacen equilibrio sobre el sistema. En el punto A, por ejemplo, en el cual terminan las longitudes m, n y p, habrá tres fuerzas aplicadas; si encontramos su resultante y hacemos una cosa análoga en los demas puntos, tendrémos cuatro fuerzas P, Q, R y S obrando en ellos, y que se hacen equilibrio sobre el sistema. Vamos á calcular la expresion analítica de P, por ejemplo, y tendrémos resuelto el problema que nos proponiamos.

Si el sistema de los cuatro puntos está en equilibrio bajo la accion de las fuerzas P, Q, R y S, lo estará tambien si fijamos en el espacio tres de ellos, sean éstos los B, C y D. En esta hipótesis el A será el único que podrá moverse, y las longitudes m, n y p en la ecuacion 4.ª, y x, y, z, en la 6.ª, serán las solas variables de la cuestion. Ahora bien; si las coordenadas de A tienen que satisfacer á la ecuacion 5.ª, este punto tendrá que permanecer forzosamente en todos sus movimientos, si es que los tiene, sobre una superficie, lugar geométrico de la expresada ecuacion.

Pero si, por el contrario, como sucede en esta hipótesis, el punto está en equilibrio y no se tienen en cuenta los rozamientos, la fuerza P debe ser normal á la superficie de que se trata. En este caso las componentes de la P en sentido de los ejes serán:

$$P_x = \lambda \frac{dt}{dx}; \quad P_y = \lambda \frac{dt}{dy} \text{ y } P_z = \lambda \frac{dt}{dz},$$

puesto que $\frac{dL}{dx}$, $\frac{dL}{dy}$ y $\frac{dL}{dz}$ son proporcionales á los cosenos que forma la normal á la superficie con los ejes coordenados. El valor de la fuerza P será por lo tanto

$$P = \lambda \sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz}\right)^2},$$

y para las demas se tendrán fórmulas análogas.

Para que esta demostracion sea rigorosa, nos es preciso hacer ver que la recíproca es verdadera; es decir, que si aplicamos en los vértices del tetraedro estas fuerzas, el sistema quedará en equilibrio.

Para esto hallarémos las componentes de las fuerzas en sentido de las rectas m, n... y harémos ver que son iguales dos á dos y dirigidas en sentidos contrarios.

La componente de P en la direccion de m se halla proyectando las fuerzas $\lambda \frac{dL}{dx}$, $\lambda \frac{dL}{dy}$ y $\lambda \frac{dL}{dz}$ sobre esta recta; pero los cosenos que forma con los ejes son:

$$\frac{dx}{dm}, \frac{dy}{dm} \text{ y } \frac{dz}{dm}.$$

luego la componente que buscamos será

$$\lambda \left(\frac{dL}{dx} \frac{dx}{dm} + \frac{dL}{dy} \frac{dy}{dm} + \frac{dL}{dz} \frac{dz}{dm} \right)$$

igual evidentemente á

$$\lambda \frac{dL}{dm};$$

y como idéntico valor, encontrarémos en el otro extremos; de aquí que sea cierto lo que deseábamos demostrar.

(2) Supongamos ahora que el número de puntos exceden de cuatro, sea h; el sistema estará completamente definido, si conocemos $3h-6$ distancias mutuas. Evidentemente, tomemos tres puntos como base comun de una serie de tetraedros cuyos vértices sean todos los demas que forman el sistema; la posicion respectiva de estos puntos estará conocida desde el momento en que lo sean todas las aristas de estas pirámides. Calculemos su número: hay, segun hemos construido, $h-3$ tetraedros, y por lo tanto, $(h-3)3$ aristas que terminarán en los vértices, y $3h-6$, teniendo en cuenta las tres de la base comun.

Si en la ecuacion de condicion del sistema entran mayor número de líneas que $3n-6$, habrá rectas supérfluas, que podrémos eliminar por por medio de las condiciones geométricas del sistema.

Establecido esto, vamos á demostrar, como anteriormente, que las fuerzas que obran en sentido de las líneas de union están representadas por las derivadas del primer miembro de la ecuacion de enlace, con respecto á las longitudes m, n, p, etc. Supongamos el sistema en equilibrio: se sabe que sin alterarle podemos suponer rígidas todas las rectas m, n, p... etc., ménos seis que formen una de las pirámides. En este caso todas las fuerzas serán destruidas, ménos las que están dirigidas segun estas últimas, que continuarán haciéndose equilibrio sobre el sistema sin el auxilio de las demas. De lo expuesto anteriormente resultará que los valores de estas fuerzas serán:

$$\lambda \frac{dF}{dm}, \lambda \frac{dF}{dn}, \lambda \frac{dF}{dp} \ldots\ldots \text{ etc.}$$

como se deseaba demostrar.

Segundo caso. Que el número de ecuaciones de enlace sea mayor de uno.

Supongamos que las ecuaciones que ligan las distancias mutuas de los puntos sean

$$F(m, n, p \ldots) = \text{constante} = L$$
$$f(m, n, p \ldots) = \text{constante} = M$$

Si el sistema de cuerpos estuviera tan sólo sujeto á la primera de las ecuaciones de enlace, entónces las componentes de las fuerzas estarian representadas por las expresiones:

$$\lambda \frac{dF}{dm}, \lambda \frac{dF}{dn}, \ldots \ldots \text{ etc.}$$

Si, por el contrario, la que subsiste fuera la segunda, las componentes serian

$$\mu \frac{df}{dm}, \mu \frac{df}{dn}, \ldots \ldots \text{ etc.}$$

y así sucesivamente para cada una de las otras.

Es evidente que si aplicamos de una vez todos estos grupos reunidos, habrá equilibrio en el sistema de cuerpos, puesto que existe para cada uno en particular; pero puede ocurrir la duda de si este sistema total de fuerzas es el único que puede hacerse equilibrio sobre el conjunto de cuerpos que se nos ha dado; de si la accion simultánea de enlaces que representan las ecuaciones de condicion, no haria suceptible al sistema de desarrollar otras resistencias, que las que provienen de la reunion de las resistencias parciales. Vamos á demostrar que esto no es posible.

Supongamos, para simplificar la cuestion, que son tres las ecuaciones de enlace, el raciocinio sería idéntico si su número fuese mayor; sean éstas

$$F(m, n, p. \;\; . \;\; . \;\; . \;) = C$$
$$f(m, n, p. \;\; . \;\; . \;\; . \;) = C'$$
$$\varphi(m, n, p. \;\; . \;\; . \;\; . \;) = C''$$

que ligan las distancias m, n, p, etc.

Sean M, N, P, Q, R y S las fuerzas encontradas combinando las acciones parciales, vamos á hacer ver que todo otro grupo de fuerzas, que se haga equilibrio sobre el sistema, tiene que confundirse necesariamente con el primero, dando valores convenientes á las indeterminadas λ, μ, v.., etc.

Supongamos que existe un segundo grupo de fuerzas M', N', Q', R' y S' que se hacen equilibrio sobre el sistema y distinto del primero. Como en la cuestion de que se trata tenemos tres indeterminadas á nuestra disposicion, hagamos, dando valores convenientes á estas últimas, que tres de las del primer grupo sean iguales á otras tres de las del segundo; sean, por ejemplo:

$$M' = M, \; N' = N \text{ y } P = P'.$$

Sean α, β, γ... las diferencias que necesariamente han de existir entre las demas fuerzas de ambos sistemas; se tendrá, pues,

$$Q' = Q + \alpha; \; R' = R + \beta \text{ y } S' = S + \nu \ldots \text{ etc.}$$

En este supuesto el segundo grupo se puede poner bajo la forma

$$M, N, P, Q+\alpha, R+\beta, S+\nu \ldots \text{ etc.},$$

y como las fuerzas M, N, P... se hacen equilibrio sobre el sistema, las podrémos suprimir, y sólo quedarán las fuerzas

$$o, o, o, \alpha, \beta, \nu \ldots$$

obrando sobre las líneas

$$m, n, p, q, r. s \ldots$$

Ahora bien, si estas fuerzas, como hemos hecho ver, están en quilibrio, tambien lo estarán, si añadimos nuevas condiciones de enlace ó fijeza. Supongamos, pues, que se hacen invariables las rectas r, s..., etc., y en esta hipótesis se destruirán todas las fuerzas que obran sobre ellas, no quedando en el sistema más líneas variables que m, n, p y q. Mas sobre las tres primeras no obra fuerza alguna; luego su accion sobre el conjunto es nula; por el contrario, en la línea q, de longitud variable, obran dos fuerza iguales á β, que no podrán de ninguna manera hacerse equilibrio, á ménos que $\beta = o$ ó $R = R'$; y lo mismo podiamos decir de las demas; luego el segundo grupo está encerrado en el primero.

En vista, pues, de lo expuesto, podemos decir, que las componentes de las fuerzas que se hacen equilibrio sobre el sistema, cuando está sujeto á varias ecuaciones de enlace, tienen las expresiones generales siguientes:

$$\lambda \frac{dF}{dx} + \mu \frac{df}{dx} + \mu \frac{d\varphi}{dx} + \ldots \ldots$$
$$\lambda \frac{dF}{dy} + \mu \frac{df}{dy} + \mu \frac{d\varphi}{dy} + \ldots \ldots$$
$$\lambda \frac{dF}{dz} + \mu \frac{df}{dz} + \mu \frac{d\varphi}{dz} + \ldots \ldots$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

cantidades idénticas á las que están encerradas en los paréntesis de la ecuacion 3.ª

Tercer caso. Hasta aquí hemos supuesto que las ecuaciones de enlace, ó son funciones de las distancias mútuas de los puntos de aplicacion de las fuerzas, ó son las que resultan de poner en las anteriores en lugar de m, n... etc., sus valores por medio de x y z..., etc.

Vamos á suponer ahora que las ecuaciones de condicion, son funciones cualesquiera entre las coordenadas de los puntos.

Supongamos un sistema de h puntos ligados por ecuaciones de condicion de la forma anteriormente indicada, y admitamos que las fuerzas aplicadas sobre él se hacen equilibrio. Es evidente que éste no se alterará, si elegimos en el espacio tres puntos fijos y los unimos al sistema por medio de pirámides que tengan sus vértices en los puntos de éste y sus bases en el triángulo formado por aquéllos. Siendo h el número de puntos que forman el sistema, las aristas de los tetraedros serán $3h$, unidas con las coordenadas primitivas por las ecuaciones siguientes:

$$m = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}$$
$$n = \sqrt{(x'-\alpha)^2 + (y'-\beta)^2 + (z'-\gamma)^2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

su número de $3h$.

Si entre estas ecuaciones y las primeras de condicion eliminamos las coordenadas del sistema, las expresiones de enlace serán funciones de las distancias de los puntos del sistema á los fijos, y como el conjunto de cuerpos que se consideran están en equilibrio, la cuestion entra en el caso general sin modificacion, y por lo tanto las componentes de las fuerzas que se hacen equilibrio sobre el sistema tendrán la forma general anteriormente encontrada. Con esto queda, pues, demostrado que las expresiones encerradas en los paréntesis de la ecuacion 3.ª son lo que habiamos enunciado.

Llamemos, pues, X, Y, Z... etc., á estas cantidades, y la ecuacion 3.ª se trasformará en

$$X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + \ldots\ldots = 0; \quad (\alpha)$$

llamemos, por último, P á las resultantes de X, Y y Z, y se tendrá evidentemente

$$X\frac{dx}{dt} + Y\frac{dy}{dt} + Z\frac{dz}{dt} = P\frac{ds}{dt}\cos Ps$$

Como se comprueba fácilmente dividiendo los dos miembros de la expresion anterior por $P\frac{ds}{dt}$

Introduciendo esta condicion en la ecuacion α se trasforma finalmente en

$$P\frac{ds}{dt}\cos Ps + p'\frac{ds'}{dt}\cos P's \ldots\ldots = 0$$

que demuestra nuestro teorema.

Colorario. Si llamamos $\frac{ds}{dt}\cos Ps = \frac{\delta p}{dt}$; $\frac{ds'}{dt}\cos P's = \frac{\delta p'}{dt}$..., etc., la ecuacion anterior se traforma en

$$P\frac{\delta p}{dt} + P'\frac{\delta p'}{dt} \ldots\ldots = 0,$$

y si ahora multiplicamos ambos miembros por dt, con objeto de sustituir á las velocidades proyectadas espacios recorridos en tiempos infinitamente pequeños, se tendrá

$$P\,\delta p + P'\,\delta p' \ldots = 0;$$

fórmula que la podemos traducir de la manera siguiente:

Si un cierto número de cuerpos que forman un sistema se mueven en el espacio, de tal manera que los caminos recorridos por ellos no alteran sus recíprocos enlaces, la suma de los productos de las fuerzas que en un instante dado se harian equilibrio sobre el sistema, por los espacios recorridos por los cuerpos en un tiempo infinitamente pequeño, proyectados sobre las direcciones de las fuerzas, es igual á cero.

Corolario segundo. Este teorema se puede aplicar lo mismo á los sistemas en equilibrio que á aquellos que están en movimiento, suponiendo en los primeros que la posicion que se considera es aquella con quien coincide el sistema que primitivamente estaba en movimiento en un instante dado.

E. DE ECHEGARAY.

TABLAS

DE EQUIVALENCIAS DE GRADOS Y MINUTOS

CENTESIMALES A SEXAGESIMALES Y VICE-VERSA.

Á LOS SRES. INGENIEROS Y AYUDANTES DE CAMINOS, MINAS Y AGRÓNOMOS.

La division dada á los limbos de los instrumentos topográficos modernos en grados centesimales, y la necesaria aplicacion de problemas y operaciones calculadas ya para el sistema de grados sexagesimales, así como el empleo simultáneo de instrumentos que tengan las dos clases de divisiones, hacen necesario el uso de estas tablas, evitándose en cada caso la operacion de buscar la equivalencia, que ocupa un tiempo siempre precioso para los que se dedican á esta clase de trabajos.

Para evitar esta pérdida de tiempo he calculado estas facilísimas tablas, cuyo mérito es sólo el buen deseo de que sean útiles á aquellos á quienes las dedico.

JOSÉ ANTONIO CORRAL.