productos de que es susceptible, pudiera intentarse con el debido conocimiento de causa su enajenacion ó venta, bien á la Comunidad de regantes que ha debido y debe formarse, bien á los particulares á quienes en su defecto pudiera convenir la adquisicion.

La solucion que precede se funda principalmente en el gran interés que existe de asegurar la pronta y completa terminacion del Canal á que nos referimos; mas si á pesar del expresado interés y de no poderse mirar como onerosa para el Estado la conservacion y explotacion directa de la seccion construida, se examina la conveniencia pública que puede reportar la enajenacion inmediata de dicha seccion construida, desde luégo se comprenderá que, aparte de implicar tal enajenacion la renuncia á la terminacion de la obra con las atendibles ventajas que de ella se esperan fundadamente, por la casi seguridad que existe de que los capitales particulares no se dediquen en mucho tiempo á su conclusion, sería punto ménos de imposible que el Gobierno obtuviera de la enajenacion la cantidad que abonara al concesionario para adquirirla; por cuyas razones, y como además se verifica que la conservacion y explotacion por cuenta del Estado de la referida seccion ha de llevarse siempre á cabo de la manera más ordenada y perfecta, sin mira alguna de monopolio ni padrinazgos injustificados, y del modo más conveniente y económico para los regantes interesados, miéntras que la explotacion de la obra por cualquier particular, que ante todo y sobre todo habría de encaminarse á realizar los mayores beneficios posibles, daría por resultado el monopolio de los intereses más vitales de la comarca con las graves consecuencias que de ello pudieran seguirse, estimamos, en su consecuencia, que la citada enajenacion no puede convenir al Estado, ni á la comarca y regantes interesados.

J. Martinez Villa.

GEOMETRÍA. (1)

ARTICULO CUARTO.

PUNTOS EN INVOLUCION.

Núm. 35. *Definicion.*—Imaginemos sobre una recta XX un sistema de puntos a, b, c . . . . . , a', b', c' . . . . . , ya en número finito y *par*, pero cuando ménos igual á seis, ya en número infinito, distribuidos de una manera discontinua, ó variando por la ley de la continuidad. Supongamos

(1) Véanse los números 2.º, 4.º, 6.º, 7.º, 8.º y 9.º de la Revista de este año.

además que dichos puntos se corresponden dos á dos recíprocamente, es decir, al punto a el a', y recíprocamente al a' el punto a, al punto b el b' y al b' el b, etc.: el sistema queda de este modo dividido en *pares ó grupos binarios* de puntos recíprocamente conjugados.

Un sistema de esta clase se dice que está en *involucion*, cuando cuatro puntos cualesquiera de la série $a, b, c \ldots\ldots, a', b', c' \ldots\ldots$, tienen la misma relacion anarmónica que los cuatro puntos conjugados. Por ejemplo:

$$R_{anar}\,(d, e, a, f) = R_{anar}\,(d', e', a', f')$$

$$R_{anar}\,(d, e, a', f') = R_{anar}\,(d', e', a, f)$$

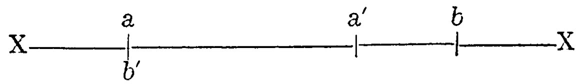
$$R_{anar}\,(a, a', b, d') = R_{anar}\,(a', a, b', d),$$

y otras combinaciones que pueden formarse.

Núm. 36. Tratemos de demostrar la posibilidad de este sistema.

Imaginemos sobre la recta XX (fig. 9.ª) dos sistemas *homográficos*,

Fig. 9.ª

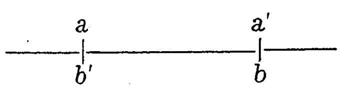


compuestos de un número finito ó infinito de puntos.

Supongamos que coinciden dos puntos a y b' de ambos sistemas, lo que es hipotético, si los puntos son discontínuos; pero se verificará forzosamente si los sistemas son contínuos, porque en este caso, cada punto es necesariamente *doble*.

Ahora bien; si determinando: 1.°, el punto a' del segundo sistema conjugado del a que pertenece al primero; 2.°, el punto b del primero conjugado del b' perteneciente al segundo; ambos puntos a' y b coinciden; los dos puntos únicos que resultan (ab') $(a'b)$ (fig. 10), serán conjugados recí-

Fig. 10.

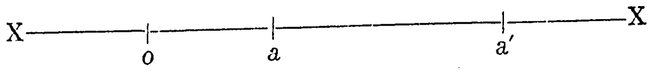


procos.

Y si de este modo se agrupan dos á dos todos los puntos de ambos sistemas homográficos, el sistema que resulte cumplirá con las condiciones de la involucion, puesto que la relacion anarmónica de cuatro puntos cualesquiera, deberá ser igual á la de sus conjugados. Además, queda demostrado de esta manera que todo sistema en involucion no es otra cosa que la exacta superposicion de dos sistemas homográficos.

Veamos cuál es la condicion á que deben satisfacer los coeficientes de la ecuacion de homografía para que puedan existir sobre la recta XX (figura 11) puntos en *involucion*.

Fig. 11.



Para ello es preciso que si $x = a$, $x' = a'$, satisfacen á la ecuacion de homografía

$$A + Bx + Cx' + Dxx' = 0,$$

$x = a'$, $x' = a$, satisfagan tambien á dicha ecuacion, sean cuales fueren a y a'. En efecto, las ecuaciones $x = a$, $x' = a'$, determinan los puntos a y a', como perteneciendo a al primer sistema y a' al segundo; y por el contrario, $x = a'$, $x' = a$, determinan, a' como punto del primer sistema, y a como punto del segundo, es decir, que en a coinciden dos puntos, uno de cada sistema, y en a' los conjugados de dichos puntos. Tendremos, pues,

$$A + Ba + Ca' + Daa' = 0$$
$$A + Ba' + Ca + Da'a = 0,$$

y restándolas

$$B(a - a') + C(a' - a) = 0,$$

ó bien

$$(B - C)(a - a') = 0.$$

Para que esta condicion se verifique independientemente de a y a', es necesario que se tenga $B = C$ (1).

Recíprocamente, si se verifica la condicion (1), cada dos puntos de un sistema coincidirán en órden inverso con el par de puntos conjugados del otro, es decir, que $x = a$, $x' = a'$; y $x = a'$, $x' = a$, satisfarán á la ecuacion de homografía. En efecto; esta ecuacion se convierte en este caso en

$$A + B(x + x') + Dxx' = 0,$$

ecuacion simétrica en x y x'; y ya se suponga $x = a$, $x' = a'$, ya $x = a'$, $x' = a$, siempre se tendrá

$$A + B(a + a') + Daa' = 0.$$

En resúmen:

1.° Siempre pueden concebirse sobre una recta XX dos sistemas homográficos, tales que, dividiendo uno de ellos en grupos dobles de puntos, cada dos de éstos coincidan recíprocamente con los conjugados del otro sistema.

2.° Los sistemas en *involucion* son siempre posibles.

3.° La expresion general de la involucion es

$$A + B(x + x') + Dxx' = 0.$$

Núm. 37. Esta ecuacion puede simplicarse por un cambio de orígen, haciendo desaparecer el segundo término.

Al efecto, despues de sustituir en lugar de x, $x_1 + a$, y en vez de x', $x'_1 + a$ (siendo a una indeterminada abcisa del del nuevo orígen), resulta

$$A + B.\,2a + Da^2 + (B + Da)(x_1 + x'_1) + Dx_1\,x'_1 = 0;$$

haciendo $B + Da = 0$, y representando la parte independiente por A, se tendrá para expresion abreviada de la *involucion*

$$A + Dxx' = 0 \qquad \text{(I)}.$$

Núm. 38. Y en efecto, los puntos determinados por dicha ecuacion satisfacen á las condiciones que han servido para definir la involucion:

1.° A cada valor $x = a$ —, valor que determina sobre la recta XX un punto a' —, corresponde otro valor $x' = -\frac{A}{Da} = a'$, que determina á su vez un punto a' sobre dicha recta XX; pero recíprocamente, cuando x tome el valor a', el valor de x' será $x' = -\frac{A}{Da'} = a$; luego al punto a' corresponde el punto a, y por lo tanto, los puntos a y a' son recíprocamente conjugados.

2.° La relacion anarmónica de cuatro puntos cualesquiera, es igual á la de sus conjugados. Sean cuatro valores de x

$$x = a;\; x = b;\; x = c;\; x = d.$$

Los cuatro puntos conjugados que corresponderán á dichos valores deducidos de la ecuacion (I), son

$$x' = -\frac{A}{Da};\; x' = -\frac{A}{Db};\; x' = -\frac{A}{Dc};\; x' = -\frac{A}{Dd}.$$

La relacion anarmónica del primer grupo será

$$\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b},$$

segun hemos visto en el artículo 1.° de estos apuntes.

La relacion correspondiente de los puntos del segundo grupo será

$$\frac{-\frac{A}{Dc}+\frac{A}{Da}}{-\frac{A}{Dc}+\frac{A}{Db}} : \frac{-\frac{A}{Dd}+\frac{A}{Da}}{-\frac{A}{Dd}+\frac{A}{Db}} =$$

$$\frac{\frac{c-a}{ca}}{\frac{c-b}{cb}} : \frac{\frac{d-a}{da}}{\frac{d-b}{db}} = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}.$$

Luego la relacion anarmónica del segundo grupo es igual á la del primero, y la ecuacion

$$A + Dxx' = 0,$$

cumple con las condiciones establecidas para la *involucion*.

Núm. 39. Dicha ecuacion nos permitirá (una vez determinados los valores de los coeficientes A y D), el hallar uno ó varios puntos que estén en involucion con los puntos dados para fijar el sistema y determinar dichos coeficientes.

Para esto, sean dos puntos a y a', cuyas abcisas ó distancias á un punto fijo o, son tambien a y a'. Sustituyendo estos valores en la ecuacion (I) se tiene

$$A + Daa' = 0,$$

de donde

$$\frac{A}{D} = -aa',$$

que sustituido en la ecuacion (I) puesta en la forma

$$\frac{A}{D} + xx' = 0,$$

determinará esta relacion, de suerte que á cada valor de x ó de x' que se asigne, resultará el otro valor conjugado de x' ó de x, estando en involucion con los anteriores a y a'.

Así, por ejemplo, una vez determinados *seis* puntos que satisfagan á dicha ecuacion, sustituyendo el valor de la abcisa de un *sétimo* punto, se deducirá el valor de la de un *octavo* punto conjugado, y en *involucion* con los *siete*.

(Se *continuará*.)

B. D.