la posicion que en el citado plano se indica y que se detalla bajo el epígrafe *Posicion normal de las señales, agujas y cerrojos*, cuadro B, debiendo llamar la atencion sobre la nota que explica ó aclara la posicion que ordinariamente han de ocupar las palancas números 9 y 11, que maniobran los cerrojos de las agujas números 8 y 12.

Entre los estados que se acompañan, se presenta marcado con la letra C, un cuadro que manifiesta los *Movimientos que pueden efectuar los trenes* sobre la bifurcacion y cruce á nivel; en dicho cuadro la primera columna señala con un número cada movimiento; la segunda le describe, y la tercera indica las palancas que hay que maniobrar, y el órden correlativo en que esta maniobra se ha de ejecutar para permitir cada movimiento.

Es evidente que varios de estos movimientos pueden simultanearse entre sí, segun indica el *Cuadro* D *de movimientos simultáneos*, no debiendo simultanearse nunca más de dos, áun cuando en alguna ocasion fuera realmente posible simultanear tres, segun se indica al pié del cuadro citado.

Finalmente, entre los documentos que constituyen este proyecto, presentamos el *Cuadro* E *de los enclavamientos*, que es el más importante de todos, porque en él se hallan indicadas las combinaciones ó dependencias mecánicas que existen entre las diferentes palancas que constituyen el puesto, y que son las destinadas á realizar los enclavamientos que han de garantir ó asegurar el libre paso de los trenes.

(*Se concluirá.*)

GEOMETRÍA. (1)

CONTINUACION DEL ARTICULO CUARTO.

PUNTOS EN INVOLUCION.

Núm. 40. Existe una diferencia radical entre el caso de la *homografía* y el de la *involucion*.

En la *homografía*, los puntos distribuidos sobre la recta XX forman dos séries: 1.ª, $a, b, c \ldots\ldots$, 2.ª, $a', b', c' \ldots\ldots$; y cada grupo, cuya relacion analítica se determine para igualarla á la del grupo formado por los puntos conjugados, deberá estar compuesto de puntos pertenecientes á una misma série, por ejemplo, a, b, c, d; ó d, f, e, a, etc.; así como en el grupo conjugado sólo deberán entrar puntos de la segunda série, por

(1) Véase el número último de la REVISTA de este año.

ejemplo, a', b', c', d'; ó d', e', f', a', etc. Nunca, segun esto, podrán compararse dos grupos como los siguientes:

$$R_{anar}\,(a, b, e', c') = R_{anar}\,(a', b', e, c).$$

En la involucion sucede lo contrario: la limitacion desaparece, y en cada grupo pueden entrar á la vez puntos de uno y otro sistema, por ejemplo:

$$R_{anar}\,(a, e', c, d) = R_{anar}\,(a', e, c', d').$$

La razon de esta diferencia consiste: en que las dos séries, 1.ª, a, b, c . . . . . , 2.ª, a', b', c' . . . . . , no indican en la involucion puntos de uno ú otro sistema homográfico, sino de ambos á la vez. Cada punto es doble; en él están al mismo tiempo un punto del primer sistema y otro del segundo; y así, por ejemplo, las cuatro letras a, e', c, d' de un grupo, indican puntos de un mismo sistema, á pesar de tener unas letras acento y otras no.

Así la notacion adoptada en la involucion, es esencialmente distinta de la que hemos establecido para la homografía. En ésta, los *acentos* sirven para distinguir los puntos de un sistema de los del otro; en la involucion, dos letras iguales, una con acento, otra sin él, sirven para agrupar dos puntos conjugados dentro de cada sistema.

Núm. 41. Hemos demostrado, que la expresion analítica más sencilla de la involucion es

$$xx' = -\frac{A}{D},$$

en la que $-\frac{A}{D}$ es una constante: representándola por m, tendremos

$$xx' = m.$$

De donde se deduce, que el *origen* de abcisas en este caso, es un punto conjugado con el infinito: en efecto, si hacemos

$$x = \pm\infty,$$

tendremos

$$x' = \frac{m}{\pm\infty} = 0;$$

y del mismo modo si sustituimos

$$x' = \pm\infty,$$

tendremos

$$x = \frac{m}{\pm\infty} = 0.$$

Este punto recibe el nombre de *centro de la involucion.*

Núm. 42. De la ecuacion $xx' = m$ se deduce el siguiente

Teorema.—El producto de las distancias del centro de la involucion á dos puntos conjugados cualesquiera, es constante.

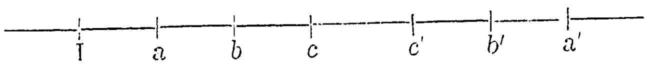
En efecto, x y x' son estas distancias, y su producto es igual á la constante m.

Es decir, que si I es el centro de involucion y

$$(a, a'); (b, b'); (c, c') \ldots\ldots;$$

pares de puntos conjugados, tendremos (fig. 12)

Fig. 12.



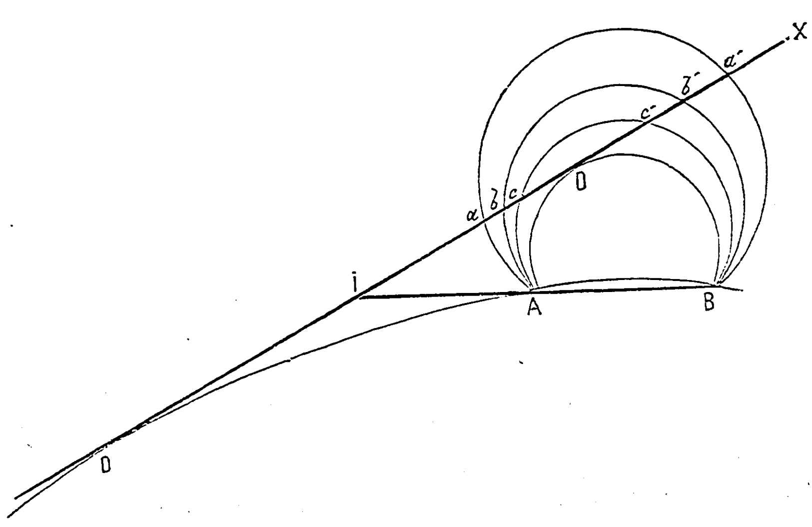
$$Ia \times Ia' = Ib \times Ib' = Ic \times Ic' = Id \times Id' = \ldots\ldots = m.$$

Esta propiedad es característica de los sistemas en involucion: es decir, que siempre que tengamos un sistema de puntos a, b, c . . . . . , a', b', c' . . . . . en número par, y formando pares ó grupos conjugados a, a'; b, b'; c, c' . . . . . ; en que los productos de las distancias de un punto fijo I á cada dos correspondientes sean iguales á una constante m, el sistema estará en *involucion*.

En efecto, la traduccion analítica de la propiedad precedente es la ecuacion $xx' = m$, que, como hemos visto, expresa la involucion de los puntos determinados por las variables x y x'.

Núm. 43. *Ejemplos de sistemas en involucion.*—Consideremos una série de círculos en número indeterminado, $aABa'$, $bABb'$, $cABc'$ . . . . . (fig. 13), que pasen por dos puntos fijos A y B; y cortemos este sistema por una recta XX. Resulta:

Fig. 13.



1.° Que los puntos a, a'; b, b'; c, c' . . . . . , constituyen un sistema en involucion.

2.° Que cada dos puntos conjugados resultan de la interseccion de un mismo círculo con la recta XX.

3.° Que prolongando la cuerda AB hasta que corte á XX el punto de interseccion I, será el centro de la involucion.

4.° Que trazando dos círculos ABD, ABD_1, que pasen por los puntos fijos A y B, y sean tangentes á la secante XX, los puntos de contacto D y D_1, serán los puntos dobles.

En efecto, por una propiedad de geometría, se sabe que

$$Ia \times Ia' = IA \times IB;\ Ib \times Ib' = IA \times IB;\ Ic \times Ic' = IA \times IB;$$

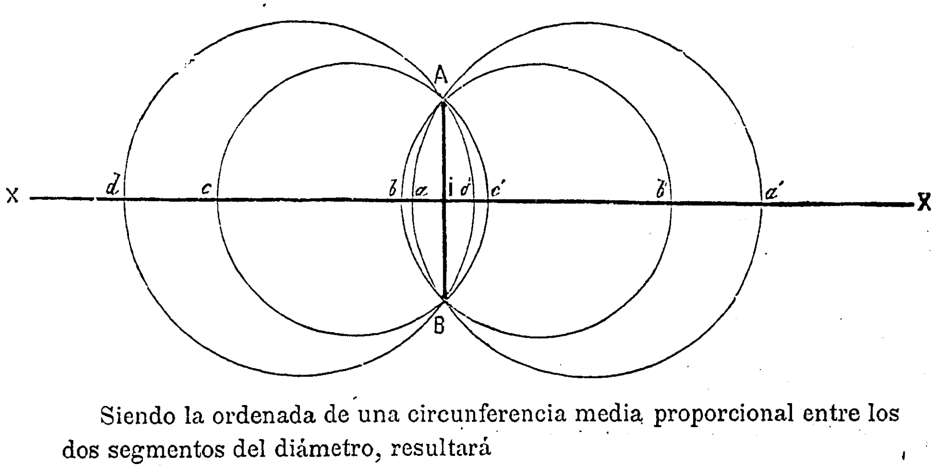
luego todos los primeros miembros son iguales á una constante.

Lo cual prueba (núm. 41), que el sistema a, b, c . . . . . , c', b', a', está en involucion; que a, a'; b, b'; c, c' . . . . . , son pares de puntos conjugados; y que I es el centro de la involucion.

Cuando el círculo variable llegue á una de las dos posiciones ABD, ABD_1, los puntos conjugados se habrán reunido en uno solo, D ó D_1, y serán, por lo tanto, los puntos dobles del sistema.

Segundo ejemplo.—Imaginemos una série de circunferencias AaBa', AbBb', AcBc', AdBd', pasando por dos puntos A y B, y sea XX la línea de los centros (fig. 14).

Fig. 14.



Siendo la ordenada de una circunferencia media proporcional entre los dos segmentos del diámetro, resultará

$$IA^2 = Ia \times Ia';\ IA^2 = Ib \times Ib';\ IA^2 = Ic \times Ic',$$

es decir, todos los productos iguales á una constante.

Luego los puntos d, c, b, a, $-$ d', c', b', a', forman un sistema en involucion; y el punto I es el centro de dicha involucion.

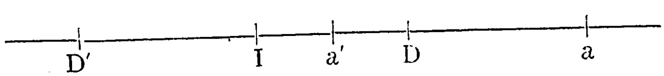
Núm. 44. Como los ángulos aAa', bAb', cAc' . . . . . , son rectos, se puede deducir que, *cuando un ángulo recto gira alrededor de su vértice, sus lados cortan á una recta fija en puntos que forman una involucion.*

Núm. 45. Segun se deduce por los anteriores ejemplos, en los que $IA \times IB$ y el cuadrado IA^2 pueden tomar valores arbitrarios, toda involucion puede resultar de figuras análogas á las (13) ó (14), pues siempre podrán trazarse una série de círculos tales, que cortados convenientemente den dicha involucion. Bastará para ello, — si los puntos A y B están dados, — tomar un punto I, tal que $IA \times IB$ sea igual á una constante m, y por dicho punto I trazar la secante: ó bien será suficiente tomar $IA = IB = \sqrt{u^2}$, y hacer pasar por los puntos A y B una série de circunferencias.

Núm. 46. En un sistema en involucion, los puntos dobles y cada par de puntos conjugados forman un sistema armónico.

En efecto, sean I el centro de involucion, D, D' los dos puntos dobles y a, a' dos puntos conjugados (fig. 15).

Fig. 15.



tendremos

$$ID^2 = Ia \times Ia'$$

ó bien

$$\frac{ID}{Ia} = \frac{Ia'}{ID};$$

de donde se deduce

$$\frac{ID + Ia}{Ia - ID} = \frac{Ia' + ID}{ID - Ia'};$$

y como $ID = ID'$

$$\frac{ID' + Ia}{Ia - ID} = \frac{Ia' + ID'}{ID - Ia'},$$

y segun resulta de la figura

$$\frac{aD'}{aD} = \frac{a'D'}{a'D},$$

que es lo que se quería demostrar.

(Se *continuará.*)

B. D.