

cendente y descendente, estén completamente libres entre las citadas estaciones.

DISPOSICIONES REFERENTES Á LA MARCHA DE LOS TRENES.

18. El maquinista de todo tren ó máquina sola, al pasar por la bifurcación ó atravesar el cruce á nivel, moderará la velocidad en los términos que previene el art. 75 del *Reglamento de Policía de los ferro-carriles de 8 de Setiembre de 1878*.

La parada de los trenes que encuentren el disco cerrado se hará deteniendo la máquina en el mismo disco, no poniéndose de nuevo en marcha hasta que la señal de alto haya desaparecido.

Los trenes procedentes de la línea de Tarragona, que encontrarán su disco principal próximamente un kilómetro antes del cruce á nivel, continuarán, sin embargo, con toda precaución su marcha hasta llegar al disco auxiliar, situado á solos 450 metros de dicho punto de cruceamiento, y junto al cual hará alto su máquina, emprendiendo de nuevo la marcha en cuanto sea cambiada la señal de alto por la de vía libre, lo cual les será indicado por el disco auxiliar, que reproducirá la misma señal del otro principal más avanzado, que habrá quedado detrás.

20. En caso de que se anuncien simultáneamente dos ó más trenes para su paso por la bifurcación y cruce á nivel, el *Agente del puesto* dará la preferencia á los reglamentarios sobre los extraordinarios; entre los reglamentarios, á los de viajeros sobre los de mercancías; y entre los de viajeros, á los express sobre los de correos; á éstos sobre los omnibus, que á su vez serán preferidos á los mixtos. Igualmente se dará la preferencia á todo tren sobre cualquiera máquina aislada, siempre que se pida al mismo tiempo al Agente encargado del puesto de palancas la vía para cruzar el paso á nivel dos trenes de la misma clase, uno de cada compañía, el citado Agente dará siempre la preferencia al tren de la línea de Zaragoza sobre la de Tarragona.

24. Cuando ocurriera alguna interrupción telegráfica en cualquiera de los aparatos de correspondencia de las cinco esta-

ciones con el puesto, los trenes harán alto al pie de los discos rojos colocados al efecto, desde cuyo punto se dirigirá al Jefe del tren á la cesta de los enclavamientos para pedir al encargado del puesto la vía correspondiente, marchando enseguida á ocupar su sitio en el furgón de cabeza para dar la señal de marcha tan luégo como vea desaparecer la de alto que los discos presentan.

22. El Agente llevará un registro, en el que inscribirá la hora de paso de todos los trenes, á cuyo efecto en la cesta habrá un reloj y los cuadros de marcha que rijan, tanto en la línea del Norte como en las de esta Compañía.

23. Esta Instrucción no deroga en lo más mínimo las prescripciones generales de los demás Reglamentos de la Compañía, ni pueden modificar en nada las disposiciones y Reglamentos del Gobierno.

ARTÍCULO ADICIONAL.

Además de los trenes generales, existen en la línea de Zaragoza á Barcelona otras discretionales de mercancías que circulan entre Barcelona y los Almacenes del Clot.

Estos trenes se anunciarán por *Barcelona-Norte al puesto*, como trenes de mercancías en la forma ya indicada.

Para que los *Almacenes del puesto* puedan anunciar igualmente al *puesto* el regreso de dichos trenes á *Barcelona-Norte*, se establecerán dos timbres eléctricos, uno en los *Almacenes*, y otro en la cesta del *puesto*. Cuando el tren deba regresar á *Barcelona-Norte*, los *Almacenes del Clot* lo avisarán al *puesto* por medio de dos golpes prolongados del timbre, cuya señal repetirá el *puesto* para acusar recibo.

En este momento ó cuando las circunstancias lo permitan, el *Encargado del puesto* abrirá el disco núm. 2, ó sea el del lado de Zaragoza, y como este disco está á la vista de los *Almacenes*, el Jefe del tren podrá dar la señal de marcha así que observe ó aperciba la de vía libre.

En caso de interrupción entre los timbres, se procederá como se indica en el artículo 21.

GEOMETRÍA. ⁽¹⁾

CONCLUSIÓN DEL ARTÍCULO CUARTO.

PUNTOS EN INVOLUCIÓN.

Núm. 47. *Problema.*—Definida una involución, ya por dos pares de puntos, ya por el centro y un par de puntos conjugados, hallar otro par cualquiera de puntos también conjugados.

(1) Véase el número último de la Revista de este año.

Primer caso.—Sean los dos pares de puntos dados a y a' , b y b' de la fig. 13. Se hacen pasar por dichos puntos dos circunferencias arbitrarias que se corten en dos puntos, A y B . Por estos puntos se hace pasar una tercera circunferencia arbitraria, $Acc'B$; los puntos de intersección con la recta XX serán puntos conjugados.

En efecto, tendremos

$$Ic \times Ic' = IA \times IB.$$

Pero

$$IA \times IB = Ia \times Ia';$$

luego

$$Ic \times Ic' = Ia \times Ia'.$$

De la misma manera podríamos hallar otros pares de puntos conjugados.

Segundo caso.—Sea I el centro de involucion y a y a' el par de puntos conjugados (fig. 14). Trazando una circunferencia, cAc' arbitraria por dichos puntos y cuyo centro esté sobre la recta XX , los puntos c y c' en que corte á dicha recta serán puntos conjugados; pues $AI^2 = cI \times c'I$ y $AI^2 = aI \times a'I$; luego $cI \times c'I = aI \times a'I = \text{constante}$.

Núm. 48. Con las mismas figuras y por medio de análogas construcciones, puede hallarse el punto conjugado de un punto c de la recta XX y perteneciente á un sistema de puntos en involucion. Bastará hacer pasar una circunferencia $cABC'$ por los puntos A , B y c ; su segundo punto de intersección con XX será el punto buscado c' ; ó más sencillamente: se une el punto A con el c , y levantando una perpendicular Ac' á la recta Ac , queda determinado el punto conjugado c' .

II.

HACES EN INVOLUCION.

Núm. 49. La manera más sencilla de estudiar y definir los haces en involucion, consiste en referirlos á los sistemas rectilíneos del mismo nombre.

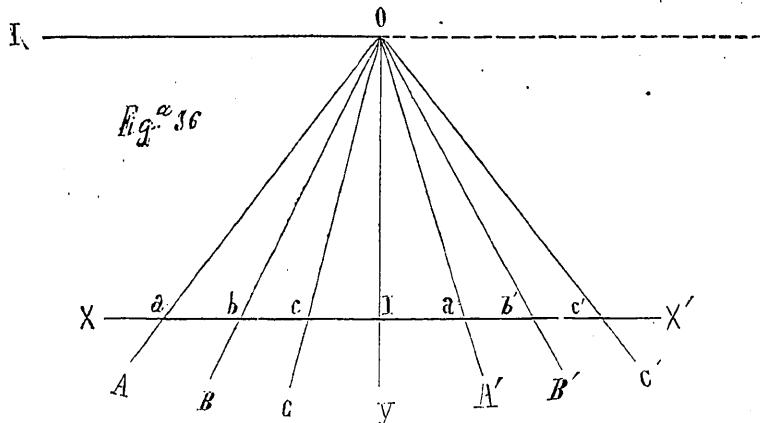
Sean $a, b, c, \dots, a', b', c'$ (fig. 16), un sistema de puntos en involucion y O un punto arbitrario exterior á la recta XX .

Si unimos dicho punto O á los $a, b, c, \dots, a', b', c'$, por las rectas $OA, OB, OC, \dots, OA', OB', OC', \dots$, el conjunto de rectas así trazadas formará un haz en involucion.

Observando:

- 1.º Que la definición de la involucion está basada en la igualdad de relaciones anarmónicas.

2.^o Que todo sistema en involucion es ó puede considerarse como el resultado de superponer dos sistemas homográficos.



3.^o Que la relación anarmónica de un haz de cuatro rectas iguales es la de los puntos de intersección de dicho haz por una secante, se deducen inmediatamente una serie de propiedades de los haces, análogas á las ya demostradas para los sistemas en involucion.

Núm. 50. 1.^o—En todo haz en involucion las rectas son reciprocamente conjugadas dos á dos. Por ejemplo: OA y OA', OB y OB', etc.

2.^o La relación anarmónica de cuatro rectas cualesquiera; por ejemplo: OA, OB, OC', OD', es igual á la de sus conjugadas, OA', OB', OC, OD; así:

$$\frac{\sin AOC'}{\sin AOD'} : \frac{\sin BOC'}{\sin BOD'} = \frac{\sin A'OC}{\sin A'OD} : \frac{\sin B'OC}{\sin B'OD}$$

3.^o Todo haz en involucion puede considerarse como la superposición de dos haces homográficos.

4.^o Las rectas conjugadas del haz son las que unen el punto O á pares de puntos conjugados sobre la recta XX; así, por ejemplo, la recta OI que une el vértice O al centro de la involucion es conjugada con la O ∞ paralela á la recta XX.

5.^o Cuando el sistema de puntos situados sobre la recta XX tiene puntos dobles, el haz correspondiente presenta rectas dobles, que son las que pasan por dichos puntos dobles.

6.^o Si se corta un haz en involucion por una recta resultará un sistema de puntos en involucion.

7.^o La ecuación que expresa la homografía de dos haces (núm. 27), expresará la involucion si suponemos N = P; tendremos, pues,

$$M + N (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha') + Q \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha' = 0$$

para condicion analítica de la involucion. Y en efecto, $\operatorname{tg} \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha'$ entran simétricamente en la fórmula y pueden cambiarse una por otra.

Núm. 51. Esta última relación puede simplificarse y convertirse en la forma

$$M' + Q' \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{tg} \alpha', = 0. \quad (I')$$

Esta expresión es análoga á la de la involucion rectilínea referida al centro, y puede deducirse inmediatamente.

En efecto, en la anterior (fig. 16) los puntos ($a, b, c, \dots, a', b', c', \dots$), estando en involucion se tiene $xx' = m$, representando por x y x' las abscisas de los puntos $a, b, c, a', b', c', \dots$; pero si representamos en general por δ y δ' los ángulos variables YOA, YOA', tendremos:

$$Ia = OI \times \operatorname{tg} \delta; \quad Ia' = OI \times \operatorname{tg} \delta',$$

ó bien

$$x = OI \times \operatorname{tg} \delta; \quad x' = OI \times \operatorname{tg} \delta'.$$

Sustituyendo los valores de x y x' en la ecuación $xx' = m$, se tendrá

$$OI^2 \operatorname{tg} \delta \times \operatorname{tg} \delta' = m, \text{ ó bien } \operatorname{tg} \delta, \operatorname{tg} \delta' = \frac{m}{OI^2} = \text{constante.}$$

Núm. 52. En la involucion las rectas están simétricamente distribuidas á un lado y otro de la recta OI; es decir, que al par de rectas conjugadas Oa, Oa' situadas á la derecha del eje OI, corresponde otro par de rectas Oc, Oc' conjugadas también, y formando con OI ángulos iguales á los que forman las primeras.

O tambien al par de rectas conjugadas Oa, Oa' situadas á distinto lado de OI corresponde otro par Oc, Oc' simétricamente colocado por relación al primero.

De modo que OI es un eje de figura del haz.

Existe un segundo eje OI₁ perpendicular al primero.

Contando los ángulos del haz con este segundo eje, se tiene $\operatorname{tg} \delta \times \operatorname{tg} \delta' = \frac{I}{m}$, inversa á la relación anterior; pero la involucion es del mismo género que la primera.

B. D.