Por consiguiente, conocido el número de milímetros que contienen las unidades de cada una de las escalas citadas, hallaremos por esta fórmula el de la regla AA', para emplazar las alturas de los triángulos. Así en el caso de la escala que hemos adoptado para el aparato, ó sea $0^m,002$, $n' = 2$, y por tanto, $N = n^2$, no habiendo, segun esto, más que tomar el cuadrado de la escala del polígono para deducir el de milímetros de la regla AA', donde hay que situar las alturas de los triángulos en cada una de las operaciones.

Finalmente, podría suceder que las escalas de las abscisas y ordenadas del polígono fueran distintas, y si las denominamos n_1 y n_2, la fórmula se convertiría en

$$N = \frac{2\, n_1\, n_2}{n'}$$

y para $n' = 2$

$$N = n_1 \times n_2.$$

La multiplicacion de estas unidades nos da, por tanto, la dimension buscada, resolviéndose así por completo el medio de aplicar nuestro instrumento al cálculo de las áreas, sea cualquiera su escala y la del polígono.

(*Se continuará*).

GEOMETRÍA.

ARTICULO QUINTO.

FIGURAS HOMOGRÁFICAS.

Núm. 53. Dos figuras se dice que son *homográficas* cuando cumplen con las siguientes condiciones:

1.ª Que á puntos y rectas de la una A, corresponden puntos y rectas en la otra A', y recíprocamente.

2.ª Que la relacion anarmónica de cada cuatro puntos en línea recta de la figura A, sea igual á la relacion anarmónica de los conjugados de A'.

3.ª Que la relacion anarmónica de cuatro rectas concurrentes de la primera, sea asimismo igual á la de las correspondientes de la segunda.

Núm. 54. Refiriendo la primera *figura A*, á un sistema de coordenadas *ox*, *oy*, y refiriendo asimismo la segunda A' á otro sistema *o'x'*, *o'y'*, cada punto a de la primera A, estará determinado por sus coordenadas

(x, y); y como á dicho punto a corresponde el a' de la *figura A'*, las coordenadas de éste $(x'\ y')$ serán funciones tambien de x é y. Es decir, que se tendrá

$$x' = f\,(x\ y);\ y' = \alpha\,(x\ y).$$

Además, á cada punto a de la *figura A* sólo corresponde un punto a' de la figura A'; de donde se deduce que las funciones f y α deben ser de tal naturaleza, que á cada sistema de valores (x, y) sólo debe corresponder un sistema de valores para x', y'.

Como las relaciones analíticas que ligan ambos sistemas suponemos que son algebráicas, se deduce que las funciones f y α deben ser racionales y algebráicas tambien, y en el caso más general de la forma

$$x' = \frac{\text{polinomio en } x,\, y}{\text{polinomio en } x,\, y}\ ;\quad y' = \frac{\text{polinomio en } x,\, y}{\text{polinomio en } x,\, y}\,.$$

Pero como á cada sistema de valores de (x, y) sólo debe corresponder uno para (x', y'), y á cada sistema de valores de este último grupo sólo debe corresponder uno para (x, y) las dos ecuaciones anteriores despues de quitar los denominadores, deben ser de primer grado en (x, y). Así tendremos

$$x' = \frac{a\,x + b\,y + c}{\alpha\,x + \beta\,y + \gamma}\ ;\quad y' = \frac{a'\,x + b'\,y + c'}{\alpha'\,x + \beta'\,y + \gamma'}\,.$$

Por otra parte, á las rectas del segundo sistema deben corresponder rectas en el primero, y sustituyendo en la ecuacion general de las líneas rectas del segundo sistema

$$\mathrm{A}x' + \mathrm{B}y' + \mathrm{C} = 0$$

los valores anteriores de x é y, tendremos

$$\mathrm{A}.\ \frac{a\,x + b\,y + c}{\alpha\,x + \beta\,y + \gamma} + \mathrm{B}.\ \frac{a'\,x + b'\,y + c'}{\alpha'\,x + \beta'\,y + \gamma'} + \mathrm{C} = 0,$$

para la ecuacion del *lugar geométrico* de la primera *figura A* que corresponde á la *recta* $\mathrm{A}\,x' + \mathrm{B}\,y' + \mathrm{C} = 0$ de la figura (A'); y como dicho lugar geométrico debe ser *una recta*, la ecuacion precedente deberá resultar de primer grado, lo cual exige que los denominadores

$$\alpha\,x + \beta\,y + \gamma,\quad \alpha'\,x + \beta'\,y + \gamma',$$

sean iguales.

Por lo tanto, las relaciones analíticas que enlazan las coordenadas x, y, x', y', en las *figuras homográficas* serán de la forma

$$x' = \frac{a\,x + b\,y + c}{\alpha\,x + \beta\,y + \gamma}\,; \quad y' = \frac{a'\,x + b'\,y + c'}{\alpha\,x + \beta\,y + \gamma}\,. \quad (1)$$

Núm. 55. *Recíprocamente:* Si las coordenadas de dos sistemas de puntos están enlazadas por las relaciones analíticas que hemos determinado, los dos sistemas *(x, y) (x′, y′)* ó abreviadamente (A) y (A′) serán homográficos, es decir, cumplirán con las tres condiciones fijadas para dichas figuras.

En efecto, quitando los denominadores en las ecuaciones (1) y ordenándolas con relacion á x é y, resulta

$$x\,(\alpha\,x' - a) + y\,(\beta\,x' - b) = -\,(\gamma\,x' - c),$$

$$x\,(\alpha\,y' - a') + y\,(\beta\,y' - b') = -\,(\gamma\,y' - c'),$$

y de estas,

$$x = \frac{(c\,\beta - b\,\gamma)\,y' + (b'\,\gamma - c'\,\beta)\,x' + (b\,c' - c\,b')}{(a'\,\beta - \alpha\,b')\,x' + (\alpha\,b - a\,\beta)\,y' + (a\,b' - b\,a')}$$

$$y = \frac{(a\,\gamma - c\,\alpha)\,y' + (c'\,\alpha - a'\,\gamma)\,x' + (a'\,c - a\,c')}{(\alpha'\,\beta - \alpha\,b')\,x' + (\alpha\,b - a\,\beta)\,y' + (a\,b' - b\,a')} \qquad (1')$$

cuya forma es idéntica á la de las ecuaciones. (1)

I. Luego á cada sistema de valores de x, y, sólo corresponde un sistema de valores para x', y' y recíprocamente á puntos de la *figura A′*, corresponden puntos en la figura A. Queda, pues, satisfecha la primera con dicion.

II. Además, la sustitucion de los valores de x', y' en la ecuacion

$$\mathrm{A}\,x' + \mathrm{B}\,y' + c = 0$$

demuestran que á las rectas de la *figura (A′)* corresponden rectas en la *figura A*, y recíprocamente, segun hemos visto en el párrafo anterior.

III. Sea $y = m\,x + n$ la ecuacion de una recta del sistema A sobre la cual hay situados cuatro puntos p_1, p_2, p_3, p_4, cuyas coordenadas designaremos por

$$(x_1\,,\ y_1);\ (x_2\,,\ y_2);\ (x_3\,,\ y_3);\ (x_4\,,\ y_4).$$

Los cuatro valores de y deberán satisfacer á la ecuacion $y = m\,x + n$; así las coordenadas de los puntos serán

$$(x_1\,,\ m\,x_1 + n);\ (x_2\,,\ m\,x_2 + n);\ (x_3\,,\ m\,x_3 + n);\ (x_4\,,\ m\,x_4 + n).$$

Si representamos por q_1, q_2, q_3, q_4, los cuatro puntos del sistema (A') correspondientes á los p_1, p_2, p_3, p_4, del (A) — (puntos que segun lo demostrado estarán en línea recta) tendremos:

$$\text{Abcisa del punto } q_1 \ldots\ldots x'_1 = \frac{a\,x_1 + b\,(m\,x_1 + n) + c}{\alpha\,x_1 + \beta\,(m\,x_1 + n) + \gamma} =$$

$$= \frac{(a + b\,m)\,x_1 + (b\,n + c)}{(\alpha\,x + \beta\,m)\,x_1 + (\beta\,n + \gamma)} = \frac{A\,x + B}{C\,x_1 + D},$$ representado por A, B,

C y D, los cuatro coeficientes últimos. Análogamente resultarían expresiones de la misma forma para las abcisas de los puntos q_2, q_3 y q_4.

Es decir, que los cuatro puntos p_1, p_2, p_3, p_4, estarían determinados por las abcisas x_1, x_2, x_3, x_4, y sus correspondientes en la segunda figura, lo estarían por fórmulas de la forma

$$\frac{A\,x + B}{C\,x + D},$$

sustituyendo en vez de x los valores x_1, x_2, x_3; x_4. Y segun vímos al tratar de la *homografía* (núm. 19). Dos puntos determinados por dichas fórmulas tienen la misma relacion anarmónica.

IV. Dos haces *correspondientes* en figuras homográficas, tendrán asimismo igual relacion anarmónica, pues cortándolos á ambos por secantes conjugadas, los puntos de interseccion serán *correspondientes*, y segun lo que acabamos de demostrar tendrán igual relacion anarmónica, y como ésta es la de los haces, éstos gozarán de igual propiedad.

Quedan, pues, demostrados que las figuras que se relacionen por medio de las fórmulas (1) serán *homográficas*.

Núm. 56. Las fórmulas generales de la *homografía* tienen nueve constantes; pero dividiendo por una de ellas los dos términos de cada quebrado, quedarán reducidas á ocho, y las ecuaciones tendrán la forma siguiente:

$$x' = \frac{a\,x + b\,y + c}{\alpha\,x + \beta\,y + 1}\;;\quad y' = \frac{a'\,x + b'\,y + c'}{\alpha\,x + \beta\,y + 1}\,. \qquad (2)$$

En virtud de estas fórmulas podemos resolver el siguiente *problema*: Dada una figura A y *cuatro puntos* de la figura A' homográfica de la primera, correspondientes á *cuatro puntos dados* de ésta, determinar todos los demás puntos de la segunda *figura A'*. Bastará para ello determinar las ocho constantes de las fórmulas (2).

Las coordenadas de los puntos dados de una y otra figura, deberán satisfacer á dichas ecuaciones.

Sean $(x_1\ y_1)$, $(x_2\ y_2)$, $(x_3\ y_3)$, $(x_4\ y_4)$ las coordenadas de los cuatro puntos de la figura (A) y sean $(x'_1\ y'_1)$, $(x'_2\ y'_2)$, $(x'_3\ y'_3)$, $(x'_4\ y'_4)$ las coordenadas de los cuatro puntos dados correspondientes de la figura (A').

Tendremos las ocho ecuaciones de condicion

$$x'_1 = \frac{a\,x_1 + b\,y_1 + c}{\alpha\,x_1 + \beta\,y_1 + 1}\,; \qquad y'_1 = \frac{a'\,x_1 + b'\,y_1 + c'}{\alpha\,x_1 + \beta\,y_1 + 1}\,;$$

$$x'_2 = \frac{a\,x_2 + b\,y_2 + c}{\alpha\,x_2 + \beta\,y_2 + 1}\,; \qquad y'_2 = \frac{a'\,x_2 + b'\,y_2 + c'}{\alpha\,x_2 + \beta\,y_2 + 1}\,;$$

$$x'_3 = \frac{a\,x_3 + b\,y_3 + c}{\alpha\,x_3 + \beta\,y_3 + 1}\,; \qquad y'_3 = \frac{a'\,x_3 + b'\,y_3 + c'}{\alpha\,x_3 + \beta\,y_3 + 1}\,;$$

$$x'_4 = \frac{a\,x_4 + b\,y_4 + c}{\alpha\,x_4 + \beta\,y_4 + 1}\,; \qquad y'_4 = \frac{a'\,x_4 + b'\,y_4 + c'}{\alpha\,x_4 + \beta\,y_4 + 1}\,;$$

de las cuales deduciremos los valores de las constantes a, b, c, a', b', c', α, β; y sustituidas en las fórmulas generales

$$x' = \frac{a\,x + b\,y + c}{\alpha\,x + \beta\,y + l}\,, \qquad y' = \frac{a'\,x + b'\,x + c'}{\alpha\,x + \beta\,y + l}\,,$$

tendremos determinada la figura (A'), puesto que para cada punto $(x_n\,,\ y_n)$ del sistema A, podremos deducir el correspondiente $(x'_n\,,\ y'_n)$ del sistema A' por las fórmulas

$$x'_n = \frac{a\,x_n + b\,y_n + c}{\alpha\,x_n + \beta\,y_n + 1}\,; \qquad y'_n = \frac{a'\,x_n + b'\,y_n + c'}{\alpha\,x_n + \beta\,y_n + 1}\,.$$

Observacion.—Si en las ecuaciones (2) se hace $\alpha\,x + \beta\,y + l = 0$, resulta $x' = \infty$, $y' = \infty$; luego *á los puntos de la recta* $\alpha\,x + \beta\,y + l = 0$, *del primer sistema, corresponden puntos situados en el infinito para el segundo.*

Núm. 57. Tambien puede observarse que las fórmulas para la trasformacion homográfica, son análogas á las fórmulas de trasformacion de *coordenadas cartesianas en trilineales*, pues como en éstas las coordenadas cartesianas x é y de la primera figura son iguales á una relacion de expresiones de primer grado con dos variables.

B. D.