mada con OG nos dará la base del triángulo, cuya altura es la Fa, hallándose ya el área por el procedimiento que sabemos.

Snpongamos ahora que se nos dan los datos obtenidos en el campo para un polígono y vamos á ver cómo se halla con el instrumento su área sin necesidad del trazado de la figura sobre el papel, considerando los dos casos ya mencionados, es decir, que los citados datos se hayan tomado por abscisas y ordenadas ó por sus ángulos y lados correspondientes.

Estudiemos un método práctico general para el primer caso, y con el citado objeto, fijémonos en la fig. 8.ª, así como en el procedimiento dado anteriormente para obtener el área de aquel polígono, del cual deduciremos el actual con suma facilidad.

*(Se continuará.)*

LEONCIO UBILLOS.

# GEOMETRÍA.

## ARTICULO SEXTO.

## FIGURAS CORRELATIVAS.

Núm. 58. Se llaman *figuras correlativas dos* figuras tales que á cada *punto* de la primera corresponde una *recta* en la segunda.

Para que esto se verifique, es preciso que los coeficientes de la ecuacion de la recta sean funciones de las coordenadas $x$, $y$ del punto correlativo á dicha recta.

De modo que si la ecuacion de la recta en la segunda figura es

$$Ax' + By' + C = 0,$$

se tendrá

$$A = a_1 x + a_2 y + a_3, \quad B = b_1 x + b_2 y + b_3, \quad C = c_1 x + c_2 y + c_3,$$

haciendo depender á los coeficientes A, B y C, de expresiones lineales en $x$ é $y$, determinándolas así de la manera más sencilla.

La ecuacion de la recta de la segunda figura correspondiente al punto $(x, y)$ de la primera, será

$$(a_1 x + a_2 y + a_3)\, x' + (b_1 x + b_2 y + b_3)\, y' + (c_1 x + c_2 y + c_3) = 0.$$

Esta recta se llama *polar* y el punto $(x\, y)$ es el *polo* de dicha recta.

Núm. 59. Cada punto $a$ del primer sistema tiene, pues, una polar $a'a'$ en el segundo.

Si fijamos sobre la polar $a'a''$ un punto $m'$, sus coordenadas $x'_m$ $y'_m$, deberán satisfacer á la ecuacion de la recta anterior, y tendremos

$$(a_1 x + a_2 y + a_3) x'_m + (b_1 x + b_2 y + b_3) y'_m + (c_1 x + c_2 y + c_3) = 0$$

ó bien

$$(a_1 x'_m + b_1 y'_m + c_1) x + (a_2 x'_m + b_2 y'_m + c_2) y + (a_3 x'_m + b_3 y'_m + c_3) = 0,$$

que es la ecuacion de una recta del primer sistema considerando á $x$ é $y$ como variables.

De suerte que al punto $m'$ de la recta $a'a''$ de la segunda figura corresponde una recta $mm$ (por ejemplo) de la primera figura, pasando por el punto $a$ de ésta, *correlativo* de la recta $a'a''$, que pasa por el punto escogido $m'$.

Núm. 60. Si en vez de considerar el punto $m'$ como perteneciendo á la recta $a'a''$, suponemos que pertenece á otra $b'b''$ cuyo polo sea $b$, las coordenadas $x_b$ $y_b$ de este punto, deben satisfacer á la ecuacion de su polar correlativa, y tendremos

$$(a_1 x_b + a_2 y_b + a_3) x' + (b_1 x_b + b_2 y_b + b_3) y' + (c_1 x_b + c_2 y_b + c_3) = 0.$$

A su vez esta ecuacion perteneciendo á una recta de la segunda figura pasando por el punto $m'$ de ésta, las coordenadas $x'_m$ $y'_m$ deberán satisfacerla, y se tendrá

$$(a_1 x'_m + b_1 y'_m + c_1) x_b + (a_2 x'_m + b_2 y'_m + c_2) y_b + (a_3 x'_3 + b_3 y'_m + c_3) = 0.$$

despues de ordenada con relacion á las coordenadas de la primera figura.

Pero esta ecuacion es la misma que la hallada anteriormente por la recta $mm$. Luego el punto $b$, polo de la recta $b'b''$, se halla tambien en la recta $mm$ que ya contenía el punto $a$ de la primera figura.

Y se ve que las rectas de la *primera figura* tienen por coeficientes en su ecuacion, funciones de las coordenadas $x'$ $y'$ de la *segunda figura*.

Así á cada punto del primer sistema corresponde una recta en el segundo, y á cada punto del segundo, una recta en el primero.

Y se deduce tambien que cuando dos rectas $a'a''$, $b'b''$ de un sistema pasan por un punto $m'$, sus polos $a$ y $b$ están en la recta $mm$ polar de dicho punto $m'$.

*O más general: si una recta $a'a''$ gira en uno de los dos sistemas alrededor de un punto $m'$, su polo $a$ se mueve sobre la polar de dicho punto.*

Núm. 61. De modo que dado un polo en uno de los sistemas, determina en seguida la polar en el otro sistema: basta para ello sustituir sus coordenadas $x$ é $y$, por ejemplo, en los valores de los coeficientes A, B, C, de la ecuacion de la polar, que de este modo se convertirán en coeficientes numéricos.

Núm. 62. Por el contrario, si se dá la ecuacion de la polar

$$px + qy + r = 0$$

del primer sistema, y que se quiere hallar su polo en el segundo sistema, bastará identificar la ecuacion precedente con la general

$$(a_1 x' + b_1 y' + c_1) x + (a_2 x' + b_2 y' + c_2) y + (a_3 x' + b_3 y' + c_3) = 0$$

de las polares del primer sistema.

Para esto debemos escribir las siguientes igualdades:

$$\frac{p}{r} = \frac{a_1 x' + b_1 y' + c_1}{a_3 x' + b_3 y' + c_3} ; \qquad \frac{q}{r} = \frac{a_2 x' + b_2 y' + c_2}{a_3 x' + b_3 y' + c_3} ;$$

de las que podemos deducir las coordenadas $x'$, $y'$ del polo.

Núm. 63. Para que la relacion de dos sistemas correlativos quede perfectamente determinada, es decir, para que dada una figura cualquiera en el *uno* se determine sin duda alguna la figura correspondiente en el *otro*, es necesario y suficiente que se conozcan las ocho constantes

$$\frac{a_1}{c_3}, \quad \frac{a_2}{c_3}, \quad \frac{a_3}{c_3}, \quad \frac{b_1}{c_3}, \quad \frac{b_2}{c_3}, \quad \frac{b_3}{c_3}, \quad \frac{c_1}{c_3}, \quad \frac{c_2}{c_3}$$

de la ecuacion general

$$(a_1 x + a_2 y + a_3) x' + (b_1 x + b_2 y + b_3) y' + (c_1 x + c_2 y + c_3) = 0.$$

De aquí resulta que dadas cuatro polares

A, B, C, D,

del primer sistema, y sus polos $a$, $b$, $c$, $d$ en el segundo, la relacion de ambos sistemas queda perfectamente definida.

En efecto, representando por

$$\left.\begin{aligned} p_1 x + q_1 y + r_1 &= 0 \\ p_2 x + q_2 y + r_2 &= 0 \\ p_3 x + q_3 y + r_3 &= 0 \\ p_4 x + q_4 y + r_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{las ecuaciones de las polares} \left\{\begin{aligned} &\text{A} \\ &\text{B} \\ &\text{C} \\ &\text{D}, \end{aligned}\right.$$

y por

$$\left.\begin{aligned} x_1\ y_1 \\ x_2\ y_2 \\ x_3\ y_3 \\ x_4\ y_4 \end{aligned}\right\} \text{las coordenadas de los cuatro polos } a, b, c, d,$$

tendremos (para que $a$ sea el polo de A) las ecuaciones siguientes: (número 62)

$$\frac{p_1}{r_1} = \frac{a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1}{a_3 x_1 + b_3 y_1 + c_3} ; \qquad \frac{q_1}{r_1} = \frac{a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2}{a_3 x_1 + b_3 y_1 + c_3}$$

y del mismo modo para que $b$, $c$ y $d$ sean los polos de B, C y D, deberán verificarse las seis ecuaciones de condicion:

$$\frac{p_2}{r_2} = \frac{a_1 x_2 + b_1 y_2 + c_1}{a_3 x_2 + b_3 y_2 + c_3} ; \qquad \frac{q_2}{r_2} = \frac{a_2 x_2 + b_2 y_2 + c_2}{a_3 x_2 + b_3 y_2 + c_3} ;$$

$$\frac{p_3}{r_3} = \frac{a_1 x_3 + b_1 y_3 + c_1}{a_3 x_3 + b_3 y_3 + c_3} ; \qquad \frac{q_3}{r_3} = \frac{a_2 x_3 + b_2 y_3 + c_2}{a_3 x_3 + b_3 y_3 + c_3} ;$$

$$\frac{p_4}{r_4} = \frac{a_1 x_4 + b_1 y_4 + c_1}{a_3 x_4 + b_3 y_4 + c_3} ; \qquad \frac{q_4}{r_4} = \frac{a_2 x_4 + b_2 y_4 + c_2}{a_3 x_4 + b_3 y_4 + c_3} .$$

De estas ocho ecuaciones de condicion pueden deducirse los valores de las ocho coordenadas de los cuatro polos, dadas las polares; ó dadas las coordenadas de los polos, se deducirán las relaciones de las coeficientes de sus polares, y quedarán éstas determinadas, teniendo en cuenta que en ambos casos se conocen las ocho relaciones citadas al principio de este número.

B. D.

# ENCLAVAMIENTOS

SISTEMA SAXBY Y FARMER.

## CONSIDERACIONES GENERALES.

(Continuacion.)

### ENCLAVAMIENTOS.

OBJETO, DEFINICION Y TEORÍA GENERAL.

Sabido es que los discos y los aparatos de seguridad, cuya rápida enumeracion acabamos de hacer, dispuestos de una manera conveniente aseguran el paso de los puntos peligrosos de las vías férreas, tales como las agujas, bifurcaciones y cruzamientos. Sin embargo, no es ménos cierto, que la seguridad descansa en la vigilancia del guarda-agujas, porque este agente es el encargado de dar á las señales posiciones convenientes y en