Tenemos, pues, así dispuesto nuestro perfil en la forma de la fig. 11, debiendo ver en ella el procedimiento más expedito de hallar con el instrumento el área ADEF + ADGP ó CDEH, fig. 12, que es igual á $\frac{1}{2}$ (CD + H*h*) E*e*.

(*Se continuará.*)

GEOMETRÍA.

Con las figuras *correlativas* de que nos hemos ocupado en el último número de la REVISTA, termina la parte que nos proponíamos extractar de la *Introduccion á la Geometría Superior* del Sr. D. José Echegaray, no verificándolo del mismo modo con las *homológicas* de que vamos á tratar, porque dichas figuras se consideran en el expresado libro como una consecuencia de las *homográficas*, y teniendo en cuenta propiedades y desarrollos de los que no se ha hecho mencion en los artículos anteriores, por ajustarlos en lo posible al detalle de los programas de ingreso en nuestra Escuela.

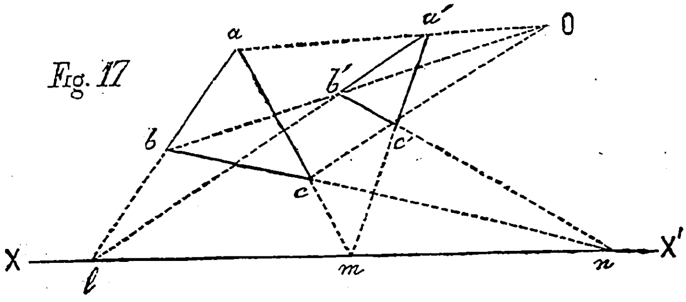
FIGURAS HOMOLÓGICAS.

Número 1. Dos figuras situadas en un plano se llaman *homológicas*, cuando las rectas que unen sus puntos homólogos ó correspondientes van á concurrir en un mismo *punto*, y las rectas homólogas prolongadas se cortan todas ellas en una sola *recta*.

El punto de concurso de las rectas que unen los puntos homólogos se llama *centro* de homología, y la recta donde concurren las homólogas de las dos figuras, se llama *eje* de homología.

Así, por ejemplo, dos figuras triangulares serán homológicas cuando estén dispuestas de la siguiente manera (fig. 17):

Fig. 17



Las rectas aa', bb', cc' van á concurrir en el *centro* O, los lados homólogos ab y $a'b'$, bc y $b'c$, ac y $a'c'$, concurren en los puntos l, m y n del *eje* XX'.

Núm. 2. Tratemos de determinar la condicion analítica á que deben satisfacer las coordenadas de los vértices de dos figuras homológicas.

Sean $x\,y$ las coordenadas de un vértice de la 1.ª figura; $x'\;y'$ las del vértice homólogo de la 2.ª figura, y $x_0\;y_0$ las coordenadas del centro de homología. Puesto que estos tres puntos han de estar en línea recta, sus coordenadas deben satisfacer á la ecuacion de una recta. Sea esta recta desconocida la determinada por la ecuacion $lx + my + n = 0$, *en las que* l, m y n son los parámetros variables. Debe tenerse

$$\begin{aligned} lx + my + n &= 0 \\ lx' + my' + n &= 0 \\ lx_0 + my_0 + n &= 0. \end{aligned}$$

Siendo estas tres ecuaciones homogéneas con relacion á las variables l, m, n, debe verificarse para que sean compatibles, que la determinante de sus coeficientes sea nula. Así se tendrá

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

cuya determinante desarrollada y sumando y restándole $x_0\,y_0$ se convierte en

$$(x'\,y_0 - y'\,x_0) - (xy_0 - yx_0) + (xy' - yx') + (x_0\,y_0 - x_0\,y_0) = 0,$$

ó bien $$x'\,(y_0 - y) - y'\,(x_0 - x) + y_0\,(x_0 - x) - x_0\,(y_0 - y) = 0,$$

ó en $$(y_0 - y)\,(x' - x_0) + (x_0 - x)\,(y_0 - y') = 0;$$

de donde $$(y - y_0)\,(x' - x_0) = (x - x_0)\,(y' - y_0)$$

y separando las abscisas y ordenadas se tiene $\dfrac{x' - x_0}{x - x_0} = \dfrac{y' - y_0}{y - y_0}$ (1) para expresion de la relacion que debe existir entre las coordenadas de los puntos homólogos de ambas figuras y las del centro de homología.

Además, como á una recta de la primera figura ha de corresponder su homóloga en la segunda, las relaciones (1) deben satisfacer á otra relacion de primer grado con dos variables, ó lo que es lo mismo, ser iguales, por ejemplo á $\dfrac{1}{lx + my + n}$, ó sea una relacion en que el numerador sea constante y el denominador la expresion de una recta.

Por lo tanto, las condiciones analíticas que buscamos correspondientes á las figuras *homológicas* serán:

$$\frac{x' - x_0}{x - x_0} = \frac{y' - y_0}{y - y_0} = \frac{1}{lx + my + n} \quad (2).$$

Núm. 3. Hemos deducido las fórmulas (2), que corresponden á las figuras homológicas, teniendo en cuenta la primera de sus propiedades establecidas en la definicion, y que á una recta de la 1.ª figura ha de corresponder otra recta en la homológica.

Veamos cómo dichas fórmulas demuestran que las rectas se corresponden en ambas figuras, y que estas rectas van á concurrir en una tercera recta.

Sea $ax' + by' + c = 0$ la ecuacion de una recta de la segunda figura. Con objeto de aplicar mejor á la trasformacion las fórmulas (2), pondremos la ecuacion de esta recta en la siguiente forma:

$$a\,(x' - x_0) + b\,(y' - y_0) + ax_0 + by_0 + c = 0;$$

sustituyendo en vez de $x' - x_0$ y de $y' - y_0$ sus valores deducidos de las fórmulas (2) se tendrá

$$\frac{a\,(x - x_0)}{lx + my + n} + \frac{b\,(y - y_0)}{lx + my + n} + ax_0 + by_0 + c = 0,$$

ó sea $a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) + (lx + my + n)\,(ax_0 + by_0 + c) = 0$,

que es la ecuacion de una recta en funcion de las coordenadas x é y de la 1.ª figura.

Combinando por sustraccion la ecuacion de esta recta de la 1.ª figura con la ecuacion correspondiente a $(x' - x_0) + b\,(y' - y_0) + ax_0 + by_0 + c = 0$ de la recta homóloga, resulta

$$a\,(x - x') + b\,(y - y') + (ax_0 + by_0 + c)\,(lx + my + n - 1) = 0\,.$$

Suponiendo que dichas dos rectas se corten, como las coordenadas del punto de interseccion han de satisfacer la última expresion, y para dicho punto $x = x'$, $y = y'$, dichas coordenadas han de satisfacer á la expresion $(ax_0 + by_0 + c)\,(lx + my + n - 1) = 0$; y por lo tanto, satisfarán á la ecuacion $lx + my + n - 1 = 0$.

Queda, pues, demostrado que las rectas homólogas de ambas figuras se cortan en una tercera recta.

Y $lx + my + n - 1 = 0$, será en este caso la ecuacion del eje de homología.

Núm. 4. Las figuras *homológicas* son un caso particular de las *homográficas*, como puede verse comparando las fórmulas correspondientes de trasformacion. Así, conforme se determinó para las homográficas, la relacion anarmónica de cuatro puntos en línea recta, ó de cuatro rectas concurrentes de la primera figura es igual á la de cuatro puntos ó cuatro rectas homólogas de la otra figura.

Observacion. La trasformacion homológica, así como la homográfica, no altera el grado de las ecuaciones de las curvas. Así, una circunferencia se cambiará en general en otra seccion cónica, lo que permitirá aplicar á la figura trasformada las propiedades inherentes á la figura primitiva.

Núm. 5. Si las rectas homólogas en dos figuras homológicas son paralelas, es decir, que el eje de homología se aleja indefinidamente y desaparece, las figuras serán entónces *semejantes*.

Y, en efecto, en este caso las coordenadas ó parámetros de la recta correspondiente al eje de homología, ó sea l y m deben ser iguales á cero, y las fórmulas (2) se convierten en

$$\frac{x' - x_0}{x - x_0} = \frac{y' - y_0}{y - y_0} = \frac{1}{n} = \text{constante.}$$

Si trasportamos el orígen de coordenadas al *centro* de homología x_0 y_0 serán nulos, y se tendrá:

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{1}{n} = \text{constante.}$$

Hallándose, pues, las coordenadas de los puntos homólogos de ambas figuras en una relacion constante, las rectas que los unen serán paralelas, los ángulos correspondientes iguales y las figuras *semejantes* y *dispuestas de la misma manera*.

Si además del eje se traslada asimismo al infinito el *centro de homología*, las rectas que unen los puntos homólogos serán paralelas y las *figuras* serán *iguales*.

Las fórmulas en este caso se convierten en la *unidad*.

B. Donnet.

ENCLAVAMIENTOS

SISTEMA SAXBY Y FARMER.

CONSIDERACIONES GENERALES.

(Continuacion.)

Para encontrar la recíproca de estas combinaciones es preciso tomar la inversa de las relaciones y admitir que, puesto que β está enclavada en sus dos posiciones extremas por α en una posicion dada, no podrá en-