GEOMETRÍA.

FIGURAS HOMOLÓGICAS.

(Conclusion.)

Núm. 6. Valiéndonos de las fórmulas de trasformacion (2), podemos resolver varios problemas.

1.° Dados dos pares de puntos homológicos, hallar el centro de homología.

Uniendo cada punto con su correspondiente en el otro sistema, el punto de concurso de las rectas de union determinará geométricamente el centro de homología.

Para obtener sus coordenadas bastará sustituir las coordenadas de los cuatro puntos dados en la fórmula

$$\frac{x' - x_0}{x - x_0} = \frac{y' - y_0}{y - y_0}\,.$$

y de las dos ecuaciones resultantes se deducirán los valores de $(x_0\, y_0)$.

2.° Dados dos pares de puntos, un par de cada sistema (y por tanto el centro de homología), determinar el eje de homología.

En la fórmula

$$\frac{x' - x_0}{x - x_0} = \frac{1}{lx + my + n}\,,$$

se sustituye en lugar de las variables sus valores correspondientes á las coordenadas de los puntos dados y se obtendrán dos ecuaciones para determinar $\frac{l}{n}$ y $\frac{m}{n}$, y por lo tanto, el eje de homología.

Para resolver geométricamente el problema, conviene sustituir al centro de homología otros dos pares de puntos homológicos, hallando sus coordenadas por las ecuaciones

$$\frac{x' - x_0}{x - x_0} = \frac{y' - y_0}{y - y_0}\,, \quad \text{é} \quad \frac{x' - x_0}{x - x_0} = \frac{1}{l\,x + my + n}\,,$$

despues de sustituir en vez de $x_0\; y_0\; \frac{l}{n}$ y $\frac{m}{n}$ sus valores y fijar arbitrariamente las coordenadas $(x'y')$ de uno de los puntos. Estas ecuaciones nos darán los valores de las coordenadas del punto $(x\, y)$, homológico del $x'\, y$.

Repitiendo los cálculos con otro punto $(x''\, y'')$ se obtendría de las mismas ecuaciones el cuarto punto. Con estos cuatro puntos y los cuatro primeros que eran conocidos, fácilmente se deduciría la situacion del eje de homologia.

3.° Dados cuatro pares de puntos homológicos, determinar el *centro* y el *eje* del sistema.

Las fórmulas generales de trasformacion, despues de las sustituciones de los datos, resuelven fácilmente el problema.

Dado el eje y el centro de homología, y un punto de uno de los sistemas, se determinará inmediatamente el punto homológico.

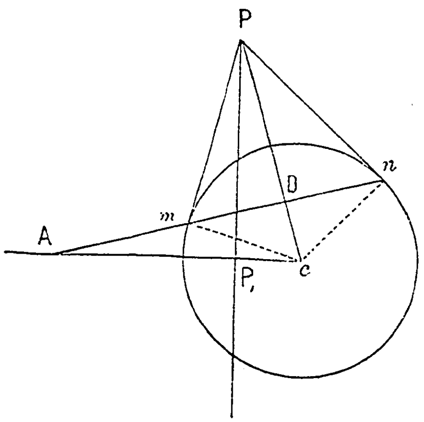
ARTICULO NOVENO.

FIGURAS POLARES.

Núm. 7. Las *figuras polares* son aquellas en que los vértices de la una son *polos* de los lados de la otra, y las rectas de la primera son *polares* de los vértices de la segunda figura, *polos* y *polares* que pueden referirse á una cónica cualquiera.

Segun lo establecido al tratar de las *figuras correlativas*, resulta de la definicion anterior que los vértices de la segunda figura serán los *polos* de las rectas de la primera, y sus lados serán *las polares* de los vértices de la primera, referidos unos y otros á una misma *cónica*.

Una de las maneras más sencillas de obtener el polo dada la polar, ó recíprocamente, es refiriendo una y otra á una circunferencia. Sea A el punto que consideramos como *polo*; para determinar su *polar* se traza una



circunferencia cualquiera, se une A con el centro C por el punto A, se traza una secante cualquiera Amn en los puntos de seccion m y n, se trazan las tangentes mP y nP desde el punto de encuentro P, se baja la perpendicular PP_1 y esta recta es la polar del punto A.

En efecto; los triángulos ADC y PP_1C son semejantes, y de ellos se deduce la siguiente relacion:

$$\frac{AC}{PC} = \frac{DC}{P_1C}, \qquad \text{de donde}$$

$$P_1C = \frac{PC \times DC}{AC}; \quad \text{y como } PC \times DC = mC^2 = r^2, \text{ se tiene}$$

$$P_1C = \frac{r^2}{AC} = \text{constante}.$$

Como la secante Amn puede ser cualquiera, resulta que el lugar geométrico de los puntos de interseccion de las tangentes análogas á las mP y nP es la recta PP_1 (puesto que P_1C = constante). A la recta que goza de esta propiedad se la llama polar del punto A.

Vemos tambien que la situacion del polo y de su polar son recíprocas respecto al centro del círculo, pues á su vez se tiene $AC = \frac{r^2}{P_1C}$, y si la polar está dada, AC será constante; si el polo A se aleja del centro C la polar se acerca á éste y pasa por él cuando el polo está en el infinito, y por el contrario, si el polo es el centro C, la polar se halla situada en el infinito.

Como las tangentes Pm y Pn pueden considerarse como el límite de secantes al círculo que pasen por m y n, resulta tambien de la figura anterior, que *el lugar geométrico de los puntos de encuentro de las secantes á un círculo trazadas por los puntos de interseccion del mismo con otras secantes que partan de un punto fijo A, es una recta, que es precisamente la polar del punto dado A.*

Pero dejando esto aparte, que sólo por incidencia hemos tratado, la última construccion nos permitirá hallar una figura *polar recíproca* de otra dada. Para ello, despues de fijar la situacion de un círculo desde cada uno de los *vértices* de la figura dada se trazarán rectas que pasen por el centro del círculo, y repitiendo para cada una de ellas la construccion ántes indicada para determinar las polares análogas á la PP_1, estas polares serán los *lados* de la *figura polar recíproca* de la dada, y sus *vértices* estarán determinados por los puntos de encuentro de dichas polares.

Las ecuaciones que enlacen los *vértices* de una de las figuras y los *lados* de la otra serán las mismas ecuaciones ó fórmulas que establecimos en el artículo de *Figuras correlativas,* sin más variante que la que resulte de sustituir en dichas fórmulas, en lugar de las coordenadas del punto que se considere como *polo*, las coordenadas de éste, y en lugar de las *rectas correlativas* á dicho punto, la ecuacion de la *polar* en funcion de las coordenadas del *polo*, referida al círculo.

Así, por ejemplo, si α y β son las coordenadas de uno de los vértices de la primera figura, considerado como *polo* la ecuacion de la *polar* correspondiente ó recta correlativa de la segunda figura, será de la forma:

$$Ax' + By' + C = 0 .$$

y como los coeficientes A, B y C han de ser funciones de las coordenadas α y β del polo, dicha ecuacion será

$$f_1 (\alpha\, \beta) \,.\, x' + f_2 (\alpha\, \beta) \,.\, y' + f_3 (\alpha\, \beta) = 0 .$$

Si el eje de las x pasa por el polo y hallamos su polar con relacion al círculo, se tendrá $x = \alpha$, $\beta = 0$, para ecuaciones de uno de los *vértices* de la primera figura, y $x' = \frac{r^2}{\alpha}$ para ecuacion de la polar correspondiente, ó sea la *recta* correlativa en la segunda figura.

Si el polo y su polar se refieren á dos rectas concurrentes que tomamos por ejes coordenados, entónces, segun sabemos, si α y β son las coordenadas del polo, $\alpha y + \beta x = 0$, es la ecuacion de la polar ó recta correspondiente en la *figura polar correlativa*, á la que uno de sus vértices tiene por coordenadas α y β.

B. DONNET.

ENCLAVAMIENTOS

SISTEMA SAXBY Y FARMER.

CONSIDERACIONES GENERALES.

(Continuacion.)

Este cuadro de clasificacion es quizá difícil de comprender con prontitud, y por esto nos parece oportuno presentarlo tambien bajo la forma en que lo hace M. Cossman, que consiste en un procedimiento gráfico, por medio del cual expresa el movimiento relativo de las barras de enclavamiento.