que acabamos de estudiar, calculándose las áreas, tanto en este caso como en el precedente, por los medios indicados en el método anterior. Observemos que un dato importante para la solucion de los problemas últimamente resueltos es la distancia tomada paralelamente á la base desde la cota roja á la polar colocada en direccion paralela á la línea de terreno, y precisa para ello el que dicha polar corte á aquella recta en límites del dibujo, lo cual puede haber casos en que no ocurra. Si así sucediese, podríamos tomar la mitad ó una fraccion cualquiera de la cota roja, con la cual operaríamos en igual forma que con ésta, tomando para las construcciones la misma fraccion del semiancho de la vía, y obtendríamos así una ordenada mitad ó de la fraccion tomada respecto á la que buscamos y su producto por 2 ó por el quebrado invertido nos determinaría ésta, mas en este caso se resuelve mejor el problema por el medio que vamos á indicar, que es el más general.

Si consideramos dos puntos cualesquiera de la línea EF situados á distinto lado del talud DE, ó sean, por ejemplo, los a y b, fig. 20, en los cuales la abscisa y ordenada del primero sean menores que los del segundo, los triángulos semejantes $ad\mathrm{E}$, $bc\mathrm{E}$, nos darán la proporcionalidad siguiente entre sus lados $ad : bc :: \mathrm{E}f : \mathrm{Ee}$ ó $ad + bc : bc :: \mathrm{E}f + \mathrm{Ee} : \mathrm{Ee}$; pero $ad = gd - ga$ y $bc = hb - hc$; luego $gd - ga + hb - hc : bc :: ef : \mathrm{Ee}$ ó $(gd - hc) + (hb - ga) : bc :: ef : \mathrm{Ee}$ ó $(hb - ga) - ci : bc :: ef : \mathrm{Ee}$; $hb - ga$ es la diferencia de las abscisas de los puntos b y a conocidas por la libreta, ef la diferencia de sus ordenadas, $bc = hb - hk - \mathrm{OD}$, siendo $\mathrm{O}k$ paralela á $\mathrm{D}c$, es muy fácil de determinar en el instrumento, así como $ci = rs$, tomando $\mathrm{O}r =$ diferencia de las ordenadas de a y b, y por tanto, con dichos elementos la cuarta proporcional, que nos dará la Ee y su diferencia con la ordenada de b la del E, hallándose ya sin dificultad su abscisa.

(*Se continuará.*)

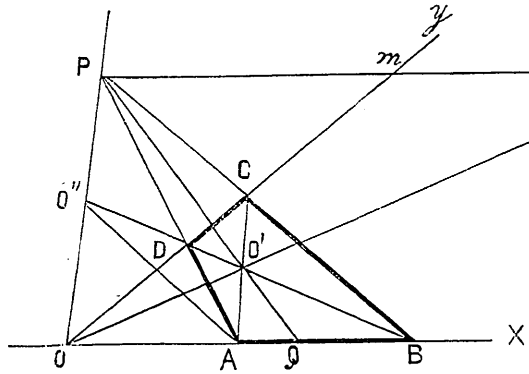
LEONCIO UBILLOS.

GEOMETRÍA.

CUADRILÁTERO COMPLETO.

Número 1. Si en un *trapezoide* cualquiera, tal como el ABCD, se prolongan sus lados hasta que se encuentran en los puntos O y P, se forma una figura ODPCBAOD, con los cuatro lados prolongados, que es á la que se llama *cuadrilátero completo*. Dicho cuadrilátero tiene *seis vértices* y *tres diagonales*.

Los vértices son los puntos A, B, C, D, O y P; las diagonales son las rectas AC, BD y OP.



Núm. 2. Antes de determinar algunas de las propiedades del *cuadrilátero completo*, conviene establecer *que dos rectas que pasan por el origen de coordenadas y que tienen sus coeficientes angulares iguales y de signos contrarios, forman con los ejes un haz armónico.*

En efecto, dichas rectas serán de la forma $y = ax$ é $y = a'x$ (por ejemplo, las OP y OP′ de la figura anterior). Si se tiene $a = -a'$ conforme con lo enunciado, para un mismo valor de y, los valores de x serán iguales y de signos contrarios, lo cual quiere decir que si cortamos las dos rectas por una paralela PP′ al eje de las x (correspondiente á un valor constante de y), dicha paralela cortará á las rectas dadas OP y OP′ en los puntos P y P′ de igual abscisa, pero de signo contrario, de modo que se tendrá $m\mathrm{P} = m\mathrm{P}'$, y segun hemos visto al tratar de las *relaciones anarmónicas*, las rectas tales como la OP y OP′, y la Om que pasa por el punto medio de la secante PP′ y la OX paralela á esta secante forman un *haz armónico.*

Recíprocamente, para que dos rectas que pasen por el origen formen con los ejes un *haz armónico*, es preciso que sus coeficientes angulares sean *iguales* y de *signos contrarios*. Porque es necesario que trazando una secante del haz paralela al eje de las X, los segmentos de dicha secante interceptadas entre el eje de las Y y las rectas dadas OP y OP′ sean iguales, y como se hallan á distinto lado del eje de las y deben ser las abscisas de los puntos P y P′, iguales y de signos contrarios para un mismo valor de la ordenada, lo que exige que se tenga $a = -a'$.

Recordemos tambien, conforme se demuestra en la *Geometría Analítica*, que la recta *OP′* es la *polar* del vértice P respecto al sistema de las dos rectas OC y OB que se toman por ejes coordenados; que á su vez la

$O'P$ es la *polar* del vértice O y que el *vértice* O' es el *polo* de la *diagonal* OP.

Núm. 3. Con los antecedentes expuestos, tratemos ya de fijar las ecuaciones de los lados y vértices del *cuadrilátero completo*, así como algunas de sus propiedades.

Para mayor sencillez, supongamos que los ejes coordenados son los lados AB y DC del *cuadrilátero*, y el orígen es el vértice O del mismo. Así, tendremos, llamando $(x'\ y')$ las coordenadas del punto P:

Ecuacion	del lado OAB.	$y = 0.$
»	del lado PCB.	$y - y' = a\,(x - x').$
»	del lado CDO.	$x = 0.$
»	del lado ADP.	$y - y' = a'\,(x - x').$

Ecuacion de los vértices:

Del vértice A... $\begin{cases} y = 0 \\ x = \dfrac{a'x' - y'}{a'} \end{cases}$ . . . De B... $\begin{cases} y = 0 \\ x = \dfrac{ax' - y'}{a} \end{cases}$.

De C... $\begin{cases} x = 0. \\ y = y' - ax' \end{cases}$ . . . . De D... $\begin{cases} x = 0. \\ y = y' - a'x'. \end{cases}$

De P... $\begin{cases} x = x'. \\ y = y'. \end{cases}$ . . . . y de O... $\begin{cases} x = 0. \\ y = 0. \end{cases}$

Las ecuaciones de las diagonales se obtendrían con igual facilidad una vez conocidas las coordenadas de los vértices.

Segun lo expuesto anteriormente, los dos lados OAB y ODC del *cuadrilátero*, la diagonal OP y la recta OO' que une el vértice O con el punto de encuentro o' de las otras dos diagonales, constituyen un *haz armónico*.

Asimismo, como podemos tomar como ejes coordenados las rectas PDA y PCB, estos lados con la diagonal PO″O y la recta PO′ forman otro *haz armónico*, cuyo punto de concurso es el vértice P del *cuadrilátero*.

Tambien existe otro *haz armónico* en el vértice B, formado por los lados BAO y BCP, la diagonal BD y la recta que uniese el vértice B con el punto de encuentro de las otras dos diagonales.

Igualmente existen otros haces armónicos formados de análoga manera en los vértices A, C y D del *cuadrilátero*.

Es decir, que en cada uno de los seis vértices del *cuadrilátero completo* se forma un haz armónico constituido por *dos lados* del cuadrilátero, una *diagonal* y la recta que une el *vértice* que se considere con el punto de encuentro de las *otras dos diagonales*.

Además, cada vértice del *cuadrilátero* es *polo* de la *recta* que une el vértice que se tome por orígen de coordenadas con el punto de encuentro de las otras dos diagonales.

Estas rectas de union, tales como la OO′P′, pueden considerarse como el lugar geométrico de los puntos armónicos conjugados de P por relacion á los puntos de interseccion de las secantes trazadas desde dicho punto P con las rectas OX y OY.

Núm. 4. Estas propiedades del *cuadrilátero completo* pueden utilizarse para construir haces armónicos y puntos armónicamente conjugados, conocidas tres rectas del haz ó tres puntos.

En efecto; sean PA y PB dos rectas de un *haz* y PO una tercera recta del haz, de la cual se quiere hallar su conjugada.

Se toma un punto cualquiera *o* en esta recta y se trazan por él dos secantes cualquieras ODC y OAB. Se forma así un cuadrilátero completo, trazando sus diagonales interiores AC y BD, y uniendo su punto de encuentro O′ con el vértice dado P, se tendrá la *recta PO′*, conjugada de *la PO*.

Si la recta del *haz*, de la cual se busca su conjugada, en lugar de hallarse á un mismo lado de las otras dos rectas del *haz* estuviese situada entre ellas, se procedería de un modo semejante.

Así, por ejemplo, si la recta de la cual se quiere hallar la conjugada fuese la PO′ comprendida entre las PDA y PCB, se fija en ella un punto tal como el *O′* y se trazan por él las secantes DO′B y CO′A; se unen, C con D, B con A (puntos de encuentro de dichas secantes con las rectas dadas), y el punto O de interseccion de las CD y BA, unido con el P, formará la recta PO, conjugada de la PO′.

Si tenemos tres puntos, *O*, *A* y *B*, y queremos hallar un cuarto punto conjugado armónicamente con los tres y buscamos el correspondiente al O, por ejemplo, bastará trazar desde un punto cualquiera P las secantes PO, PA y PB; buscar, como ántes se ha hecho, la secante PO′Q conjugada armónicamente con la PO y el punto Q en que esta secante corta á la OAB, será el punto pedido.

Si el punto dado hubiere sido el Q, comprendido entre A y B, se construiría tambien el *cuadrilátero completo* ABCDOP, y hallando la secante OP, conjugada de la PQ, el punto *O*, en que dicha secante corta á la recta que une los puntos dados, será el punto conjugado del punto Q.

B. Donnet.