que averiguar el movimiento ordinario del puerto y calcular prudencialmente el aumento que tendrá, atendidas las circunstancias especiales de la localidad, sin echar en olvido que si bien debe cuidarse de no hacer más obra que la precisa, trae peores consecuencias para estos proyectos una falta en ménos que en más, pues una vez concluido un puerto, cualquiera obra que se ejecute para aumentar su cabida es muy costosa y puede variar las buenas condiciones que el puerto tenga.

(Se continuará.)

ANTONIO MARÍA JÁUDENES.

GEOMETRÍA.

COORDENADAS TETRAÉDRICAS Y TETRAPOLARES.

Número 1.° Entre las diversas maneras que existen de fijar la posicion de un punto en el espacio, una de ellas es por medio de sus distancias á las cuatro caras de un *tetraedro*.

Estas distancias, ó sea las perpendiculares bajadas desde el punto dado á cada plano del tetraedro, son las *coordenadas tetraédricas*, que tambien suelen llamarse *cuadriplanares*.

La ecuacion de un plano en funcion de los ángulos α, β y γ, que hace con los planos coordenados y la perpendicular δ, bajada desde el orígen á dicho plano, es:

$$x \,.\, \cos.\, \alpha + y \cos.\, \beta + z \,.\, \cos.\, \gamma - \delta = 0,$$

y la ecuacion de la perpendicular á dicho plano bajada desde un punto M, cuyas coordenadas cartesianas son $(x_1\ y_1\ z_1)$, es:

$$P = \pm \frac{x_1 \cos.\, \alpha \,.\, + y_1 \cos.\, \beta + z_1 \cos.\, \gamma - \delta}{\sqrt{\cos.^2 \alpha + \cos.^2 \beta + \cos.^2 \gamma}} \,.$$

Si los ejes son rectangulares, dicha perpendicular tiene por expresion:

$$P = \pm (x_1 \cos.\, \alpha + y_1 \cos.\, \beta + z_1 \cos.\, \gamma - \delta) \,.$$

Considerando, pues, un tetraedro, al que han de referirse las posiciones de los puntos que traten de fijarse en el espacio, y llamando A, B, C y D á cada una de las cuatro caras del tetraedro, y P_1, P_2, P_3, P_4 á las perpendiculares desde un punto M á cada una de dichas caras, se tendrá para expresion de las *coordenadas tetraédricas* del punto, las siguientes:

$$
(1) \quad
\begin{aligned}
P_1 &= x \cos. \alpha_1 + y \cos. \beta_1 + z \cos. \gamma_1 - \delta_1 \\
P_2 &= x \cos. \alpha_2 + y \cos. \beta_2 + z \cos. \gamma_2 - \delta_2 \\
P_3 &= x \cos. \alpha_3 + y \cos. \beta_3 + z \cos. \gamma_3 - \delta_3 \\
P_4 &= x \cos. \alpha_4 + y \cos. \beta_4 + z \cos. \gamma_4 - \delta_4,
\end{aligned}
$$

en cuyas relaciones, $(x\ y\ z)$ representan las coordenadas cartesianas del punto, y los valores de las (α, β, γ) los ángulos que cada plano del *tetraedro coordenado* hace con tres planos rectangulares, que á su vez fijan la situacion de dicho *tetraedro de referencia*.

Si el orígen de coordenadas cartesianas se supone situado en el interior del *tetraedro*, lo mismo que el punto M, entónces dichas coordenadas tetraédricas se consideran *negativas*, pues cuando el orígen y el punto del cual parte la perpendicular á un plano se hallan á un mismo lado de éste, dicha perpendicular tiene aquel signo, siendo POSITIVA cuando el punto y el orígen de coordenadas se hallan á distinto lado del plano. En efecto; si hallándose el punto M y el orígen á un mismo lado del plano coincidiera el uno con el otro, x, y, z serían nulas y quedaría $P = -\delta$; variando la posicion del punto, pero quedando siempre al mismo lado del plano, debe quedar la distancia del mismo signo de δ, es decir, *negativa*, y por lo mismo, si el punto pasa al otro lado del plano respecto al orígen, quedando éste fijo, la perpendicular P debe cambiar de signo y ser *positiva* al cambiar de sentido el movimiento del punto.

Esto supuesto, una vez determinada la magnitud y el signo de una *coordenada tetraédrica* de un punto, *tres* de dichas coordenadas bastarán para fijar su posicion en el espacio, pues bastará trazar planos paralelos á cada una de las tres caras que corresponda del *tetraedro de referencia*, á una distancia de dichas caras y al lado que marque la *magnitud* y el *signo* de la coordenada P, y la interseccion de dichos tres planos paralelos determinará el punto. Así, que la cuarta coordenada tetraédrica tiene que ser una consecuencia de las otras tres, por lo que debe existir una relacion determinada entre las cuatro coordenadas que consideramos.

Esta relacion es evidente; pues uniendo el punto M con los cuatro vértices del *tetraedro de referencia* se formarán cuatro tetraedros, cuyas alturas serán las coordenadas tetraédricas P_1, P_2, P_3 y P_4, y cuyos volúmenes compondrán el volúmen del *tetraedro* principal. De suerte que se tendrá:

$$- \frac{AP_1}{3} - \frac{BP_2}{3} - \frac{CP_3}{3} - \frac{D \,.\, P_4}{3} = V,$$

ó bien

$$AP_1 + BP_2 + CP_3 + DP_4 = -3V \quad (2).$$

De esta relacion (2), una vez conocidas tres de las coordenadas tetraédricas, puede deducirse el valor de la cuarta coordenada.

Dicha expresion (2) es general. Para deducirla hemos supuesto que el punto M se hallaba situado en el interior del *tetraedro*, lo mismo que el orígen de coordenadas cartesianas, puesto que hemos considerado negativas á las cuatro coordenadas; si el *punto* y el *orígen* estuvieran á distinto lado de algunas de las caras del tetraedro, la coordenada P correspondiente sería *positiva*; pero en este caso el tetraedro *parcial* correspondiente, formado al unir el punto con los vértices del principal, sería exterior á éste y habría que restarlo para componer el volúmen V del *tetraedro coordenado*, por lo que dicho volúmen parcial entraría de todas maneras con el signo negativo en la expresion anterior á la (2).

Conocida dicha relacion (2), no es preciso conocer exactamente los valores de las tres coordenadas tetraédricas para fijar el punto que corresponda; basta conocer magnitudes proporcionales á las cuatro coordenadas. En efecto; sean l, m, n, p cantidades conocidas y *proporcionales* á las coordenadas P_1, P_2, P_3, P_4, que tratamos de determinar. Tendremos:

$$\frac{P_1}{l} = \frac{P_2}{m} = \frac{P_3}{n} = \frac{P_4}{p},$$

de cuyas relaciones se deduce, despues de multiplicar sus elementos, por los valores de las áreas de las cuatro caras del tetraedro coordenado:

$$\frac{AP_1 + BP_2 + CP_3 + DP_4}{lA + mB + nC + pD} = \frac{P_1}{l} = \frac{P_2}{m} = \frac{P_3}{n} = \frac{P_4}{p},$$

ó bien

$$\frac{P_1}{l} = \frac{P_2}{m} = \frac{P_3}{n} = \frac{P_4}{p} = \frac{-3V}{lA + mB + nC + pD}.$$

Siendo conocido este último miembro y las cantidades l, m, n y p, de las últimas igualdades, pueden deducirse cada una de las *coordenadas tetraédricas* P_1, P_2, P_3 y P_4.

Núm. 2. Las fórmulas (1) determinan, segun se ha visto, los valores de las *coordenadas tetraédricas* de un punto M en funcion de las coordenadas *cartesianas* del mismo ($x\ y\ z$).

Considerando tres de dichas fórmulas, y suponiendo conocidas las coordenadas tetraédricas del punto, así como los ángulos (α, β, γ) y las distancias δ, tendríamos tres ecuaciones con las tres incógnitas ($x\ y\ z$). Despejando los valores de éstas tendríamos las fórmulas para pasar de coordenadas *cartesianas* á *tetraédricas*.

COORDENADAS TETRAPOLARES.

Núm. 3. Si se dividen cada uno de los tetraedros parciales formados con el punto M y los vértices del principal por este tetraedro coordenado, se tendrán cuatro relaciones de estos volúmenes. Conocidas estas relaciones, de ellas pueden deducirse los valores de las alturas de los tetraedros parciales, ó sean las coordenadas tetraédricas, y por lo tanto, podrá fijarse la situacion del punto.

Dichos volúmenes de tetraedros parciales pueden representarse por

$$v_1 = \frac{AP_1}{3}, \quad v_2 = \frac{BP_2}{3}, \quad v_3 = \frac{CP_3}{3}, \quad v_4 = \frac{DP_4}{3}.$$

Las relaciones aludidas serán:

$$\frac{v_1}{V}, \quad \frac{v_2}{V}, \quad \frac{v_3}{V}, \quad \frac{v_4}{V}.$$

llamándolas V_1, V_2, V_3, V_4, se tendrá:

$$V_1 = \frac{AP_1}{3V}, \quad V_2 = \frac{BP_2}{3V}, \quad V_3 = \frac{CP_3}{3V}, \quad V_4 = \frac{DP_4}{3V} \quad (3).$$

Estos valores (3), ó sea á esta relacion de volúmenes, son á los que suele llamarse *coordenadas tetrapolares* ó *coordenadas volúmenes* de un punto.

Conocidas tres de dichas coordenadas, podrán construirse los tres tetraedros parciales, correspondientes á tres de las caras del *tetraedro de referencia*, y el vértice comun á ellos será el punto que trata de fijarse.

Lo mismo que en el caso anterior, bastan tres de dichas *relaciones* para determinar un punto, y la cuarta es una consecuencia de las otras tres, pues estas coordenadas deben satisfacer á la igualdad resultante de sumar los volúmenes de los tetraedros parciales, ó sea

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = V,$$

ó poniendo en evidencia el signo de las alturas P_1, P_2, P_3, P_4, si el punto y el orígen se hallan en el interior del tetraedro V,

$$-v_1 - v_2 - v_3 - v_4 = V,$$

ó lo que es igual:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = -V.$$

Dividiendo por V y sustituyendo en lugar de las relaciones resultantes los valores de V_1, V_2, V_3, V_4, con que las hemos designado, se tiene:

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = -1,$$

para expresion de la igualdad que enlaza las cuatro coordenadas *tetrapolares* de un punto.

B. DONNET.

ENCLAVAMIENTOS

SISTEMA SAXBY Y FARMER.

APARATOS SAXBY Y FARMER.

Lámina 12.

(Continuacion.)

Combinacion 8.ª:

Si αI. . . . . $\dfrac{\gamma N \text{ y } \delta N}{\beta N}$ recíprocamente $\dfrac{\beta I}{\gamma I \text{ ó } \delta I}$.

Si βI. . . . . $\dfrac{\gamma N \text{ ó } \delta N}{\alpha N}$ recíprocamente $\dfrac{\alpha I}{\gamma I \text{ ó } \delta I}$.

Si α y β normales. . . . . ningun enclavamiento.

Este enclavamiento se distingue de los otros, porque no entran en su composicion ni tacos ni regillas, porque se sitúa debajo del suelo de la caseta en lugar de colocarlo, como los demás, en la tabla de enclavamientos, y sobre todo porque la accion sobre las manetas de los cerrojos de las palancas no tiene la importancia y utilidad que en las otras combinaciones, como luégo explicaremos.

La disposicion de los órganos que realizan este enclavamiento, es como sigue:

En la parte inferior de la plataforma de las palancas (fig. 15, lámina 12), se fija por medio de pernes una deslizadera de fundicion A, destinada á guiar en su movimiento alternativo á tres bloques tambien de fundicion B_1 B_2 B_3, que tienen algunos de sus ángulos cortados en bisel, como se indica en la figura; las palancas se articulan á unas varillas *c*, de seccion rectangular, que además del movimiento alternativo de traslacion que les comunican dichas palancas, pueden tomar otro de oscilacion en su plano horizontal, así que al establecer las guías de las varillas *c* debe tenerse presente este movimiento de oscilacion. Las varillas tienen, además, ranuras que, al oprimir los biseles de los bloques B_1 B_2 B_3, determinan el deslizamiento trasversal de estos últimos.