ángulo 22° 30′, á ménos que condiciones particulares del sitio en que se va á establecer el puerto hagan ver que dicho ángulo es mayor.

(Se continuará.)

ANTONIO MARÍA JÁUDENES.

INVESTIGACION DE UNA FRACCION COMPRENDIDA ENTRE OTRAS DOS

Y EXPRESADA POR TÉRMINOS MENORES.

Número 1. Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ las dos fracciones dadas; y $\frac{x}{y}$ y la fraccion que se busca.

Suponiendo que $\frac{a}{b}$ es la menor de las dos fracciones dadas, deberá tenerse:

$$\frac{a}{b} < \frac{x}{y} < \frac{c}{d},$$

ó bien:

$$ady < bdx < bcy.$$

Llamando P y Q, respectivamente, á las diferencias entre el segundo término y los otros dos de las anteriores desigualdades, tendremos:

$$bdx - ady = \mathrm{P}$$
$$bcy - bdx = \mathrm{Q}.$$

Dividiendo estas ecuaciones, la primera por d y la segunda por b, se trasforman en

$$\left.\begin{aligned} bx - ay &= \frac{\mathrm{P}}{d} \\ cy - dx &= \frac{\mathrm{Q}}{b} \end{aligned}\right\} \quad (1).$$

De donde resulta que $\frac{\mathrm{P}}{d}$ y $\frac{\mathrm{Q}}{b}$ tienen que ser números enteros, ó lo que es lo mismo, que P y Q son múltiplos respectivamente de los denominadores d y b de las fracciones propuestas.

Resolviendo las ecuaciones (1) se tiene para valores de los términos de la *fraccion desconocida*

$$x = \frac{\frac{\mathrm{P}}{d}\cdot c + \frac{\mathrm{Q}}{b}\cdot a}{bc - ad}, \qquad y = \frac{\mathrm{P} + \mathrm{Q}}{bc - ad}.$$

Observando que el denominador de dichos valores es el determinante de los cuatro términos de las fracciones dadas $\frac{c}{d}$ y $\frac{a}{b}$, que representaremos por $\triangle$, sólo necesitaremos conocer los elementos P y Q para hallar los términos de la *fraccion* que se busca.

Como los valores de x é y han de ser *enteros*, resulta que las expresiones

$$x = \frac{\frac{P}{d} \cdot c + \frac{Q}{b} a}{\triangle} \quad \text{é} \quad y = \frac{P + Q}{\triangle}$$

deben ser enteras, es decir, que $P + Q$ y $\frac{P}{d} \cdot c + \frac{Q}{b} \cdot a$ han de ser divisibles por el determinante formado con los términos de las fracciones propuestas; y los *menores* valores que buscamos para x é y estarán dados por los *menores* valores de P y Q, que cumplan con dicha condicion de divisibilidad, y que además sean divisibles por d y b respectivamente, como ántes hemos establecido.

De modo que llamando q y q' á los cocientes exactos de la division de P por d y de Q por b, se tendrá:

$$P = qd, \quad Q = q'b,$$

y por lo tanto,

$$P + Q = qd + q'b \quad \text{y} \quad \frac{P}{d} \cdot c + \frac{Q}{b} a = qc + q'a.$$

Así, para hallar los menores valores de x é y, *tendremos que buscar los menores múltiplos de* b y d, *que sumados, compongan una suma divisible por* $\triangle$, *y tambien la menor suma de múltiplos de* a y c *divisible por* $\triangle$.

Pero ántes de proceder á determinar por medio de tanteos dichos valores, debemos demostrar que si los denominadores b y d son primos entre sí, siempre que $P + Q$ sea *divisible* por $\triangle$ lo será tambien el numerador del valor de x, ó sea $\frac{P}{d} c + \frac{Q}{b} \cdot a$.

En efecto; puesto que $P + Q$ es divisible por $\triangle$, dividiendo al sumando P por $\triangle$, y llamando r al resto de esta division, hecha por *defecto*, al dividir el otro sumando Q por $\triangle$, y haciendo la division por *exceso*, el resto será tambien igual á r, pero de signo contrario al anterior; es decir, que se tendrá:

$$P = q_1 \cdot \triangle + r \quad \text{y} \quad Q = q_2 \cdot \triangle - r.$$

Sustituyendo estos valores en la expresion $\frac{P}{d} . c + \frac{Q}{b} . a$, se tendrá (despues de haberla trasformado y reducido á un denominador comun, ó sea en $\frac{P\,bc + Q\,ad}{bd}$).

$$\frac{\triangle\,(q_1 . bc + q_2 . ad) + r\,(bc - ad)}{bd};$$

pero como $bc - ad = \triangle$, sustituyendo, se tiene:

$$\frac{\triangle\,(q_1 . bc + q_2 . ad) + r}{bd} \qquad (2),$$

cuyo valor es, como se ve, divisible por $\triangle$.

Además, como b y d son primos entre sí, segun la hipótesis hecha, el producto bd y $\triangle$ serán primos tambien, pues siendo $\triangle = bc - ad$, el divisor comun que tuvieran $\triangle$ y bd sería divisor de b y $\triangle$ ó de $\triangle$ y d, y por lo tanto, sería tambien un divisor de ad ó de bc, lo cual no puede verificarse en este caso, en el que las fracciones propuestas $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ se suponen ya simplificadas y los denominadores primos entre sí. Así, que la expresion anterior (2), que es divisible por $\triangle$ y que representa un número entero (el numerador del valor de x) es divisible por su denominador bd, será tambien divisible por el producto $\triangle . bd$.

Como dicha expresion (2) no es más que una, trasformada de la $\frac{P}{d} . c + \frac{Q}{b} . a = qc + q'a$, resulta que esta expresion, ó sea el numerador del valor de x es una cantidad *entera* y *divisible por* $\triangle = bc - ad$, conforme lo es tambien *entera* y *divisible* por $\triangle$, $P + Q = qd + q'b$, ó sea el numerador del valor de y.

No podría asegurarse lo mismo si los denominadores b y d no fueran primos entre sí. Es decir, que en los tanteos necesarios para hallar los valores de x é y habría necesidad, en este caso, de comprobar si los valores de P y Q, que sumados daban una suma divisible por $\triangle$, hacían tambien divisible por dicho valor de $\triangle$ á la expresion $\frac{P}{d} . c + \frac{Q}{b} . a$.

Supongamos como aplicacion de lo expuesto, que trata de hallarse una fraccion comprendida entre $\frac{16}{25}$ y $\frac{17}{26}$ y expresada por términos más sencillos que los de éstas.

Recordemos que los valores de P han de ser múltiplos de d, ó sea en este caso del número 26, y que los valores de Q han de hallarse comprendidos entre los múltiplos de b, ó sea de 25 en este caso.

Al efecto, formaremos en dos columnas los valores de P y de Q, los de P, 2 P, 3 P, 4 P, 5 P, etc., en una columna horizontal, y los de Q, 2 Q, 3 Q, etc., en una vertical, colocando las *sumas* correspondientes á cada *par* de valores de P y Q, que se combinan, debajo del valor correspondiente de *P* y á la derecha del de *Q*, conforme se detalla en el cuadro siguiente:

Q = \ P =	26	52	78	104	130	156
25	51	77	103	129	155	181
50	76	102	128	154	180	»
75	101	127	153	179	205	»
100	»	»	»	»	»	»

El valor de $\triangle$ es $25 \times 17 - 16 \times 26 = 9$.

La primera suma de los valores P y Q que se halla divisible por $\triangle = 9$ es la de 180, que corresponde al valor 130 de *P* y al valor 50 de Q.

De suerte que

$$y = \frac{P + Q}{\triangle} = \frac{180}{9} = 20.$$

Como los denominadores 25 y 26 de las fracciones dadas son primos entre sí, no es necesario ensayar si el valor de $\triangle$ divide á $\frac{P}{d}\,c + \frac{Q}{b}\,a$.

Dicha division tiene que ser *exacta*, segun se ha visto. Y en efecto:

$$x = \frac{\frac{P}{d}\,.\,c + \frac{Q}{b}\,.\,a}{\triangle} = \frac{\frac{130}{26}\,.\,17 + \frac{50}{25}\,.\,16}{9} = \frac{5\,.\,17 + 2\,.\,16}{9} = \frac{117}{9} = 13.$$

De modo que la fraccion resultante comprendida entre las dadas y más sencilla que éstas es $\frac{13}{20}$.

Otra *solucion* que dá aún una fraccion más sencilla que la últimamente hallada, es la que corresponde á la suma de $P + Q = 153$, segun puede verse en el cuadro anterior. Para este caso, resulta:

$$x = \frac{\frac{78}{26}\,.\,17 + \frac{75}{25}\,.\,16}{9} = \frac{3\,.\,17 + 3\,.\,16}{9} = \frac{99}{9} = 11;\quad y = \frac{153}{9} = 17.$$

La solucion más sencilla aún que la anterior es $\frac{11}{17}$.

Núm. 2. Cuando el determinante $\triangle = bc - ad$ es igual á la *unidad*, se simplifica el cálculo notablemente. En efecto; en dicho caso, se tendrá:

$$x = \frac{P}{d} . c + \frac{Q}{b} . a, \quad y = P + Q,$$

y como todas las sumas de los valores de P y Q cumplen ahora con la condicion de ser divisibles por $\triangle = 1$, la más sencilla será la que corresponda á los primeros valores de P y Q, ó sea á $P = d$ y $Q = b$. Por lo tanto,

$$P + Q = b + d \text{ y } \frac{P}{d} . c + \frac{Q}{b} . a = a + c,$$

es decir, que la *solucion* más sencilla corresponderá en este caso á

$x = a + c$. . . . . *suma de los numeradores de las fracciones dadas*,

$y = b + d$. . . . . *suma de los denominadores*,

y el quebrado que se busca será $\frac{a + c}{b + d}$.

Núm. 3. El número de *tanteos*, ó sea de las *sumas* que habrá que verificar de los valores de P y Q hasta hallar una suma divisible por $\triangle$, no puede exceder en ningun caso, de un número igual al valor de $\triangle \times \triangle = \triangle^2$.

En efecto; cuando se llegue á un *número* de múltiplos de P igual al valor de $\triangle$ y se hallan obtenido otro *número* de múltiplos de Q igual tambien á $\triangle$, como hay que combinar por suma cada múltiplo de P con cada uno de los de Q, cada uno de éstos, sumados con los primeros, daría lugar á un número de sumas igual $\triangle$; pero como existen $\triangle$ múltiplos de Q, el número total de sumas será $\triangle \times \triangle$. Y en dicho caso, $P + Q = \triangle . d + \triangle . b =$ á un múltiplo de $\triangle$, y

$$\frac{P}{d} . c + \frac{Q}{b} . a \text{ igual a } \frac{.\, d}{d} . c + \frac{\triangle . b}{b} . a = \triangle\, (a + c),$$

y se habrían obtenido los valores de x é y con la condicion á que deben satisfacer, y el problema estaría resuelto en el caso más desfavorable.

B. Donnet.

ENCLAVAMIENTOS

SISTEMA SAXBY Y FARMER.

APARATOS SAXBY Y FARMER.

(Continuacion.)

En virtud de la tercera regla un disco abierto debe enclavar en la posicion de alto todos aquellos discos, cuya abertura simultánea con el primero