# ALGEBRA.

## ARTICULO SEGUNDO.

## REDUCIDAS INTERCALARES.

Núm. 4. Las *reducidas* ó fracciones convergentes de las fracciones contínuas, forman dos séries: una *decreciente*, formada con las fracciones de lugar *impar*, que son *mayores* que la fraccion contínua, y otra série *creciente*, constituida por las reducidas de lugar par, *menores* que la fraccion continua; una y otra série convergen hácia la fraccion contínua; la primera por exceso, y la segunda por defecto; de suerte que dicha fraccion total se halla siempre comprendida entre dos *reducidas* consecutivas.

Así se tiene, llamando $x$ á la fraccion contínua:

$$\frac{P_1}{Q_1},\ \frac{P_3}{Q_3};\ \frac{P_5}{Q_5}\ldots\ldots\frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}},\ \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}>x,$$

$$\frac{P_0}{Q_0},\ \frac{P_2}{Q_2},\ \frac{P_4}{Q_4}\ldots\ldots\frac{P_{2n}}{Q_{2n}},\ \frac{P_{2n+2}}{Q_{2n+2}}<x.$$

Llamando $a_{2n+1}$ al cociente incompleto que corresponde á la última reducida de lugar impar de la série anterior, se tiene (conforme á la ley que determina una reducida cualquiera en funcion de las dos anteriores),

$$\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}=\frac{P_{2n}\cdot a_{2n+1}+P_{2n-1}}{Q_{2n}\cdot a_{2n+1}+Q_{2n-1}}\quad(1).$$

La diferencia entre esta reducida y la anterior de la misma série, es:

$$\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}-\frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}},$$

y sustituyendo en lugar de la primera su valor.

$$\frac{P_{2n}\cdot a_{2n+1}+P_{2n-1}}{Q_{2n}\cdot a_{2n+1}+Q_{2n-1}}-\frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}}=\frac{(-1)\cdot a_{2n+1}}{Q_{2n-1}(Q_{2n}\cdot a_{2n+1}+Q_{2n-1})}\quad(2)$$

De esta igualdad se deduce que si el cociente incompleto $a_{2n+1}$, (ó el que se considere en cada caso), es igual á la *unidad*, no habrá fraccion alguna *intercalar* comprendida entre las dos fracciones *reducidas* que se tengan en cuenta; pero si dicho cociente incompleto $a$ es mayor que la unidad, puede entónces dársele varios valores sucesivos enteros, desde *cero* hasta el que sea igual á dicho cociente incompleto, y en este caso habrá tantas *fracciones intercalares* comprendidas entre las *dos reducidas* que se consideren, cuantos sean los valores

$$1, 2, 3 \ldots\ldots\ a_{2n-1}\ ,\ a_{2n}\ ,$$

que pueden darse á dicho cociente hasta llegar á la fraccion $\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}$ cuando $a$ sea igual á $a_{n+1}$.

Dichas *reducidas intercalares*, deducidas de la igualdad (1), serán:

$$\frac{P_{2n-1}+P_{2n}}{Q_{2n-1}+Q_{2n}}\ ,\quad \frac{P_{2n-1}+2\,P_{2n}}{Q_{2n-1}+2\,Q_{2n}}\ ,\quad \frac{P_{2n-1}+3\,P_{2n}}{Q_{2n-1}+3\,Q_{2n}} \ldots\ldots$$

$$\frac{P_{2n-1}+a_{2n}\,.\,P_{2n}}{Q_{2n-1}+a_{2n}\,.\,Q_{2n}} \quad (3)\ .$$

Por consideraciones análogas veríamos que tambien pueden existir varias *reducidas intercalares*, entre cada par de *reducidas* principales, de las que constituyen la série de lugar par.

Hallando la diferencia entre dos *reducidas intercalares* consecutivas, de las que ántes hemos deducido (3), por ejemplo, entre las que correspondan á los valores de a iguales á $p$ y $p+1$, se tiene:

$$\frac{P_{2n-1}+(p+1)\,P_{2n}}{Q_{2n-1}+(p+1)\,Q_{2n}} - \frac{P_{2n-1}+p.\,P_{2n}}{Q_{2n-1}+p.\,Q_{2n}}$$

$$= \frac{P_{2n}\,.\,Q_{2n-1} - Q_{2n}\,.\,P_{2n-1}}{(Q_{2n-1}+(p+1)\,Q_{2n}\ \times)\ \ (Q_{2n-1}+p\,Q_{2n})}$$

$$= \frac{\pm 1}{\text{producto de denominadores}}\ ,$$

conforme se verifica para las *reducidas* principales que constituyen y equivalen á la *fraccion continua* total, más ó ménos aproximadamente.

De suerte que podemos establecer:

1.° Las fracciones *intercalares* de una fraccion continua son *irreducibles*.

2.° Las *diferencias* de dos consecutivas es igual á la *unidad* dividida por el producto de los denominadores.

3.° Con las *reducidas intercalares* comprendidas entre las principales consecutivas de una fraccion continua, se forman *dos séries*, una *creciente* y otra *decreciente*, comprendidas entre *cada par* consecutivo de las *dos séries principales*.

4.° No existe otra fraccion más sencilla, ó sea de términos menores comprendida entre dos reducidas que se aproxime más al valor de la fraccion contínua, que estas mismas reducidas, ó de otro modo, cualquiera *fraccion* comprendida entre dos *reducidas intercalares* consecutivas, tendrá sus términos *mayores* que las de éstas.

Núm. 5. Por medio de las *fracciones convergentes* de una fraccion contínua y de sus *intercalares*, puede determinarse una fraccion cuyo denominador sea próximamente una *cantidad fija dada*, y que se aproxime más que otra fraccion cualquiera al valor de una *cantidad irracional* ó *inconmensurable* que trate de obtenerse.

Para esto bastará convertir la cantidad *irracional* dada en fraccion contínua, formar todas las *reducidas* y sus *intercalares* de las *dos séries*; si al obtener dichas reducidas se halla una, cuyo denominador sea igual á la *cantidad fija dada* como *límite* del que ha de tener la fraccion que se busca, dicha *reducida será la fraccion pedida*. Si no se hallase una reducida de denominador igual al *denominador dado*, la fraccion buscada estará comprendida en una de las dos séries que forman las reducidas de la fraccion contínua; se buscarán entónces cuáles son las dos reducidas, una de cada série, cuyo denominador sea próximamente igual al denominador dado como límite, ambas por defecto ó ambas por exceso, y dichas fracciones convergentes, *principales* ó *intercalares*, serán los dos valores que comprenderán entre sí á la fraccion buscada, y ambas *fracciones* ó *reducidas* serán las más aproximadas á la *cantidad irracional* que trate de obtenerse, una por *defecto* y otra por *exceso*.

Núm. 6. Como ejemplo, tratemos de determinar la cantidad *irracional* $\sqrt{19}$, desarrollándola en *fraccion contínua*, calculando las reducidas de esta fraccion, y tomando una de dichas reducidas cuyo denominador sea el número 10, ó próximamente dicho número.

Al efecto, igualaremos dicha cantidad irracional al número entero 4, que es su valor aproximado, y añadiremos la fraccion $\frac{1}{x}$ para completar $\sqrt{19}$; se tendrá, pues:

$$\sqrt{19} = 4 + \frac{1}{x} = \frac{4x+1}{x},$$

de donde se deduce

$$x = \frac{1}{\sqrt{19}-4} = \frac{\sqrt{19}+4}{3} = 2 + \frac{1}{y}$$

De la última igualdad resulta, despues de quitar los denominadores,

$$y . \sqrt{19} + 4\, y = 6\, y + 3 \quad ó \; y\left(\sqrt{19} - 2\right) = 3\,; \quad y = \frac{3}{\sqrt{19} - 2}$$

ó bien:

$$y = \frac{3\left(\sqrt{19} + 2\right)}{15} = \frac{18}{15} = 1 + \frac{1}{z}\,.$$

Quitando los denominadores en la última igualdad, se tiene:

$$3 z \sqrt{19} + 6\, z = 15\, z + 15\,, \quad ó \text{ bien } z\left(3\sqrt{19} - 9\right) = 15;$$

despejando el valor de $z$,

$$z = \frac{15}{3\sqrt{19} - 9} = \frac{45\sqrt{19} + 135}{171 - 81} = \frac{315}{90} = 3 + \frac{1}{u}\,.$$

De esta igualdad, á su vez resulta:

$$45\, u \sqrt{19} + 135\, u - 270\, u = 90\,,$$

ó reduciendo

$$\left(45 . \sqrt{19} - 135\right) u = 90\,, \quad \text{de donde } u = \frac{90}{45\sqrt{19} - 135}$$

y multiplicando ambos términos por $45\sqrt{19} + 135$,

$$u = \frac{90\left(45\sqrt{19} + 135\right)}{20250} = \frac{28350}{20250} = 1 + \frac{1}{v}\,,$$

tomando siempre el número entero 4 por valor aproximado de $\sqrt{19}$.

Sustituyendo los valores obtenidos para cada una de las variables auxiliares $x$, $y$, $z$, $u$, en la primera expresion de $\sqrt{19}$, resulta para esta cantidad

$$\sqrt{19} = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{v + \cfrac{1}{\vdots}}}}}}$$

Formando las *reducidas*, las cinco primeras, son:

$$\frac{4}{1}, \frac{9}{2}, \frac{13}{3}, \frac{48}{11}: \frac{61}{14}.$$

Entre las *reducidas* de lugar *impar* $\frac{4}{1}$. $\frac{13}{3}$ y $\frac{61}{14}$ no hay *intercalares*, pues los cocientes incompletos correspondientes á la *tercera* y á la *quinta* son iguales á la *unidad*, y al formar con las anteriores las correspondientes reducidas, resultan las mismas fracciones $\frac{13}{3}$ y $\frac{61}{14}$.

Pero entre las reducidas de *lugar par* $\frac{9}{2}$ y $\frac{48}{11}$. *sí existen intercalares*, pues el cociente incompleto de la última es igual á 3, y podemos suponer que toma sucesivamente los valores 1, 2 y 3.

Para el valor 1 resulta, (teniendo en cuenta la reducida precedente $\frac{13}{3}$), la *intercalar* $\frac{22}{5}$, y para el valor 2 del cociente incompleto, resulta la *intercalar* $\frac{35}{8}$. Para $a = 3$ se tiene ya la reducida principal $\frac{48}{11}$. De modo que todas las *reducidas* son:

$$\frac{4}{1}. \frac{9}{2}, \frac{13}{3}, \frac{22}{5}, \frac{35}{8}. \frac{48}{11}, \frac{61}{14}.$$

Teniendo en cuenta la condicion impuesta de tomar para valor de $\sqrt{19}$ una reducida cuyo denominador sea el número 10, vemos que la *intercalar* $\frac{35}{8}$ ó la *principal* $\frac{48}{11}$, cumplèn próximamente con dicha condicion, ambas por *defecto*, (pues son reducidas de la série de lugar par. Desde luégo $\frac{48}{11}$ es la que dentro de la condicion impuesta debemos tomar para valor aproximado de la cantidad *irracional* $\sqrt{19}$.

B. DONNET.