dejar consignado que algunas veces, obras que no tienen importancia, promueven la resolucion de problemas, no comunes, que por sencillos que parezcan, puede ser conveniente conocer, y no debe desdeñarse el Ingeniero en comunicarlos como fruto de sus estudios ó de su práctica en la construccion, porque del conjunto de las minuciosidades que constituyen las reglas y medios de ejecucion de las obras, nacen, se forman y se perfeccionan los procedimientos que se emplean para realizar con acierto y economía las que se le encomiendan, que no siempre son obras extraordinarias ó de gran importancia, sino que generalmente son muchas de poca consideracion cada una, pero que en su conjunto representan el empleo de importantes capitales, cuya economía debe procurar con el mayor esmero, y las más veces se obtiene sólo con la prevision y la acertada aplicacion de pequeños detalles que la práctica enseña.

M. Garran.

GEOMETRÍA.—RELACIONES ANARMÓNICAS.

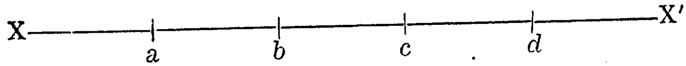
Entre las teorías que se exigen para el ingreso en la Escuela especial de Ingenieros de Caminos, figuran en el programa de *Geometría Analítica* las que se refieren á los *sistemas homográficos* y *en involucion*, *figuras homográficas* y *correlativas*. Consultados varios libros para el estudio de dichas cuestiones, ninguno las trata, en nuestro concepto, de una manera tan completa y tan clara, como el titulado *Introduccion á la Geometría Superior*, del Sr. D. José Echegaray. Autorizados por el que fué nuestro profesor, nos hemos permitido extractar su notable libro, y áun cuando la teoría de las *relaciones anarmónicas* y armónicas es más conocida y se halla mejor expuesta que las ántes citadas, por diversos autores, nos ha parecido conveniente empezar con este asunto, tanto por no quitar la debida unidad al libro que extractamos, cuanto por la claridad con que se halla tratada dicha teoría en el mismo.

ARTICULO PRIMERO.

I.—Relaciones anarmónicas de cuatro puntos.

Núm. 1. *Definicion.*—Fijemos sobre una recta indefinida XX′ (fig. 1.ª) cuatro puntos cualesquiera a, b, c, d; dividamos estos cuatro puntos en dos grupos, por ejemplo: a, b el primero; c, d el segundo; formemos la relacion $\frac{ac}{bc}$ de las distancias de los dos puntos del primer grupo á uno c del segundo; formemos igualmente la relacion $\frac{ad}{bd}$ de las distancias de dichos dos primeros puntos al cuarto d; y dividamos, por último, una por otra las dos relaciones anteriores.

Fig. 1.ª



Dicha *relacion compuesta* $\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd}$ recibe el nombre de *relacion anarmónica* de los cuatro puntos dados. En ella las cuatro distancias ac, bc, ad, bd, entran, no sólo con su valor numérico, sino tambien con el signo que les corresponde, segun el sentido en que se cuenten sobre el eje XX′ las distancias positivas.

Núm. 2. Formando las 24 agrupaciones, que con cuatro letras pueden hacerse, se observa que únicamente resultan *seis* relaciones anarmónicas distintas, que designaremos abreviadamente por m, n, p, $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$ y $\frac{1}{p}$; pues tres de ellas son inversas de las otras tres.

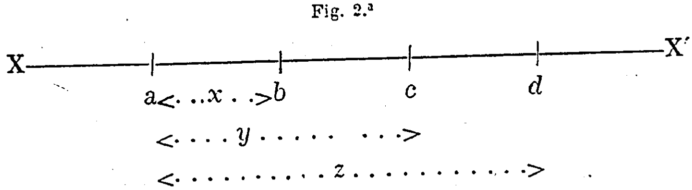
Las tres relaciones anarmónicas principales, son

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = \frac{ac \times bd}{bc \times ad} = m; \; \frac{cb}{ab} : \frac{cd}{ad} = \frac{cb \times ad}{ab \times cd} = n; \; \frac{ab}{db} : \frac{ac}{dc}$$
$$= \frac{ab \times dc}{db \times ac} = p.$$

Núm. 3. Dichas relaciones anarmónicas son funciones unas de otras, y dada una de ellas, pueden deducirse las otras dos.

A fin de reducir al menor número posible las cantidades que entran en dichas relaciones, hagamos (fig. 2.ª) $ab = x$; $ac = y$; $ad = z$;

Fig. 2.ª



pues para fijar un sistema de cuatro puntos, basta conocer las distancias de tres de ellos, que aquí son b, c y d, al primero a, tomado como orígen, y además, los signos de estas distancias.

La primera relacion $\frac{ac \times bd}{bc \times ad} = m$, tomará la forma $\frac{y\,(z - x)}{(y - x)\,z} = m$ (1).

La segunda relacion anarmónica $\frac{cb \times ad}{ab \times cd} = n$

se convertirá en $$\frac{(x-y)\,z}{x\,(z-y)} = n \qquad (2).$$

Despejando, por ejemplo, x de la (1), resulta:

$$x = \frac{yz\,(m-1)}{mz-y}$$

y sustituyendo en la (2) $$\frac{\left(\frac{yz\,(m-1)}{mz-y} - y\right) z}{\frac{yz\,(m-1)}{mz-y}\,(z-y)} = n\,;$$

ó simplificando $-\frac{1}{m-1} = n$; y finalmente, $n = \frac{1}{1-m}$.

Así, pues, la segunda relacion anarmónica n, es funcion de la primera, m, y dada *ésta*, el valor de aquélla se obtiene por la última fórmula.

Transformando, igualmente, la tercera relacion anarmónica

$$\frac{ab \times dc}{db \times ac} = p, \qquad \text{tendremos} \qquad \frac{x\,(y-z)}{(x-z)\,y} = p\,;$$

eliminando x entre ésta y la $\frac{(x-y)\,z}{x\,(z-y)} = n$, desaparecen y z, y resulta, por último, $p = \frac{1}{1-n}$; ó poniendo en lugar de n su valor en funcion de m, se tiene

$$p = 1 - \frac{1}{m}.$$

En resúmen, dados cuatro puntos a, b, c, d, sobre una recta, resulta lo siguiente:

1.° Queda completamente determinada la relacion anarmónica

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = m\,;$$

2.° Quedan igualmente determinadas las otras dos relaciones n y p, en funcion de la primera por las fórmulas anteriores.

3.° Las tres restantes relaciones distintas son inversas de las procedentes, es decir, iguales á $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{p}$.

4.° Las demás relaciones son iguales á estas seis.

Observacion.—Despejando m en la fórmula $n = \frac{1}{1-m}$, se tiene

$$m = 1 - \frac{1}{n}\text{; ó bien } 1.^{\text{a}}\text{ relacion} = 1 - \frac{1}{2.^{\text{a}}\text{ relacion}}.$$

$$\text{Asimismo se tiene } 2.^{\text{a}}\text{ relacion} = 1 - \frac{1}{3.^{\text{a}}\text{ relacion}};$$

y de la $p = 1 - \frac{1}{m}$ se deduce $3.^{\text{a}}\text{ relacion} = 1 - \frac{1}{1.^{\text{a}}\text{ relacion}}$.

Se pasa, pues, de unas á otras por estas tres sustituciones circulares de los números 1, 2, 3.

1, 2;
2, 3;
3, 1.

Núm. 4. De todo lo que se deduce, que para determinar un sistema de cuatro puntos bajo el concepto de sus relaciones anarmónicas, *basta una de ellas*, y que todas las demás se deducen de la primera por las fórmulas halladas precedentemente.

Asimismo, si sobre dos rectas XX' X'' X''' hay distribuidos ocho puntos, cuatro a, b, c, d sobre la primera, y otros cuatro a', b', c', d' sobre la segunda, y las dos primeras relaciones anarmónicas m y m' son iguales, las cinco restantes lo serán tambien.

Se llaman *puntos correspondientes ó conjugados* de los dos sistemas, *aquellos cuyas letras entran del mismo modo en las relaciones anarmónicas*. Por ejemplo, en los dos sistemas a, b, c, d y a', b', c', d', cuyas relaciones anarmónicas son iguales; es decir, que se tiene

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = \frac{a'c'}{b'c'} : \frac{a'd'}{b'd'}$$

son correspondientes los puntos a y a'; b y b'; c y c'; d y d'.

Núm. 5. Si los cuatro puntos a, b, c, d varían de posicion sobre la recta XX' (fig. 1.ª), sus distancias respectivas variarán tambien, y por lo tanto, variará en general el valor de la relacion anarmónica $\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd}$ y el de todas las restantes que dependen de ésta. Pero pueden variar los puntos y las distancias de tal modo, que se compensen unas con otras, tanto las variaciones de las distancias como las de sus signos, y que el valor de la relacion anarmónica quede invariable.

Basta, en efecto, igualar á una constante m la expresion (1) ántes obtenida

$$\frac{y\,(z-x)}{(y-x)\,z}=m$$

para obtener la ley analítica, segun la cual, han de variar las distancias de tres de los puntos dados al cuarto, para que la relacion anarmónica no cambie.

Tomando el punto a como orígen (fig. 2.ª) y haciendo variar x, y, z en la ecuacion anterior, obtendremos sobre la recta XX′ infinitos sistemas, que tendrán la misma relacion anarmónica.

Núm. 6. *Problema.*—Dados tres puntos a, b, c sobre una recta XX′ (fig. 2.ª), hallar otro punto de tal modo, que la relacion anarmónica correspondiente á una agrupacion dada (a, b, c, d), por ejemplo, tenga un valor m.

Tomemos como incógnita la distancia del punto d al a, ó sea $ad = z$; y es evidente que bastará para resolver el problema, despejar z de la ecuacion $\frac{y\,(z-x)}{(y-x)\,z}=m$, en la cual, todas las cantidades son conocidas ménos z.

Despejando esta incógnita, se tendrá

$$z=\frac{x\,y}{y+m\,x-m\,y}$$

y como esta ecuacion es de primer grado en z, el problema siempre será posible, hallándose el punto d en el infinito, cuando $y+m\,x-m\,y=0$.

Núm. 7. Como el número m puede tener un valor cualquiera en la ecuacion anterior, resulta que las relaciones anarmónicas, como las relaciones sencillas, pueden variar desde $-\infty$ á $+\infty$.

(Se *continuará.*)

B. D.

MADRID: 1883.
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO DE GREGORIO JUSTE
Calle de Pizarro, número 15, bajo.