ALGORITMO DE LA FORMA. (1)

ARTICULO SEGUNDO.

SUSTITUCION LINEAL.

DEFINICION. — SUSTITUCION ORTOGONAL. — APLICACION Á LA TRASFORMACION DE LAS ECUACIONES PARA HACER DESAPARECER ALGUNOS DE SUS TÉRMINOS.

Núm. 10. Se llama *sustitucion lineal* la que se verifica en una funcion de n variables $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$, cuando éstas se sustituyen por otras variables $y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots y_n$, relacionadas con las primeras por medio de las siguientes ecuaciones lineales.

$$(1)\left\{\begin{array}{l} x_1 = b_{11}\,y_1 + b_{12}\,y_2 + \ldots\ldots + b_{1n}\,y_n, \\ x_2 = b_{21}\,y_1 + b_{22}\,y_2 + \ldots\ldots + b_{2n}\,y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = b_{n1}\,y_1 + b^6{}_{n2}\,y_2 + \ldots\ldots + b_{nn}\,y_n \end{array}\right.$$

Suponiendo resueltas estas ecuaciones respecto á y, el determinante de sus coeficientes

$$M = \Sigma \pm b_{11}\,b_{22}\,b_{33}\ldots\ldots b_{nn} \qquad (2)$$

se llama el *módulo de la sustitucion*. Para que los valores de y no sean indeterminados, es preciso que dicho módulo sea diferente de cero, cualquiera que sean los valores de las variables x.

Núm. 11. Cuando el módulo M es igual á la unidad, la sustitucion lineal se llama *unimodular*, segun Sylvester.

Si la sustitucion lineal satisface á la condicion de que la suma de los cuadrados de las n variables primitivas, es igual á la suma de los cuadrados de las nuevas variables, es decir, que se tiene

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots\ldots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \ldots\ldots + y_n^2, \quad (3)$$

la sustitucion lineal se llama en este caso *sustitucion ortogonal*.

Núm. 12. *Teorema.—Si un sistema de n funciones lineales con n variables, se trasforma, por medio de una sustitucion lineal, en un nuevo sistema, el determinante de éste es igual al producto del determinante del sistema dado por el módulo de la sustitucion.*

Supongamos que se considera las tres funciones lineales

$$(4)\left\{\begin{array}{l} u_1 = a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 \\ u_2 = a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3, \\ u_3 = a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 \end{array}\right.$$

cuyo determinante es $A = \Sigma \pm a_{11}\,a_{22}\,a_{33}$.

(1) Véase el número 1.° de la REVISTA de este año.

Si se sustituye en las (4) en lugar de x sus valores deducidos de las ecuaciones (1) correspondientes al presente caso de tres variables, tendremos las siguientes expresiones:

$$(5)\left\{\begin{aligned} u_1 &= a_{11}(b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + b_{13}y_3) + a_{12}(b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + b_{23}y_3) \\ &\quad + a_{13}(b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + b_{33}y_3) \\ u_2 &= a_{21}(b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + b_{13}y_3) + a_{22}(b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + b_{23}y_3) \\ &\quad + a_{23}(b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + b_{33}y_3) \\ u_3 &= a_{31}(b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + b_{13}y_3) + a_{32}(b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + b_{23}y_3) \\ &\quad + a_{33}(b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + b_{33}y_3) \end{aligned}\right.$$

ordenándolas respecto á las variables y_1, y_2, y_3, resulta

$$\begin{aligned} u_1 &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})y_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})y_2 \\ &\quad + (a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33})y_3 \\ u_2 &= (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})y_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})y_2 \\ &\quad + (a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33})y_3 \\ u_3 &= (a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31})y_1 + (a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32})y_3 \\ &\quad + (a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33})y_3; \end{aligned}$$

en cuyas funciones se observa que los coeficientes de las nuevas variables y_1, y_2, y_3, están compuestos con los elementos de las líneas horizontales del determinante A de los coeficientes de las funciones propuestas, multiplicados por los elementos de las columnas verticales del determinante $M = \Sigma \pm b_{11} b_{22} b_{33}$, que constituye el módulo de la sustitucion, lo que demuestra el teorema enunciado.

Núm. 13. *Teorema.—En una sustitucion ortogonal, la suma de los cuadrados de los elementos de una columna vertical es igual á la unidad, y la suma de los productos de los elementos de dos verticales es igual á cero.*

En efecto, la sustitucion lineal (1) será ortogonal, si entre las primeras y las nuevas variables se verifica la relacion ya expresada

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots\ldots + y_n^2,$$

para lo cual es preciso que esta igualdad se reduzca á una identidad, cuando se sustituya en lugar de las x sus valores correspondientes por medio de las fórmulas (1); y para esto es necesario, que los coeficientes de $y_1^2, y_2^2 \ldots\ldots y_n^2$ en el primer miembro, sean iguales á la unidad, como ya lo son en el segundo miembro, y que los productos de las variables que no existen en éstos, desaparezcan en el primero despues de la sustitucion, debiendo así ser iguales á cero los coeficientes de dichos productos; por lo tanto, deberá verificarse:

$$b_{11}^2 + b_{21}^2 + b_{31}^2 + \ldots\ldots + b_{n1}^2 = 1,\; b_{12}^2 + b_{22}^2 + b_{32}^2 + \ldots\ldots + b_{n2}^2 = 1, \text{ etc.}$$

$$b_{11}\,b_{12} + b_{21}\,b_{22} + \ldots\ldots + b_{n\,1}\,b_{n\,2} = 0\,,\; b_{11}\,b_{13} + b_{21}\,b_{23} + \ldots\ldots + b_{n\,1}\,b_{n\,3} = 0\,, \text{ etc.}$$

lo que demuestra el teorema.

En general, llamando r y s dos índices distintos, cada uno de los cuales puede tomar los valores 1, 2, 3 ..... n, las fórmulas precedentes pueden compendiarse en las dos siguientes:

$$(6)\quad b_{1r}^{\,2} + b_{2r}^{\,2} + b_{3r}^{\,2} + \ldots\ldots + b_{nr}^{\,2} = 1\,,\; b_{1r}\,b_{1s} + b_{2r}\,b_{2s} + \ldots\ldots + b_{nr}\,b_{ns} = 0\,.$$

Recíprocamente, *si estas igualdades se verifican para valores de r y de s iguales á* 1, 2, 3 ..... n, *siendo siempre r distinto de s*, las relaciones (3) quedarán verificadas por medio de las fórmulas (1) de la sustitucion lineal, y esta *sustitucion será ortogonal*.

Núm. 14. Elevando al cuadrado el determinante $M = \Sigma \pm b_{11}\,b_{22}\,b_{33} \ldots\ldots b_{n}\;b_{n}$ de la sustitucion lineal, los elementos principales tendrán la forma del primer miembro de la primera de las igualdades (6), y los demás elementos de dicho cuadrado serán como el primer miembro de la segunda de estas igualdades, es decir, que serán nulos; por lo tanto, cuando la sustitucion es *ortogonal, el cuadrado del determinante de dicha sustitucion es igual á la unidad.*

Núm. 15. La primera de las igualdades (6) dá lugar á n igualdades análogas, puesto que deben formarse tantas como variables distintas existen en las fórmulas (1); y existen $\frac{1}{2}\,n\,(n-1)$ como la segunda de las igualdades (6), ó sea tantas como combinaciones de dos en dos pueden hacerse con los coeficientes de las variables y. De modo que se tienen $n + \frac{n\,(n-1)}{2}$ ó sea $\frac{n\,(n+1)}{2}$ relaciones entre los n^2 coeficientes de la sustitucion, cuando ésta es *ortogonal*; por lo tanto, quedan $n^2 - \frac{n\,(n+1)}{2} = \frac{n\,(n-1)}{2}$ coeficientes arbitrarios de que poder disponer para que las nuevas funciones, que resultan despues de la sustitucion, satisfagan á condiciones determinadas, como, por ejemplo, el hacer desaparecer algunos términos.

Núm. 16. Supongamos que se tiene una funcion de dos variables $u = f\,(x_1\,y)$, y que se adopta para las fórmulas de la sustitucion lineal

$$x = ax_1 + by_1\,,\quad y = a_1\,x_1 + b_1\,y_1\,,$$

el determinante de esta sustitucion es $M = ab_1 - ba_1$.

Si la sustitucion es ortogonal, debe tenerse:

$$a^2 + a_1^2 = 1,\ b^2 + b_1^2 = 1\ ,\ ab + a_1 b_1 = 0\ ,\ \text{(núm. 13)},$$
$$\text{y } M^2 = (ab_1 - ba_1)^2 = 1, \ldots\ldots \text{(núm. 14)}\ .$$

De estas cuatro ecuaciones, sólo tres son esencialmente distintas, pues si del producto de las dos primeras se resta el cuadrado de la tercera, se obtiene la cuarta igualdad.

En efecto, $(a^2 + a_1^2)(b^2 + b_1^2) - (ab + a_1 b_1)^2 = a^2 b_1^2 + a_1^2 b^2 - 2 ab_1 \times a_1 b = (ab_1 - ba_1)^2 = M^2 = 1$: lo que está de acuerdo con lo que en general se ha establecido en el número 15; pues en este caso $n = 2$, y por lo tanto, $n^2 = 4$, y $\frac{1}{2} n (n + 1)$, es igual á 3.

Así, debiendo satisfacer los cuatro coeficientes a , a_1 , b , b_1 , de la sustitucion ortogonal tan sólo á tres ecuaciones distintas, queda uno de ellos arbitrario.

Núm. 17. Apliquemos las fórmulas de la sustitucion *lineal ortogonal* á una ecuacion de 2.° grado completa con dos variables, con objeto de hacer desaparecer uno de sus términos, el rectángulo de las variables, por ejemplo. Sea la ecuacion $2 x^2 + 2 x y + y^2 + 4 x + 3 y + 1 = 0$, que representa una curva del género elipse. — Adoptando las fórmulas $x = ax_1 + by_1$, $y = a_1 x_1 + b_1 y$, la ecuacion se convierte en

$$(2 a^2 + 2 aa_1 + a_1^2) x_1^2 + (2 b^2 + 2 bb_1 + b_1^2) y_1^2 + (4 ab + 2 ab_1 + 2 a_1 b_1 + 2 a_1 b) x_1 y_1 + (4 a + 3 a_1) x_1 + (4 b + 3 b_1) y_1 + 1 = 0\ ,$$

despues de ordenada respecto á las nuevas variables.

Siendo la sustitucion ortogonal, se tienen las tres relaciones distintas $a^2 + a_1^2 = 1$, $b^2 + b_1^2 = 1$ $ab + a_1 b_1 = 0$, y además, segun la condicion que nos imponemos en este caso de que desaparezca el producto de las variables x_1 , y_1 , en la nueva ecuacion se tendrá $4\ ab + 2\ ab_1 + 2\ a_1 b_1 + 2\ a_1 b = 0$, que con las tres anteriores, son cuatro ecuaciones para determinar a , a_1 b , b_1 , disponiéndose además de una éstas como arbitraria, para que se cumpla la condicion impuesta. Una vez hallados estos valores y sustituidos en la ecuacion anterior, resultará la ecuacion de 2.° grado con las dos variables, sin el rectángulo de éstas.

(*Se continuará.*)

B. DONNET.

REGULADOR PARA MÁQUINA DE VAPOR.

SISTEMA DE M. SHANKS.

Este regulador tiene exteriormente la forma de una esfera. Durante la marcha, esta esfera está animada de un movimiento de rotacion, que se le