del uso, definitivo y supremo juez de ellas. Muchas de las Sociedades constructoras é industriales que se han citado en el trascurso de estos apuntes, abundando en la misma idea, han presentado sus productos diversos ya usados, y no objetos especiales para exhibirse, lo cual permite conocer la medida exacta del estado de prosperidad de las mismas.

LUIS PAJE.

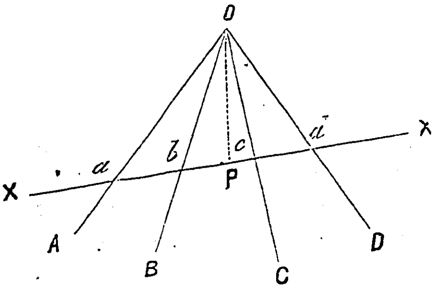
GEOMETRÍA.

CONCLUSION DEL ARTICULO PRIMERO. (1)

II.—HAZ ANARMÓNICO DE CUATRO RECTAS.

Núm. 8. *Definicion.*—Sean OA, OB, OC, OD (fig. 3.ª) cuatro rectas concurrentes en un punto O. Este sistema geométrico recibe el nombre de *haz de cuatro rectas.*

Fig. 3.ª



Dividiendo el sistema en dos grupos OA, OB y OC, OD, por ejemplo, formando las relaciones sencillas $\frac{\text{sen AOC}}{\text{sen BOC}}$, $\frac{\text{sen AOD}}{\text{sen BOD}}$ y despues la relacion compuesta $\frac{\text{sen AOC}}{\text{sen BOC}} : \frac{\text{sen AOD}}{\text{sen BOD}}$, se designa á esta última con el nombre de relacion anarmónica del *haz* OABCD.

Existe una perfecta analogía entre la relacion anarmónica de cuatro puntos y la de cuatro rectas: el sistema de formacion es idéntico, y basta sustituir á los segmentos los senos de los ángulos para pasar de una á otra.

De igual manera que en la relacion anarmónica de cuatro puntos, existen 24 relaciones agrupando de distinto modo las cuatro rectas del *haz*, de las cuales sólo *seis* son distintas, y de éstas, *tres son inversas de las otras tres.*

Puede reducirse toda la teoría de los *haces* á la de *puntos situados en línea recta.*

(1) Véase el número 2.º de la REVISTA de este año.

Núm. 9. *Teorema fundamental.*—Imaginemos un haz OABCD (figura 3.ª) cortado por una secante ó trasversal XX. Sean a, b, c, d, los puntos en que dicha trasversal corta á las rectas OA, OB, OC, OD.

Veamos cómo la relacion anarmónica

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd}$$

de los cuatro puntos a, b, c, d, es igual á la relacion anarmónica

$$\frac{\text{sen AOC}}{\text{sen BOC}} : \frac{\text{sen AOD}}{\text{sen BOD}}$$

del *haz*, sea cual fuere la posicion XX de la secante.

Las áreas de los triángulos Oac, Obc, Oad, Obd, pueden expresarse de dos maneras distintas.

1.ª Por el producto de los lados concurrentes en O por la mitad del seno del ángulo que formen cada dos de dichos lados.

2.ª Por el producto de las bases por la mitad de la altura Op.

Así, pues, tendremos:

$$\begin{aligned} \text{O}a \times \text{O}c \times \text{sen AOC} &= ac \times \text{O}p \\ \text{O}b \times \text{O}c \times \text{sen BOC} &= bc \times \text{O}p \\ \text{O}a \times \text{O}d \times \text{sen AOD} &= ad \times \text{O}p \\ \text{O}b \times \text{O}d \times \text{sen BOD} &= bd \times \text{O}p\,. \end{aligned}$$

Dividiendo la *primera ecuacion* por la *segunda*, la *tercera* por la *cuarta* y las dos ecuaciones resultantes una por otra, tendremos:

$$\frac{\text{O}a \times \text{O}c \times \text{sen AOC}}{\text{O}b \times \text{O}c \times \text{sen BOC}} : \frac{\text{O}a \times \text{O}d \times \text{sen AOD}}{\text{O}b \times \text{O}d \times \text{sen BOD}}$$
$$= \frac{ac \times \text{O}p}{bc \times \text{O}p} : \frac{ad \times \text{O}p}{bd \times \text{O}p};$$

y simplificando:

$$\frac{\text{sen AOC}}{\text{sen BOC}} : \frac{\text{sen AOC}}{\text{sen BOC}} = \frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd},$$

que es lo que se quería demostrar.

Núm. 10. El teorema anterior permite reducir desde luégo la teoría de los *haces* anarmónicos, á la teoría de las relaciones anarmónicas de los segmentos de una recta.

Así, llamando M, N y P las tres relaciones anarmónicas principales de un haz, análogas á las m, n, p, de cuatro puntos, tendremos, conforme ántes se demostró para éstos, que las de aquéllos se hallan tambien enlazadas por las siguientes igualdades:

$$\text{M} = 1 - \frac{1}{\text{N}}\,;\ \text{N} = 1 - \frac{1}{\text{P}}\,;\ \text{P} = 1 - \frac{1}{\text{M}}\,.$$

Vemos, pues, que para demostrar *cualquier proposicion* relativa á un haz de cuatro rectas, basta, por regla general, cortar dicho haz por una secante XX, establecer entre las relaciones anarmónicas de los puntos a, b, c, d una relacion analítica, análoga á la que nos proponemos probar, y sustituir en esta última por m, n y p, sus iguales M, N y P.

Núm. 11. Como en el caso de dos relaciones anarmónicas entre puntos, si se tienen dos haces, cuyas relaciones anarmónicas son iguales, se llaman rectas correspondientes en los dos haces, las rectas *cuyas letras* entran del mismo modo en las dos relaciones.

Observacion.—El valor de la relacion anarmónica de cuatro rectas, no varía porque se sustituyan una ó varias de éstas por su prolongacion, siempre que se midan los ángulos segun la regla establecida.

Núm. 12. Si las cuatro rectas del haz giran alrededor del punto O, los ángulos que forman entre sí variarán, y por lo tanto, variará en general el valor de la relacion anarmónica. Pero pueden variar los ángulos de tal modo, que las variaciones se compensen, y el valor de la relacion anarmónica quede invariable.

En efecto, si trazamos una secante XX, y hacemos variar los puntos a, b, c, d, de suerte que las relaciones anarmónicas de los sistemas a, b, c, d; a', b', c', d'; a'', b'', c'', d'', etc., sean iguales, lo serán tambien las de los haces correspondientes, en virtud del teorema fundamental.

Núm. 13. *Problema.*—Dadas tres rectas concurrentes OA, OB, OC, determina otra OD, tal que la relacion anarmónica del *haz* OABCD correspondiente á la agrupacion OA, OB, y OC, OD, sea igual á una magnitud conocida M.

Tracemos una secante XX (fig. 3.ª), y determinemos el punto d de modo que (núm. 6)

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = \mathrm{M}.$$

Uniendo el punto d al O, OD será la recta buscada.

En efecto: relacion anar (OABCD) = relacion anar (a, b, c, d);
relacion anar (a, b, c, d) = M;
luego relacion anar (OABCD) = M.

Núm. 14. Puesto que M puede tener un valor arbitrario, dedúcese de aquí que la relacion anarmónica del haz puede variar entre $-\infty$ y $+\infty$.

Núm. 15. *Teorema.*—Dados dos sistema de cuatro puntos a, b, c, d, el primero, a', b', c', d', el segundo sobre dos rectas XX, X'X', en los que se corresponden los puntos a, a'; b, b'; c, c'; d, d'; y tales que las rectas aa', bb', cc', dd', que unen los puntos homólogos ó correspondientes, concurren en un punto O, la relacion anarmónica del sistema $abcd$ será igual á la del $a'b'c'd'$.

En efecto; la relacion anarmónica de ambos sistemas, es igual á la relacion anarmónica del haz que forma las rectas que unen los puntos homólogos.

O de otro modo:

Si cortamos un haz de cuatro rectas por secantes cualesquiera, las relaciones anarmónicas de los puntos de interseccion serán iguales.

(*Se continuará.*)

B. D.

LIGERA NOTICIA

SOBRE LAS VIAS FÉRREAS ECONÓMICAS DE CATALUÑA.

(Conclusion.)

Las obras de fábrica de mayor importancia son los dos puentes proyectados para los torrentes del Ruidó y de Puigreig, de dos arcos de medio punto de 10'00 metros de luz el primero, y de un sólo arco, de igual clase, el segundo, y los viaductos de la Granja, de Coll del Albax, del Guixaró y de Clará, que tienen alturas comprendidas entre 15 y 20 metros sobre los respectivos cáuces. Estos viaductos se componen todos ellos de arcos de medio punto de 10'000 metros de luz, en número variable entre tres y ocho arcos, segun las obras; todos ellos se proyectan de fábrica, por existir buena y abundante en la localidad la piedra de construccion, y por salir, de los mismos desmontes de la línea, excelentes materiales para mamposterías. Las fundaciones de todas las obras se establecen siempre directamente sobre la roca fuerte que constituye el lecho de los cáuces. En tales circunstancias, estas obras resultan muy económicas.

Actualmente se ha emprendido la perforacion del único túnel proyectado, de 150 metros de longitud, el cual debe abrirse á través de grandes bancos de arenisca muy dura y compacta.

Partiendo la línea, como se ha dicho, de la misma estacion de Manresa en el ferro-carril de Zaragoza á Barcelona, encuentra en su trayecto las poblaciones de Sampedor, Sallent, Balsareny, Navás, Puigreig y Gironella, en todas las cuales se construyen estaciones, pasando además junto á 16 grandes fábricas de hilados y tejidos de algodon, establecidas unas á continuacion de otras en el río Llobregat, en la misma ladera por donde correrá la vía férrea.

Para el importante tráfico que han de proporcionar á la línea estos establecimientos industriales, cuya fuerza motriz útil puede calcularse entre 200 y 300 caballos dinámicos, se proyectan apeaderos, tinglados para mercancías y desvíos que faciliten la carga y descarga.

El tráfico con que se ha contado para calcular los productos de esta línea es el siguiente: