plazamiento correspondiente á la parte del ponton que se quiera dejar fuera del agua.

La construccion del dique no ofrece dificultad; planchas de palastro establecidas en el sentido longitudinal y trasversal, á la vez que sirven para formar los compartimientos, constituyen una série de vigas tubulares cuyo conjunto forma una sola perfectamente rígida. Los esfuerzos á que el total de éste y cada una de sus partes estarán sometidas, están representados por las diferencias entre el poder ascensional del dique y su carga, diferencias cuyo mayor valor y mayor brazo de palanca corresponde al esfuerzo ejercido en sentido trasversal por los flotadores. Claro es que esto supone que el dique no se halle expuesto á grandes marejadas, sino que esté apoyado en toda su extension sobre la masa líquida.

La estabilidad del sistema es evidente á la simple inspeccion de la forma del dique. Y no hay necesidad de trazar la curva de los metacentros para comprender que la situacion del par de estabilidad tenderá siempre á drizarle, máxime cuando sus costados se hallen en su posicion de inmersion; se aumenta entónces la relacion entre la manga y la eslora y desciende á la vez el centro de gravedad de la obra viva. Recientes trabajos que sobre este particular hemos hecho, nos permiten asegurar que un dique capaz de elevar un barco de 2.000 toneladas no costará más de 2.000.000 de pesetas.

J. B.

ALGORITMO DE LA FORMA. (1)

CONCLUSION DEL ARTICULO SEGUNDO.

SUSTITUCION LINEAL.

Núm. 18. Valiéndonos de una sustitucion lineal muy sencilla, se puede hacer desaparecer el segundo término de una ecuacion.

Sea la ecuacion $x^{m} + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots\ldots + A_m = 0.$

Pongamos $x = y + k$; sustituyendo, la ecuacion se convierte en $(y+k)^{m} + A_1 (y+k)^{m-1} + A_2 (y+k)^{m-2} + \ldots\ldots + A_m = 0$, y desarrollando

$$y^{m} + (m\,k + A_1)\,y^{m-1} + \ldots\ldots = 0.$$

De modo que, para que despues de la trasformacion desaparezca el 2.°

(1) Véase el número 3.° de la **Revista** de este año.

término, basta hacer $mk + A_1 = 0$, ó $k = -\frac{A_1}{m}$, y en efecto, así debía verificarse; pues la igualdad $y = x - k$, indica que las raíces de la nueva ecuacion son iguales á las de la propuesta disminuidas de la cantidad constante k; por lo tanto, la suma de las raíces de la ecuacion trasformada, es igual á la suma de las raíces de la primera, es decir, á $- A_1$ menos mk; y como el coeficiente del segundo término es precisamente igual á dicha suma, debe tenerse $- A_1 - mk = 0$, ó $A_1 + mk = 0$, si ha de desaparecer dicho término.

Así, por ejemplo, en una ecuacion de tercer grado completa desaparecerá el segundo término poniendo $x = y - \frac{A_1}{3}$, y la ecuacion quedará en la forma más sencilla

$$y^3 + py + q = 0 .$$

Núm. 19. Tambien puede reducirse la ecuacion de tercer grado á la forma binomia por medio de la trasformacion lineal

$$y = \frac{x + a}{x + b}, \text{ de donde } x = \frac{a - by}{y - 1} .$$

En efecto; consideremos la ecuacion ya simplificada

$$x^3 + px + q = 0 .$$

Es fácil ver, que despues de la sustitucion los coeficientes de y^2 y de y en la ecuacion trasformada, son respectivamente:

$$3ab^2 + pa + 2pb - 3q , \text{ y } 3a^2b + 2pa + pb - 3q .$$

Igualando dichas expresiones á cero, se deducirán los valores de a y b, en funcion de los coeficientes p y q de la ecuacion propuesta, cuyos valores convertirán á éstas en una ecuacion binomia.

Eliminando en dichas expresiones los dos primeros términos, y despues los dos últimos, y dividiendo por $a - b$, se deduce

$$a + b = \frac{3p}{q}, \quad ab = -\frac{p}{3} .$$

Así las dos constantes a y b, son las raíces de una ecuacion de 2.° grado.

Hecha la trasformacion, la ecuacion binomia resultante es

$$(b^3 + pb - q)\, y^3 - (a^3 + pa - q) = 0 ,$$

de donde se deduce

$$y = \sqrt[3]{\frac{a^3 + pa - q}{b^3 + pb - q}} ,$$

quedando así resuelta la ecuacion de tercer grado.

ARTICULO TERCERO.

INVARIANTES.

DEFINICION.—DETERMINACION DE LA INVARIANTE DE UNA Ó DOS FORMAS BINARIAS.—SIGNIFICACION DE LAS INVARIANTES EN LAS FORMAS BINARIAS Y TERNARIAS CUADRÁTICAS.

Núm. 20. Si se tiene una forma de un número cualquiera de variables

$$(1) \qquad u = (a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots)(x, y, z, \ldots\ldots)$$

y en virtud de la sustitucion lineal $x = l_1 X + m_1 Y + n_1 Z + \ldots\ldots$, $y = l_2 X + m_2 Y + n_2 Z + \ldots\ldots$, $z = l_3 X + m_3 Y + n_3 Z + \ldots\ldots$, se convierte en

$$U = (A_0, A_1, A_2, \ldots\ldots)(X, Y, Z, \ldots\ldots) \qquad (2).$$

Si á la vez se tiene

$$(3) \qquad \varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots)$$

una funcion de los coeficientes de la u, y se forma la funcion análoga de los coeficientes de la trasformada U; si resulta

$$(4) \qquad \varphi(A_0, A_1, A_2, \ldots\ldots) = M^m \varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots),$$

siendo M el módulo de la sustitucion y m un número entero, la funcion φ se llama INVARIANTE de la forma u.

Núm. 21. Cuando $m = 0$, cualquiera que sea M, la (4) se convierte en $\varphi(A_0, A_1, A_2, \ldots\ldots) = \varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots)$, y así la *invariante* queda inalterable despues de la sustitucion, y se llama *invariante absoluta*.

Tambien queda inalterable la invariante cuando la sustitucion es unimodular (núm. 11), porque entónces $M = 1$.

Núm. 22. En general, si á un sistema de formas de las mismas variables, en virtud de una sustitucion lineal, los primitivos coeficientes $a_0, a_1, \ldots\ldots$; $b_0, b_1, \ldots\ldots$; $c_0, c_1, \ldots\ldots$, etc., se convierten en $A_0, A_1, \ldots\ldots$; $B_0, B_1, \ldots\ldots$; $C_0, C_1, \ldots\ldots$; si una funcion de los primeros coeficientes despues de la trasformacion se convierte en una funcion análoga de los segundos coeficientes, tal que se tiene

$$\varphi(A_0 \ldots\ldots, B_0 \ldots\ldots, C_0 \ldots\ldots, \text{etc.}),$$
$$= M^m \varphi(a_0 \ldots\ldots, b_0 \ldots\ldots, c_0 \ldots\ldots, \text{etc.});$$

la funcion φ es una *invariante* del sistema de formas propuesto.

Esta definicion es la misma que la anterior, si las formas dadas se convierten en ecuaciones.

Núm. 23. Supongamos que se tiene la forma binaria cuadrática

$$u = a_0 x^2 + 2a_1 xy + a_2 y^2 \qquad (5),$$

cuyo discriminante es $a_0 a_2 - a_1^2$ (núm. 4).

Supongamos que se tiene $x = l_1 X + m_1 Y$, $y = l_2 X + m_2 Y$; sustituyendo estos valores en la (5), resulta para el nuevo valor de u

$$U = A_0 X^2 + 2A_1 XY + A_2 Y^2,$$

en cuya ecuacion es

$$A_0 = a_0 l_1^2 + 2a_1 l_1 l_2 + a_2 l_2^2, \; A_2 = a_0 m_1^2 + 2a_1 m_1 m_2 + a_2 m_2^2,$$
$$\text{y } A_1 = a_0 l_1 m_1 + a_1 (l_1 m_2 + m_1 l_2) + a_2 l_2 m_2 \qquad (6),$$

y sustituyendo en el discriminante $a_0 a_2 - a_1^2$, de la primitiva forma, en lugar de a_0, a_1, a_2, estos valores de A_0, A_1, A_2, para constituir la funcion análoga en la ecuacion trasformada, se obtiene

$$A_0 A_2 - A_1^2 = (l_1 m_2 - m_1 l_2)^2 (a_0 a_2 - a_1^2);$$

por lo tanto, el discriminante de la forma binaria (5) es una *invariante*, puesto que $(l_1 m_2 - m_1 l_2)$ es el módulo de la sustitucion.

Núm. 24. Sean las dos formas binarias

$$u = a_0 x^2 + 2a_1 xy + a_2 y^2, \; u_1 = b_0 x^2 + 2b_1 xy + b_2 y^2,$$

y sea $I = a_0 b_2 + b_0 a_2 - 2a_1 b_1$ una funcion de sus coeficientes; hecha la sustitucion lineal las trasformadas serán

$$U = A_0 X^2 + 2A_1 XY + A_2 Y^2, \; U_1 = B_0 X^2 + 2B_1 XY + B_2 Y^2,$$

en las que los coeficientes (A) tendrán por valores los indicados en las fórmulas anteriores (6), y los coeficientes (B) se deducirán de aquéllos sustituyendo las (a) por las (b). Verificada la sustitucion de dichos valores en la I análoga á la propuesta, y correspondiente á las ecuaciones trasformadas, se tiene

$$A_0 B_2 + B_0 A_2 - 2A_1 B_1 = (l_1 m_2 - m_1 l_2)^2 (a_0 b_2 + b_0 a_2 - 2a_1 b_1),$$

cuando la funcion $a_0 b_2 + b_0 a_2 - 2a_1 b_1$ es una *invariante*.

Núm. 25. *El determinante de un sistema de ecuaciones lineales es una invariante*. En efecto, consideremos las dos ecuaciones lineales

$$a_{11} x + a_{12} y = 0, \; a_{21} x + a_{22} y = 0,$$

cuyo determinante es $D = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix}$.

Usando las fórmulas de la trasformacion lineal $x = l_1 X + m_1 Y$, $y = l_2 X + m_2 Y$, las nuevas ecuaciones serán

$$(a_{11} l_1 + a_{12} l_2) X + (a_{11} m_1 + a_{12} m_2) Y = 0, \; (a_{21} l_1 + a_{22} l_2) X$$
$$+ (a_{21} m_1 + a_{22} m_2) Y = 0.$$

El determinante de estas ecuaciones es

$$\begin{vmatrix} a_{11}\, l_1 + a_{12}\, l_2 \,,\, a_{11}\, m_1 + a_{12}\, m_2 \\ a_{21}\, l_1 + a_{22}\, l_2 \,,\, a_{21}\, m_1 + a_{22}\, m_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_{11}\,, & a_{12} \\ a_{21}\,, & a_{22} \end{vmatrix} = \mathrm{MD},$$

lo que demuestra el principio enunciado.

Núm. 26. *Significacion de las invariantes en una forma binaria cuadrática.*—Sea la ecuacion completa de 2.° grado con dos variables.

$$\mathrm{A}y^2 + 2\mathrm{B}xy + \mathrm{C}x^2 + 2\mathrm{D}y + 2\mathrm{E}x + \mathrm{F} = 0.$$

Cambiando de direccion de ejes por medio de las fórmulas

$$x = l_1\, x' + m_1\, y' \;,\; y = l_2\, x' + m_2\, y',$$

equivalentes á una sustitucion lineal, se tendrá una nueva ecuacion de la forma

$$\mathrm{A}'y^2 + 2\mathrm{B}'xy + \mathrm{C}'x^2 + 2\mathrm{D}'y + 2\mathrm{E}'x + \mathrm{F} = 0\,,$$

en la que los nuevos coeficientes serán funcion de l_1, m_1, l_2 y m_2.

Cambiando despues de orígen, con objeto de hacer desaparecer los términos de primer grado, hallando al intento los valores de las coordenadas y_0 y x_0 del nuevo orígen respecto al primitivo (los que resultarán de igualar á cero los coeficientes de los términos de primer grado, despues de la trasformacion), tendremos la ecuacion propuesta en la forma $\mathrm{A}'y^2 + 2\mathrm{B}'xy + \mathrm{C}'x^2 + \mathrm{F} = 0$.

Ya en esta forma, el discriminante de la misma es $\mathrm{A}'\mathrm{C}' - \mathrm{B}'^2$, segun mos visto en una forma análoga en el número 4 del artículo 1.°

En el número 23 hemos visto que el discriminante de esta forma es una invariante. De modo que en este caso tendremos

$$\mathrm{A}'\mathrm{C}' - \mathrm{B}'^2 = \mathrm{M}^2\,(\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2),\text{ ó cambiando de signo}$$

$$\mathrm{B}'^2 - \mathrm{A}'\mathrm{C}' = \mathrm{M}^2\,(\mathrm{B}^2 - \mathrm{AC}),$$ siendo M el módulo de la sustitucion é igual, por lo tanto, á $l_1\, m_2 - m_1\, l_2$ (núm. 10).

Por lo tanto, $\mathrm{B}^2 - \mathrm{AC}$ es una invariante de la ecuacion de 2.° grado con dos variables, y segun resulta de la discusion de estas ecuaciones, el que la *invariante* sea mayor, menor ó igual á cero, determina si la curva que representa dicha forma es una hipérbola, una elipse ó una parábola.

Núm. 27. Segun vimos en el número 5 de estos apuntes, el *discriminante* de la ecuacion de 2.° grado completa con dos variables, está representado por

$$\Delta = (\mathrm{BD} - \mathrm{AE})^2 - (\mathrm{B}^2 - \mathrm{AC})\,(\mathrm{D}^2 - \mathrm{AF}).$$

Y segun se deduce de la discusion de estas ecuaciones, y se indicó en el número 6, el signo del discriminante caracteriza la especie ó variedad de la curva que las mismas representan dentro de cada género.

Así, si la *invariante* $\mathrm{B}^2 - \mathrm{AC} > 0$, la forma binaria cuadrática representa una hipérbola, y si además el *discriminante* $\Delta > 0$ la hipérbola es real; si $\Delta = 0$, la hipérbola se convierte en dos rectas concurrentes, y si $\Delta < 0$, se tiene tambien una hipérbola real.

Si la *invariante* $B^2 - AC = 0$, la ecuacion propuesta representa, como sabemos, una parábola, y si además el *discriminante* Δ es mayor ó menor que cero, la parábola es real; y si Δ es igual á cero, se tiene el caso particular de dos rectas paralelas, reales ó imaginarias.

Vemos, pues, como la *invariante* y el *discriminante*, caracterizan el género y la especie de curva ó lugar que corresponde en cada caso, asignando la forma geométrica de las ecuaciones que hemos considerado.

Núm. 28. *Discriminante é invariante de la forma ternaria cuadrática.*

Sea la ecuacion de 2.° grado con tres variables,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy + 2Gx + 2Hy + 2Iz + K = 0.$$

Sustituyendo en vez de las variables x, y, z; $\frac{x}{u}$, $\frac{y}{u}$, $\frac{z}{u}$, con objeto de hacer homogénea dicha ecuacion, ésta podrá ponerse en la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2(Dyz + Exz + Fxy) + 2(Gx + Hy + Iz)u + Ku^2 = 0.$$

Las derivadas de esta ecuacion respecto á cada variable, son

$$Ax + Fy + Ez + Gu\,;\; Fx + By + Dz + Hu\,;\; Ex + Dy + Cz + Iu\,;\; Gx + Hy + Iz + Ku.$$

Por lo tanto, el *discriminante* de dicha ecuacion es

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & F & E & G \\ F & B & D & H \\ E & D & C & I \\ G & H & I & K \end{vmatrix}.$$

Tomando las derivadas únicamente de los términos de 2.° grado de la ecuacion ternaria propuesta, el determinante de sus coeficientes, y por lo tanto el *discriminante* de la suma de dichos términos de 2.° grado, es

$$P = \begin{vmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{vmatrix}.$$

Estos *discriminantes* son dos *invariantes* de la forma ternaria cuadrática, pues cuando se cambia de orígen en coordenadas rectangulares, dicha trasformacion equivale á una *sustitucion ortogonal*, y despues de obtener la ecuacion trasformada, las expresiones de Δ y P quedarán invariables de forma.

Núm. 29. Segun resulta de la discusion de la ecuacion propuesta, si la *invariante* P es distinta de cero, dicha ecuacion representa *una superficie* *con un sólo centro.* Si $P = 0$, *la superficie no tiene centro, ó lo tiene en el infinito*; ó la superficie admite *infinidad de centros bien en una línea recta, ó en un sólo plano*, segun que los numeradores de los valores que determinan dicho centro, sean distintos de cero, ó sean nulos.

(*Se continuará.*)

B. DONNET.

LA VENTILACION,

TEMPERATURA, ENFRIAMIENTO Y HUMEDAD DEL AIRE EN EL GRAN TÚNEL DE «SAINT-GOTHARD.»

En la Memoria trimestral presentada para 1881 por el Consejo federal suizo á los Estados interesados en la construccion de la línea de *Saint-Gothard*, se encuentra un escrito del doctor F. M. Stapff, relativo á las cuestiones que se relacionan con la salubridad de los grandes túneles, y que son objeto de numerosas discusiones; algunas publicaciones extranjeras han creido oportuno reproducir en sus partes más esenciales este trabajo, y la REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS cree conveniente, tomándola de una revista francesa, dar á conocer este escrito á aquellos de nuestros compañeros que, por cualquier causa, no hubiesen tenido ocasion de leerlo en alguna de aquellas revistas.

TEMPERATURA Y ENFRIAMIENTO DEL AIRE.

Se ha tomado la temperatura del aire en diversos puntos del túnel durante el año 1881; del mismo modo se había observado con cuidado la temperatura de la boca, recientemente descubierta, durante el curso de los trabajos de excavacion del túnel; además de esto, en las observaciones se indicaba la direccion de la corriente que podía existir.

1.° Corriente del Norte.
2.° Corriente del Sur.
3.° Corriente nula ó alternativa muy débil.
4.° Corriente del Norte en la base y del Sur en el techo.

Por último, se tenía en cuenta la naturaleza del terreno, ó mejor dicho, su resistencia, especificando los puntos en que se encontraba.

Estos numerosos datos permitieron formar un cuadro que dá cuenta de las variaciones de la temperatura del túnel segun el sentido de la corriente reinante y la temperatura simultánea del aire en las bocas del túnel.

Se vió que:

1.° La corriente del S. refresca la mitad meridional del túnel y calienta la parte septentrional, miéntras que la corriente del N. produce el efecto inverso.