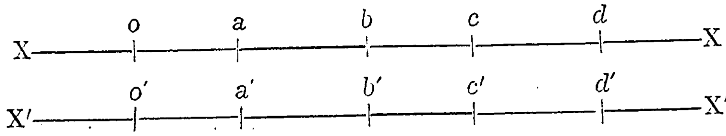
GEOMETRÍA. (1)

ARTICULO SEGUNDO.

SISTEMAS HOMOGRÁFICOS.

Núm. 16. *Definiciones.*—Imaginemos dos rectas XX, XX′ (fig. 3.ª) indefinidas, y sobre cada una un sistema de puntos: a, b, c . . . . . , sobre la primera; a', b', c' . . . . . , sobre la segunda, y supongamos además, que dichos puntos se corresponden dos á dos, es decir, a y a'; b y b'; c y c'.



Siempre que en dos sistemas de puntos, supongamos unidos cada punto de un sistema á otro determinado del segundo, diremos que dichos puntos son *correspondientes ó conjugados.* Así a y a'; b y b'; c y c' —, serán puntos *correspondientes* ó *conjugados* de los dos sistemas propuestos.

Si se determina cada punto del primer sistema por su distancia positiva ó negativa á un orígen O, y cada punto del segundo por su distancia contada sobre la recta X′X′, á su orígen O′; y si, finalmente, ambas distancias x y x' se expresan en funcion de una misma variable t, por las ecuaciones

$$x = f(t) \; ; \; x' = f_1(t);$$

de tal suerte, que á cada valor de t sólo corresponda un valor de x y otro de x', las dos séries de puntos que resulten sobre las rectas XX, X′X′, se hallarán comprendidas en el caso de que venimos ocupándonos, y los dos valores x_1, x_1', correspondientes á un mismo valor t_1 de t determinarán dos puntos conjugados.

Se dice que dos sistemas de puntos a, b, c . . . . . , a', b', c' . . . . . , *situados sobre dos rectas* XX, X′X′ (fig. 3.ª) son HOMOGRÁFICOS, *cuando tomando cuatro puntos arbitrarios del primer sistema — por ejemplo,* b, d, f, a —, *y los conjugados —* b', d', f', a' — *del segundo, la relacion anarmónica de los cuatro primeros es siempre igual á la relacion anarmónica de los cuatro últimos:* — por ejemplo:

$$\frac{bf}{df} : \frac{ba}{da} = \frac{b'f'}{d'f'} : \frac{b'a'}{d'a'} \, ,$$

y esto, sean cuales fueren los puntos elegidos.

---

(1) Véanse los números 2.º y 4.º de la REVISTA de este año.

Núm. 17. Supongamos que se dan cuatro puntos sobre la recta XX del primer sistema a, b, c, d, y se tienen los tres puntos a', b', c' del segundo en la recta XX', y se desea obtener el cuarto punto d' de este sistema, de modo que la relacion anarmónica de los cuatro primeros, sea igual á la relacion anarmónica de los tres segundos y el punto desconocido d': es decir, que dados siete puntos se desea obtener el octavo, conjugado *homográficamente*, con uno de los siete. Tendremos

$$\frac{a'c'}{b'c'} : \frac{a'd'}{b'd'} = \frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = m,$$

representando por m la cantidad conocida $\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd}$, deduciéndose así la posicion del punto d', y sólo una posicion para este punto.

Igualmente podremos determinar los puntos e', f', g' . . . . . del segundo sistema, por las condiciones

$$\frac{a'c'}{b'c'} : \frac{a'e'}{b'e'} = \frac{ac}{bc} : \frac{ae}{be} \; ; \; \frac{a'c'}{b'c'} : \frac{a'f'}{b'f'} = \frac{ac}{bc} : \frac{af}{bf} \ldots\ldots, \text{etc.};$$

y en general el sistema de puntos a', b', c', d', e', f' . . . . . , determinado por las ecuaciones

$$R_{anar}\,(a, b, c, d), = R_{anar}\,(a', b', c', d');$$

y las demás análogas entre los puntos conjugados, cumple con las condiciones de la homografía, es decir, que se tiene

$$R_{anar}\,(e, f, g, h); = R_{anar}\,(e', f', g', h);$$

sean cuales fueren los puntos de la agrupacion que se considere.

En efecto, consideremos á las rectas XX y X'X', colocadas de modo que coincidan los puntos correspondientes a y a', y supongamos unidos los puntos conjugados b y b'; c y c'; d y d', etc., dos á dos: todas las rectas bb', cc', dd' . . . . . , pasarán por un mismo punto O: porque siendo iguales las relaciones anarmónicas de a, b, c, d, y de a', b', c', d', las rectas bb', cc', dd', formarán un haz anarmónico con la aO (núm. 15), y dichas rectas pasarán por el mismo punto O: del mismo modo, como los sistemas a, b, c, e, y a', b', c', e', tienen igual relacion anarmónica, la recta ee' pasará por el punto de interseccion O de las bb', cc'; y lo mismo sucederá para las rectas ff', gg' . . . . . ; y puesto que los ocho puntos e, f, g, h; e', f', g', h', están sobre las rectas correspondientes de un haz anarmónico, resulta

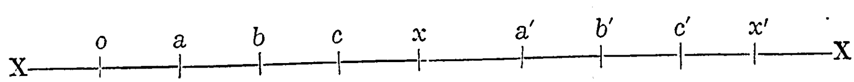
$$R_{anar}\,(e, f, g, h), = R_{anar}\,(e', f', g', h').$$

De lo que se deduce, que los sistemas homográficos son posibles, y se ve la manera de construir tantos sistemas *homográficos* como se quiera.

Bastará cortar las rectas de un haz anarmónico por secantes cualesquiera, y los puntos de interseccion constituirán un sistema homográfico, pues todos ellos tendrán igual relacion anarmónica.

Núm. 18. Tratemos de determinar analíticamente la ley que enlaza dos sistemas homográficos distribuidos sobre la misma recta XX.

Fig. 5.ª



Sean: O el orígen de la abcisa variable que fija la posicion de cada punto sobre la recta XX.

a, b, c, *tres* puntos arbitrarios del primer sistema; $Oa = a$; $Ob = b$; $Oc = c$, las abcisas de dichos tres puntos; a', b', c', los puntos del segundo sistema conjugados con los a, b, c, del primero, y sus abcisas respectivas, $Oa' = a'$; $Ob' = b'$; $Oc' = c'$.

Determinemos la relacion que existe entre las abcisas x y x' de dos puntos conjugados cualesquiera, y veamos cuál es la naturaleza de dicha funcion.

Como los sistemas son homográficos, la relacion anarmónica de a, b, c, x, será la misma que la de sus puntos conjugados a', b', c', x', tendremos, pues:

$$\frac{ab}{ac} : \frac{xb}{xc} = \frac{a'b'}{a'c'} : \frac{x'b'}{x'c'} .$$

Refiriendo todas las distancias al orígen O, y sustituyendo en lugar de ab, ac, xb, etc., sus valores, resultará

$$\frac{b-a}{c-a} : \frac{b-x}{c-x} = \frac{b'-a'}{c'-a'} : \frac{b'-x'}{c'-x'} ;$$

de donde se deduce

$$\frac{(b-a)\,c-(b-a)\,x}{(c-a)\,b-(c-a)\,x} = \frac{(b'-a')\,c'-(b'-a')\,x'}{(c'-a')\,b'-(c'-a')\,x'} ,$$

y suponiendo para simplificar

$$(b-a)\,c = m\,;\; b-a = n\,;\; (c-a)\,b = p\,;\; c-a = q\,;$$
$$(b'-a')\,c' = m'\,;\ \text{etc.},$$

se tendrá

$$\frac{m - nx}{p - qx} = \frac{m' - n'x'}{p' - q'x'} .$$

Por último, quitando denominadores y simplificando

$$(m\,p' - m'p) + (m'q - np')\,x + (n'p - mq')\,x' + (nq' - n'q)\,xx' = 0,$$

y llamando para abreviar á los coeficientes, A, B, C y D,
se tendrá

$$\mathrm{A} + \mathrm{B}x + \mathrm{C}x' + \mathrm{D}xx' = 0,$$

para una de las expresiones más sencillas de la homografía. de dos sistemas de puntos determinados por sus abcisas x y x'.

De esta ecuacion se deduce

$$(p)\ x' = -\frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}x}{\mathrm{C} + \mathrm{D}x}\ ;\ \text{ó bien}\ x = -\frac{\mathrm{A} + \mathrm{C}x'}{\mathrm{B} + \mathrm{D}x'} : (p'),$$

igualdades que demuestran que á cada valor de x, sólo corresponde otro de x' y recíprocamente. Los puntos definidos por la ecuacion anterior son, como debían ser, conjugados dos á dos.

Núm. 19. *Proposicion recíproca.*—Dando valores á x en la ecuacion

$$(h)\ \mathrm{A} + \mathrm{B}x + \mathrm{C}x' + \mathrm{D}xx' = 0,$$

y determinando los correspondientes de x', las dos séries de puntos a, b, c . . . . . , a', b, $'c'$ . . . . . , determinados por estos diversos valores de x y x', constituyen dos *sistemas homográficos.*

En efecto: para ello demostraremos, que fijando cuatro puntos arbitrarios por cuatro valores de x, y hallando por la fórmula (h) los correspondientes de x', los puntos que resultan son tales, que las relaciones anarmónicas de ambos grupos son iguales; es decir, que sustituyen un *sistema homográfico.*

Sean a, b, c, d, los cuatro valores de x: los correspondientes x' estarán determinados por medio de las fórmulas (p) y (p'), que ántes hemos deducido de la ecuacion de homografía, y tendremos para expresion de los puntos conjugados

$$-\frac{\mathrm{A} + \mathrm{Ba}}{\mathrm{C} + \mathrm{Da}}\ ;\ -\frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}b}{\mathrm{C} + \mathrm{D}b}\ ;\ -\frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}c}{\mathrm{C} + \mathrm{D}c}\ ;\ -\frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}d}{\mathrm{C} + \mathrm{D}d},$$

de modo que si la relacion anarmónica de los primeros, es

$$\frac{c - \mathrm{a}}{c - b} : \frac{d - \mathrm{a}}{d - b}\ ;$$

la de sus conjugados a', b', c', d', tendrá la forma

$$\frac{-\frac{A+Bc}{C+Dc}+\frac{A+Ba}{C+Da}}{-\frac{A+Bc}{C+Dc}+\frac{A+Bb}{C+Db}} : \frac{-\frac{A+Bd}{C+Dd}+\frac{A+Ba}{C+Da}}{-\frac{A+Bd}{C+Dd}+\frac{A+Bb}{C+Db}};$$

esta última expresion se reduce simplificando á

$$\frac{(BC-AD)\,a+(AD-BC)\,c}{(BC-AD)\,b+(AD-BC)\,c} : \frac{(BC-AD)\,a+(AD-BC)\,d}{(BC-AD)\,b+(AD-BC)\,d} =$$

$$\frac{(c-a)\,AD+(c-a)\,(-BC)}{(c-b)\,AD+(c-b)\,(-BC)} : \frac{(d-a)\,AD+(d-a)\,(-BC)}{(d-b)\,AD+(d-b)\,(-BC)} =$$

$$\frac{(c-a)\,(AD-BC)}{(c-b)\,(AD-BC)} : \frac{(d-a)\,(AD-BC)}{(d-b)\,(AD-BC)} =$$

$$\frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b},$$

que es precisamente la relacion anarmónica de los puntos a, b, c, d, tal como se había establecido.

(*Se continuará.*)

B. D.

EL SIGLO DE LA MECÁNICA.

CUATRO PALABRAS Á LOS INGENIEROS.

El siglo XIX, destinado á figurar dignamente en la historia de la humanidad, al cultivar con el mayor esmero las inteligencias, ha dado grandísimo impulso á la ciencia y el arte; creando, con sus conquistas é inventos prodigiosos, nuevas profesiones, todas ellas ramas lozanas del árbol frondoso del ingenio.

Muy difícil sería elegir, entre los nombres ya dados á este siglo, aquel más digno de perpetuarse por lo característico: recordaré á mis lectores