GEOMETRÍA. [1]

CONTINUACION DEL ARTICULO SEGUNDO.

Núm. 20. Por medio de la ecuacion de *homografía*

$$A + Bx + Cx' + Dxx' = 0,$$

se pueden resolver varios problemas, determinando al efecto los valores que deben tener las *constantes ó parámetros* A, B, C, D, que caracterizan cada sistema particular.

Supongamos que se trata de determinar un sistema homográfico, de modo que á los puntos a, b, c, cuyas abcisas representaremos por las mismas letras a, b, c, correspondan como conjugados los puntos a', b', c', cuyas abcisas sean análogamente a', b', c'.

Puesto que las abcisas a y a', b y b', c y c', determinan pares de puntos conjugados, deberán simultáneamente satisfacer á la ecuacion

$$A + Bx + Cx' + Dxx' = 0,$$

sustituyéndolas en lugar de x y x'. Tendremos, pues, entre las constantes desconocidas A, B, C, D, las ecuaciones de condicion

$$\begin{aligned} A + Ba + Ca' + Daa' &= 0 \\ A + Bb + Cb' + Dbb' &= 0 \\ A + Bc + Cc' + Dcc' &= 0, \end{aligned}$$

que darán los valores de $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$ y $\frac{C}{D}$. Sustituidos éstos en la ecuacion general, puesta en la forma $\frac{A}{D} + \frac{B}{D}x + \frac{C}{D}x' + xx' = 0$, de ésta deduciríamos para cualquiera valor de x', su conjugado x, de suerte que ambos formarían parte del sistema homográfico propuesto a, b, c; a', b', c'; es decir, que dados *siete puntos* por sus abcisas, deduciremos el valor de la *abcisa de un octavo punto*, de modo que los *ocho* formen un sistema *homográfico determinado*.

Núm. 21. En los sistemas homográficos establecidos sobre una misma recta XX, si dichos sistemas son contínuos, todo punto *es doble*, es decir, que se le puede considerar *ya como formando parte del primer sistema, ó como formando parte del segundo*; pero estos puntos no serán en general conjugados.

Hay casos en que los puntos conjugados de dos puntos a y b' que coinciden, coinciden tambien; es decir, en que a' y b se reunen en uno sólo, y entónces se dice que los puntos conjugados son *recíprocos*.

(1) Véanse los números 2.º, 4.º y 6.º de la REVISTA de este año.

Si esto se verifica para todos los puntos de la recta XX, ó lo que es igual, si los dos sistemas de puntos están agrupados por pares de puntos recíprocos, el sistema, como veremos más adelante, se dice que está en INVOLUCION.

Veamos si pueden existir puntos *conjugados dobles*, es decir, puntos que sean conjugados de ellos mismos.

Si existen tales puntos, los valores correspondientes de x y x' serán iguales, y representándolos por x_0, tendremos la ecuacion de condicion

$$A + Bx_0 + Cx_0 + x_0^2 = 0.$$

Despejando x_0, resultará

$$x_0 = -\frac{B+C}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{B+C}{2}\right)^2 - A}.$$

Existirán, pues, *dos* puntos conjugados dobles y distintos; *uno* resultado de la superposicion de otros dos; ó *ninguno*, segun que

$$\left(\frac{B+C}{2}\right)^2 - A \text{ sea } \gtreqless 0.$$

Núm. 22. En el caso particular en que se verifique $B = 0$, $C = 0$, la fórmula general se convierte en $A + Dxx' = 0$, que, como veremos más adelante, expresa un sistema en *involucion*.

Núm. 23. Si quiere determinarse el valor de las abcisas de los puntos de un sistema homográfico que correspondan á otros puntos del sistema situados en el infinito, bastará en los valores de x y x' que ántes determinamos por medio de las fórmulas (p) y (p'), dividir los segundos miembros de éstas por x' y x respectivamente, y suponer que x' ó x, crecen positiva ó negativamente hasta el infinito.

II.

HACES HOMOGRÁFICOS.

Núm. 24. Consideremos dos haces OABC . . . . . O'A'B'C' . . . . . (figura 6.ª), formados de un número finito ó infinito de rectas, pero mediando de una á otra ángulos finitos. Admitamos que á cada recta del 1.º corresponde otra recta del 2.º haz, por ejemplo: á OA, O'A'; á OB, O'B', etc.

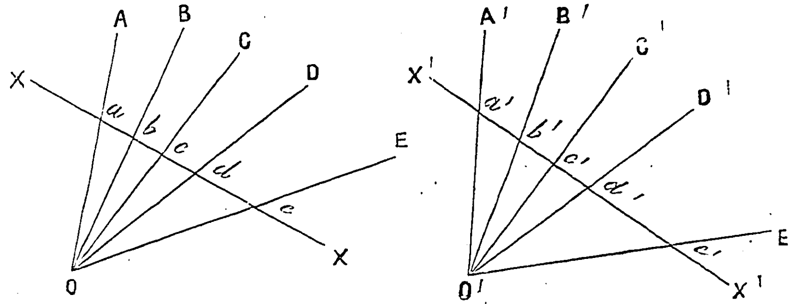
Dos haces de esta clase se dice que son *homográficos*, cuando las relaciones anarmónicas de todos los grupos de cuatro rectas que pueden formarse en el primer *haz*, son iguales respectivamente á las de los grupos correspondientes del segundo. Por ejemplo:

$$R_{anar}\,(OABCD) = R_{anar}\,(O'A'B'C'D').$$

Núm. 25. Es fácil demostrar la existencia de los *haces homográficos*.

En efecto; sean a, b, c . . . . . , a', b', c . . . . . , dos sistemas homográficos de puntos distribuidos sobre las rectas XX, X'X': tomemos dos puntos cualesquiera O y O', y unamos el punto O á los $a, b, c \ldots\ldots$; y el punto O' á los $a', b', c' \ldots\ldots$ Los haces así formados serán homográficos, pues segun hemos visto en el número 9, las relaciones anarmónicas de

Fig. 6.ª



los senos de los ángulos correspondientes en ambos grupos, es la misma que la de los puntos correspondientes de interseccion con las secantes XX y X'X'; y supuesto que se tiene

$$R_{anar}\,(a, b, c, d), = R_{anar}\,(a', b', c', d'),$$

se tendrá asimismo

$$R_{anar}\,(OABCD) = R_{anar}\,(O'A'B'C'D').$$

Núm. 26. Si trasladamos el haz O'A'B' ....., de modo que su centro O' coincida con el O del *homográfico* OABC ....., tendremos alrededor del punto O un sistema de rectas, constituyendo dos grupos ó haces, cuyas rectas se corresponderán dos á dos: es decir, OA con la O'A'; la OB con la OB'; la OC con la O'C', etc.

Si además las rectas OA, OB ....., OA', OB' ....., están distribuidas de una manera contínua, de modo que puedan considerarse superpuestas, una línea cualquiera OA será doble, y estará formada por la superposicion de dos rectas OA, OB': una correspondiente al primer sistema, otra al segundo. Considerada como perteneciente al primer grupo, su conjugada será una cierta línea OA' del segundo; considerada por el contrario, como formando parte del segundo grupo, su conjugada será, por ejemplo, la línea OB, distinta en general de la OA'.

Sólo en casos particulares coinciden las conjugadas OB, OA', de dos rectas coincidentes OA, OB'. Si esto se verifica en todo el sistema y para todos los pares de rectas correspondientes, entónces se dice que el sistema está en INVOLUCION.

(*Se continuará.*) B. D.