elemento que contribuirá á desarrollar la poblacion en los hermosos valles que hay al pié de la sierra de Guadarrama en sus cercanías.

B. E.

GEOMETRÍA (1)

CONTINUACION DEL ARTICULO SEGUNDO.

Núm. 27. *Expresion analítica de la homografía de los haces.*—Al tratar de la homografía de dos sistemas de puntos situados sobre una recta, hemos visto que la relacion entre las abcisas variables de estos puntos, era de la forma

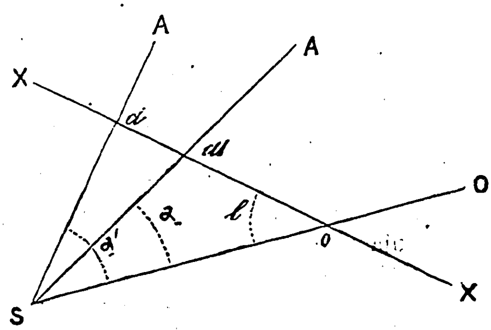
$$A + Bx + Cx' + Dxx' = 0.$$

De este modo teníamos definida analíticamente la homografía de dos sistemas, y hemos deducido algunas de sus propiedades.

Tratemos de determinar una relacion análoga para los haces homográficos cuyos vértices coinciden.

Sea S el vértice comun de los dos haces (fig. 7.ª); y SO una recta fija que consideraremos como orígen de los ángulos.

Fig. 7.ª



Si representamos por α el que forma una recta cualquiera SA del primer haz con el eje SO, y por α' el que forma la conjugada SA′ en el segundo haz, determinado que sea el ángulo α, y por lo tanto, la recta SA, quedará determinada la conjugada SA′ y por consecuencia α, en virtud de la relacion anarmónica que esté fijada de antemano por el haz que se considera; es decir, que α' es funcion de α, ó de otro modo, que α y α' deben estar enlazados por una relacion $f(\alpha, \alpha') = 0$.

Esta relacion es precisamente la que nos proponemos determinar.

Para ello cortemos los dos haces por una secante XX, que determinará

(1) Véanse los números 2.º, 4.º, 6.º y 7.º de la REVISTA de este año.

dos sistemas de puntos, a . . . . . . el primero, a′ . . . . . el segundo (sobre las rectas conjugadas) en relacion homográfica. Tomemos el punto o por orígen, y representemos las variables oa, oa', por x y x'.

Entre x y x' existirá la relacion

$$A + Bx + Cx' + Dxx' = 0 \qquad (1),$$

segun ya hemos demostrado.

De los triángulos Soa y Soa′, se deduce

$$\frac{oa}{So} = \frac{\text{sen } oSa}{\text{sen Sao}}; \quad \frac{oa'}{So} = \frac{\text{sen } oSa'}{\text{sen Sa}'o};$$

haciendo $So = L$, y el ángulo $Soa = l$, y observando que

$$Sao = 180^{\circ} - \alpha - l, \text{ y } Sa'o = 180^{\circ} - \alpha' - l,$$

se tendrá

$$\frac{x}{L} = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } (\alpha + L)}; \quad \frac{x'}{L} = \frac{\text{sen } \alpha'}{\text{sen } (\alpha' + l)};$$

de donde se deduce

$$x = L \frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \alpha \cos l + \cos \alpha' \text{ sen } l};$$

$$x' = L \frac{\text{sen } \alpha'}{\text{sen } \alpha' \cos l + \cos \alpha' \text{ sen } l};$$

ó bien

$$x = \frac{L}{\cos l} \cdot \frac{\text{tg } \alpha}{\text{tg } \alpha + \text{tg } l}; \quad x' = \frac{L}{\cos l} \cdot \frac{\text{tg } \alpha'}{\text{tg } \alpha' + \text{tg } l}.$$

Sustituyendo por x y x' en la relacion (1) los valores precedentes, hallaremos

$$A + B. \frac{L}{\cos l} \cdot \frac{\text{tg } \alpha}{\text{tg } \alpha + \text{tg } l} + C. \frac{L}{\cos l} \cdot \frac{\text{tg } \alpha'}{\text{tg } \alpha' + \text{tg } l}$$

$$+ D. \frac{L^2}{\cos^2 l} \cdot \frac{\text{tg } \alpha. \text{ tg } \alpha'}{\text{tg } \alpha. \text{ tg } \alpha' + \text{tg } l\, (\text{tg } \alpha + \text{tg } \alpha') + \text{tg}^2 l - 0},$$

que es la relacion buscada entre α y α'.

Esta relacion puede simplificarse y reducirse á la forma

$$A \text{ tg}^2 l + \text{tg } l \left(A + B \frac{L}{\cos l}\right). \text{ tg } \alpha + \text{tg } l \left(A + C. \frac{L}{\cos l}\right). \text{ tg } \alpha'$$

$$+ \left(A + B \frac{L}{\cos l} + C \frac{L}{\cos l} + D \frac{L^2}{\cos^2 l}\right) \text{tg } \alpha. \text{ tg } \alpha' = 0,$$

y llamando M, N, P, Q, á los respectivos coeficientes, el independiente, el de tg α, tg α' y el de tg α. tg α', se tendrá

$$M + N \text{ tg } \alpha + P \text{ tg } \alpha' + Q \text{ tg } \alpha. \text{ tg } \alpha' = 0 \qquad (2),$$

para la ecuacion de la *homografía de dos haces*, relacion semejante á la que expresa la homografía de dos sistemas de puntos.

(*Se continuará.*) B. D.

MADRID: 1883.
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO DE GREGORIO JUSTE
Calle de Pizarro, número 15, bajo.