desarrollo de todos los gérmenes de produccion, mediante los necesarios y posibles sacrificios, para que la nacion prospere y aumente la tributacion de que es susceptible, se comprenderá, sin embargo, que mirada bajo este levantado punto de vista la compra y conservacion del Canal á que nos referimos, puede sostener ventajosamente la comparacion con la generalidad de las demás obras públicas que el Estado construye y conserva.

(*Se concluirá.*) J. MARTINEZ VILLA.

GEOMETRÍA. (1)

HACES HOMOGRÁFICOS.

CONCLUSION DEL ARTICULO SEGUNDO.

Núm. 28. De la ecuacion (2) pueden deducirse resultados análogos á los que se han consignado para la homografía de puntos. Así, por ejemplo, si dadas tres rectas de un haz, y las tres conjugadas del segundo haz, teniendo los dos haces el vértice comun, quisiéramos determinar *otras dos rectas conjugadas*, de suerte que las ocho rectas formasen *dos haces homográficos*, bastaría sustituir en la ecuacion (2) los valores $\operatorname{tg}\alpha_1$ y $\operatorname{tg}\alpha'_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2$ y $\operatorname{tg}\alpha'_2$, $\operatorname{tg}\alpha_3$ y $\operatorname{tg}\alpha'_3$, correspondientes á las seis rectas dadas. Tendríamos así tres ecuaciones análogas á la (2), que servirían para determinar las relaciones $\frac{M}{Q}$, $\frac{N}{Q}$ y $\frac{P}{Q}$, las que sustituiríamos en la expresion

$$\frac{M}{Q}+\frac{N}{Q}\cdot\operatorname{tg}\alpha+\frac{P}{Q}\operatorname{tg}\alpha'+\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\alpha'=0.$$

Determinados así los coeficientes de esta ecuacion, en virtud de las condiciones impuestas, para cualquier valor de $\operatorname{tg}\alpha$ ó de $\operatorname{tg}\alpha'$, correspondiente á una *sétima* recta, deduciríamos de dicha ecuacion el valor de $\operatorname{tg}\alpha'$ ó de $\operatorname{tg}\alpha$, que determinaría una *octava* recta conjugada con la *sétima*, y formando las *dos*, con las *seis* dadas, el sistema de dos *haces homográficos*. Es decir, que este problema equivale tambien al siguiente: Dadas *siete rectas* de un *haz*, *hallar* la *octava recta conjugada homográficamente* con *una de las dadas*.

ARTICULO TERCERO.

RELACION ARMÓNICA.

Núm. 29. La *relacion armónica* es un caso particular de la relacion anarmónica. Supongamos, en efecto, cuatro puntos a, b, c, d, (fig. 8.ª)

(1) Véanse los números 2.°, 4.°, 6.°, 7.° y 8.° de la REVISTA de este año.

Fig. 8.ª

tales que se verifique entre ellos

$$\frac{ac}{bc} = \frac{ad}{bd};$$

es decir, que la relacion de las distancias del punto c, á los a y b, sea igual á la de las distancias del punto d, á los mismos puntos a y b: esta es la condicion que expresa que la recta ab queda dividida por los puntos c y d en *relacion armónica*; advirtiendo, que en dicha ecuacion se consideran las cuatro distancias ca, cb, da, db, como siendo esencialmente positivas.

Si, por el contrario, damos signos á estos segmentos, segun el sentido en que se cuenten, y consideramos como positivo el sentido de a hácia d, ac, ad y bd serán positivas, y bc negativa; de suerte que, para que la ecuacion anterior se verifique en toda su generalidad algebráica, es decir, en cuanto á signos y valores numéricos, deberemos poner explícitamente el signo *ménos* á uno de los miembros. Resultará, pues, $\frac{ac}{bc} = -\frac{ad}{bd}$, y dividiendo por la fraccion $+\frac{ad}{bd}$, se tendrá

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = -1.$$

Así, pues, la *relacion armónica* es un caso particular de la *relacion anarmónica*, á saber, aquel en que dicha relacion anarmónica tiene el valor -1.

Núm. 30. Todos los teoremas demostrados para la relacion anarmónica subsisten para la relacion armónica. Así, por ejemplo:

1.° Uniendo un punto O por medio de rectas á los cuatro puntos a, b, c, d, de un sistema armónico, tendremos para el haz formado

$$\frac{\text{sen AOC}}{\text{sen BOC}} : \frac{\text{sen AOD}}{\text{sen BOD}} = \frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = -1.$$

2.° Una secante cualquiera $a'd'$, cortará al haz OABCD en cuatro puntos a', b', c', d', en relacion armónica, y por lo tanto,

$$\frac{a'c'}{b'c} : \frac{a'd'}{b'd'} = -1.$$

3.° La proyeccion de todo haz armónico, es otro haz tambien armónico.

4.° Las tres relaciones principales que se hallaron en las divisiones anarmónicas

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = m, \ \frac{cb}{ab} : \frac{cd}{ad} = n; \ \frac{ab}{db} : \frac{ac}{dc} = p,$$

tienen en el caso particular de la relacion armónica, los valores siguientes:

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = -1; \ \frac{cb}{ab} : \frac{cd}{ad} = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{ab}{db} : \frac{ac}{dc} = 1 - \frac{1}{-1} = 2.$$

Las tres inversas serán respectivamente iguales á

$$-1; \ 2; \ \text{y} \ \frac{1}{2}.$$

Núm. 31. Segun se demuestra en la geometría elemental, si en un triángulo se trazan las bisectrices de uno de sus ángulos, y de su exterior adyacente, los segmentos adictivos ca y cb, y los sustractivos da y db, comprendidos entre los extremos a y b del lado opuesto al ángulo, y los puntos c y d, donde las bisectrices encuentran á dicho lado, están en proporcion, de suerte que tendremos

$$\frac{ca}{cb} = \frac{da}{db}.$$

Trasformando dicha expresion y teniendo en cuenta que bc es negativo, se convierte en

$$\frac{ac}{bc} = -\frac{ad}{bd}; \text{ ó bien en } \frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = -1.$$

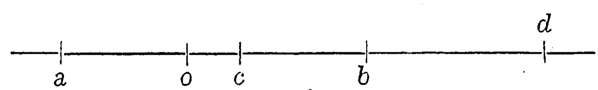
Luego los cuatro puntos a, b, c, d de dicho lado ab del triángulo, están en *relacion armónica.*

Núm. 32. De la proposicion $\frac{ca}{cb} = \frac{da}{db}$ establecida en el número anterior se deduce, cambiando los extremos, invirtiendo despues y tomando las distancias en un sentido opuesto al que tienen en dicha proporcion $\frac{bc}{bd} = \frac{ac}{ad}$, la que nos prueba que el segmento cd queda dividido armónicamente por los puntos a y b, del mismo modo que ab quedaba dividido armónicamente por los puntos c y d.

Los puntos a y b, así como los c y d, se dice que son *conjugados* de dos en dos: es decir, a con b y c conjugado de d. De modo que teniendo dos puntos a y b en una recta para obtener otros dos conjugados c y d, que formen una division armónica, bastará construir un triángulo sobre la recta ab, y trazando la bisectriz del ángulo opuesto al lado ab, se tendrá el punto c por su interseccion con este lado, y la bisectriz del ángulo suplementario del primero determinará el punto d en la prolongacion de la recta ab. Dichos lados y las bisectrices formarán un *haz armónico*.

Núm. 33. Si el punto d se aleja indefinidamente hasta la derecha, de suerte que las magnitudes da y db crezcan sin límites, la relacion sen-

Fig. 8.a



cilla $\frac{ad}{bd}$ tenderá hácia la unidad, y la relacion armónica

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = -1$$

hácia el límite $\frac{ac}{bc} = -1$, de donde se deduce $ac = -bc$.

Así, pues, á medida que el punto d se aleja, el c se aproxima al punto medio o del segmento ab; ó de otro modo, *el punto conjugado del que está en el infinito, es el punto medio ó del segmento ab.*

Los puntos a, b, o y el situado en el infinito, forman un grupo armónico.

De suerte que uniendo un punto A por medio de rectas con dichos puntos a, b y el medio o, y trazando una paralela por dicho punto A á la recta aob, se formará un *haz armónico*; lo que proporciona otro medio de formar un *haz armónico*, dadas dos rectas del haz oa y oc, pues bastará trazar una secante por un punto cualquiera de una de estas oa, y desde el punto de interseccion c con la otra recta, tomar una parte cb igual á la comprendida ac entre las dos rectas dadas, unir el punto b que resulte con el punto de concurso del haz, y trazando por este punto una paralela á la secante, se tendrá el haz armónico, siendo dicha paralela la conjugada con la segunda de las rectas dadas oc y la recta ob, la conjugada con la primera recta oa.

Núm. 34. La relacion armónica es conocida desde la más remota antigüedad: Apolonio de Pergeo hace frecuente uso de ella en su tratado sobre las cónicas; pero en esta obra no aparece la denominacion de *armónica:* ésta se emplea por primera vez en los libros de Pappus.

Es digno de notarse, que las longitudes de las tres cuerdas que dan el acorde *do, mi, sol*, son entre sí como los números

$$1, \frac{4}{5}, \frac{2}{3},$$

la que satisface á la relacion

$$\frac{m-n}{n-p} = \frac{m}{p},$$

como puede verse haciendo

$$m = 1;\ n = \frac{4}{5};\ p = \frac{2}{3}.$$

Dicha relacion expresa en el fondo la relacion armónica tal como la hemos definido: en efecto, de la relacion

$$\frac{bd}{bc} = \frac{ad}{ac}$$

se deduce, poniendo en vez de bd su igual $ad - ab$, y en vez de bc su igual $ab - ac$;

$$\frac{ad-ab}{ab-ac} = \frac{ad}{ac},$$

cuya relacion es análoga á la

$$\frac{m-n}{n-p} = \frac{m}{p}.$$

(*Se continuará.*)

B. D.