materiales y objetos y los pequeños edificios donde están establecidas las exposiciones especiales de Argelia, Túnez, la villa de París, etc., etc., además de los destinados á la venta de comestibles y bebidas y al descanso, recreo y comodidad de los visitantes.

Una mirada atenta á los números consignados en el cuadro anterior, da á conocer la importancia relativa que en cuanto á la magnitud tiene la actual Exposicion Colonial y de Exportacion general de Amsterdam, comparada con todas las que la han precedido.

El edificio principal de la de Amsterdam ocupa un solar que, como se ve, es ménos de la cuarta parte del que cubría el gran palacio del campo de Marte en la Exposicion de París de 1878; y la extension superficial que abrazaba la cerca que cerraba esta última Exposicion comprendiendo todos sus anexos, fué tambien cuatro veces más grande que el terreno en que se hallan hoy establecidos todos los edificios é instalaciones que constituyen la de la capital de Holanda.

En cuanto á las condiciones relativas de los edificios principales no puede haber comparacion. El Palacio de la Exposicion de París fué un gran edificio de hierro, bien combinado, rico, grandioso, importante y áun cuando algo aplastada la forma de sus cuerpos principales, fué digno de estudio en muchos de sus detalles, miéntras que el de la actual Exposicion de Amsterdam carece por completo de todas estas condiciones, segun hemos hecho ya observar.

Esto demuestra que si la iniciativa privada tiene grandes ventajas para acometer empresas de resultados confiadamente lucrativos, cuando se trata de aquéllas en que están enlazados sus intereses con los de una nacion, no han de olvidarse nunca las precauciones, para que, si resultan antagónicos con los propósitos de ellas que pueden ser más ó ménos razonables, no produzcan resultados perjudiciales á las conveniencias generales del país.

M. Garrán.

(Se continuará.)

ALGEBRA.

ARTICULO TERCERO.

Ecuaciones homogéneas de primer grado. Ecuaciones incompatibles. Método de eliminacion de Sylvester. Ecuacion de cuarto grado simétrica.

Núm. 7. Sean, por ejemplo, tres ecuaciones con tres incógnitas. Dos de ellas *homogéneas*, es decir, que carecen de término independiente de la incógnita.

$$ax + by + cz = k$$
$$a'x + b'y + c'z = 0$$
$$a'' x + b''y + c''z = 0.$$

Llamando $\triangle$ al determinante de los coeficientes de las incógnitas, se tiene:

$$x = \frac{-k\,(b'\,c'' - c'\,b'')}{\triangle},\ y = \frac{-k\,(a'\,c'' - c'\,a'')}{\triangle} \quad (1)$$

$$z = \frac{-k\,(a'\,b'' - b'\,a'')}{\triangle}$$

de donde resulta, comparando los valores de las incógnitas por medio de la division,

$$x : y : z : : (b'\,c'' - c'\,b'') : (a'\,c'' - c'\,a'') : (a'\,b'' - b'\,a'')\ ;$$

es decir, que cuando se tienen varias ecuaciones de primer grado, todas homogéneas ménos una de ellas, los valores de las incógnitas son proporcionales á los determinantes menores que se obtienen sucesivamente suprimiendo la línea formada por los coeficientes de la ecuacion no homogénea, y la columna de los coeficientes de la incógnita que se considere.

De dichas proporciones puede deducirse los valores de las incógnitas.

De las igualdades (1) se deduce asimismo:

$$\frac{x}{b'\,c'' - c'\,b''} = \frac{y}{a'\,c'' - c'\,a''} = \frac{z}{a'\,b'' - b'\,a''} = -\frac{k}{\triangle}\ (2)\ ;$$

lo que indica que la relacion de las incógnitas es *constante*, y áun cuando varían, su relacion con las determinantes menores ántes expresadas, es siempre igual á la cantidad fija $-\dfrac{k}{\triangle}$.

Núm. 8. Si *todas las ecuaciones son homogéneas*, es decir, que se tiene $k = 0$, dichas ecuaciones quedarán satisfechas, igualando á *cero* cada una de las incógnitas. Pero si se quiere obtener valores de las incógnitas *distintos de cero*, que verifiquen estas ecuaciones, es necesario que se tenga $\triangle = 0$, pues de las ecuaciones (2) se deduce:

$$\triangle\,.\,x = -(b'\,c'' - c'\,b'')\,.\,k\,,$$

(por ejemplo), y como x no ha de ser cero, segun la hipótesis hecha, ní $b'\,c'' - c'\,b''$ tampoco es nulo, siendo $k = 0$, debe tenerse asimismo $\triangle = 0$.

Es decir, que la condicion necesaria para que varias ecuaciones homogéneas de primer grado sean satisfechas por valores de las incógnitas distintas de cero, es que *sea nulo el determinante formado con sus coeficientes*.

Núm. 9. *Ecuaciones incompatibles. Condicion de compatibilidad.*

Sean las ecuaciones de primer grado

$$
\begin{aligned}
a_1 x + b_1 y + c_1 z &= k_1 \\
a_2 x + b_2 y + c_2 z &= k_2 \\
a_3 x + b_3 y + c_3 z &= k_3 \\
a_4 x + b_4 y + c_4 z &= k_4 .
\end{aligned}
$$

Desde luégo tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas, las tres primeras pueden ser satisfechas, como sabemos, por determinados valores de las incógnitas; pero la cuarta ecuacion, si no es una consecuencia de las otras tres, no será en general verificada por los valores de aquéllas deducidas de dichas tres ecuaciones; por esta causa se dice que este sistema es *incompatible*, ó que no pueden existir valores determinados para las variables que satisfagan simultáneamente á un sistema de ecuaciones superior en número al de sus incógnitas.

Para que dicho sistema fuese *compatible*, sería preciso que los valores de las incógnitas deducidas de las tres primeras ecuaciones, y sustituidas en la cuarta, verificasen á ésta; es decir, que dicha ecuacion quedara convertida en una *identidad*, teniendo en cuenta sus coeficientes y sus signos. Esta última ecuacion, despues de la sustitucion indicada, quedaría convertida en una relacion de todos los coeficientes del sistema total de ecuaciones que se considerase. Á dicha relacion de coeficientes es á lo que se llama RESULTANTE del sistema. Dicha *resultante* es precisamente el *determinante* de todos los coeficientes del sistema de ecuaciones, incluyendo entre ellos los términos independientes de las incógnitas.

Las últimas ecuaciones que hemos considerado pueden trasformarse del siguiente modo (despues de trasponer al primer miembro los términos del segundo, de sustituir á cada incógnita su relacion con otra variable u, y multiplicar por dicha variable):

$$
\begin{aligned}
a_1 x + b_1 y + c_1 z - k_1 u &= 0 \\
a_2 x + b_2 y + c_2 z - k_2 u &= 0 \\
a_3 x + b_3 y + c_3 z - k_3 u &= 0 \\
a_4 x + b_4 y + c_4 z - k_4 u &= 0 .
\end{aligned}
$$

Así hemos reemplazado el sistema propuesto por otro sistema de ecuaciones de primer grado homogéneas, de igual número de ecuaciones que de incógnitas, y segun hemos visto en el número anterior, la condicion necesaria para que tal sistema sea *verificado por valores de las incógnitas distintas de cero*, es que se tenga

$$
\begin{vmatrix}
a_1 & b_1 & c_1 & k_1 \\
a_2 & b_2 & c_2 & k_2 \\
a_3 & b_3 & c_3 & k_3 \\
a_4 & b_4 & c_4 & k_4
\end{vmatrix} = 0 ;
$$

ó lo que es lo mismo, que el *determinante de todos los coeficientes de las ecuaciones propuestas sea nulo.* Y como este determinante es una relacion exclusiva de dichos coeficientes, y es el mismo polinomio que resultaría de sustituir en la última ecuacion los valores de las incógnitas deducidas de las primeras, despues de trasponer todos los términos al primer miembro, es decir, la *resultante* del sistema, podemos tambien decir que la condicion necesaria para que un sistema de ecuaciones de primer grado de más *ecuaciones que incógnitas sea* COMPATIBLE, es que *la* RESULTANTE *de dicho sistema de ecuaciones sea igual á cero.*

Núm. 10. *Método de eliminacion de* SYLVESTER.—Dicho método consiste en hacer depender la resolucion de las ecuaciones dadas de otro sistema de ecuaciones en mayor número que el de incógnitas, y considerar como á cantidades desconocidas que tratan de determinarse, no sólo á la primera potencia de la incógnita, sino á las potencias sucesivas. Al efecto, se multiplican las ecuaciones dadas por las potencias de las variables que sea necesario para conseguir dicho objeto; es decir, para constituir con las ecuaciones propuestas un sistema de ecuaciones *incompatibles*, y al establecer la condicion de compatibilidad de este sistema, resulta *eliminada* la variable correspondiente, considerando á las *demás variables* como si fueran coeficientes numéricos.

Sean, por ejemplo, las dos ecuaciones de 2.° grado

$$a\,y^2 + b\,x\,y + c\,x^2 + dy + e\,x + f = 0$$
$$a'\,y^2 + b'\,x\,y + c'\,x^2 + d'\,y + e'\,x + f' = 0\,.$$

Supongamos que se quiere eliminar la variable y.

Se multiplican dichas ecuaciones por y^1 y por y^0.

Dichas ecuaciones se convierten en las cuatro siguientes:

$$a\,y^3 + b\,x\,y^2 + c\,x^2\,y + d\,y^2 + e\,x\,y + f\,y = 0$$
$$a\,y^2 + b\,x\,y + c\,x^2 + d\,y + e\,x + f = 0$$
$$a'\,y^3 + b'\,x\,y^2 + c'\,x^2\,y + d'\,y^2 + e'\,x\,y + f'\,y = 0$$
$$a'\,y^2 + b'\,x\,y + c'\,x^2 + d'\,y + e'\,x + f' = 0\,.$$

Ordenando estas ecuaciones, resulta:

$$a\,y^3 + (b\,x + d)\,y^2 + (c\,x^2 + e\,x + f)\,y = 0$$
$$a\,y^2 + (b\,x + d)\,y + (c\,x^2 + e\,x + f) = 0$$
$$a'\,y^3 + (b'\,x + d')\,y^2 + (c'\,x^2 + e'\,x + f')\,y = 0$$
$$a'\,y^2 + (b'\,x + d')\,y + (c'\,x^2 + e'\,x + f') = 0\,.$$

Considerando las potencias y^3 é y^2 como *incógnitas*, lo mismo que la variable y, se ha sustituido de esta manera al *sistema determinado* y compatible en general de las dos ecuaciones propuestas, *otro sistema* de *cuatro ecuaciones* con *tres incógnitas,* es decir, un sistema *incompatible*. Para que este sistema sea compatible, es necesario que el determinante formado con sus coeficientes sea nulo, considerando por el momento á la variable x como si fuese una cantidad conocida. Estableciendo dicha *condicion*, se tiene:

$$\begin{vmatrix} a & (b\,x + d) & (c\,x^2 + e\,x + f) & 0 \\ 0 & a & (b\,x + d) & (c\,x^2 + e\,x + f) \\ a' & (b'\,x + d\,) & (c'\,x^2 + e'\,x + f') & 0 \\ 0 & a' & (b'\,x + d') & (c'\,x^2 + e'\,x + f') \end{vmatrix} = 0.$$

Así la variable y queda eliminada, y desarrollando esta matriz, resultaría un polinomio de *cuarto grado en* x, es decir, una *ecuacion* de cuarto grado, con la única variable x, que sería la *ecuacion final* que habría que resolver. Los valores hallados para dicha incógnita, sustituidos sucesivamente en cualquiera de las dos ecuaciones propuestas, nos harían conocer los valores correspondientes de la otra variable.

Núm 11. *Resolucion de la ecuacion simétrica de cuarto grado.*—Una ecuacion se llama *simétrica*, cuando son iguales los coeficientes extremos y los equidistantes de éstos. Sea la ecuacion

$$a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + b\,x + a = 0\ ,$$

dividiendo por x^2, se tiene:

$$a\,x^2 + b\,x + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0\ ,$$

ó bien

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0\ .$$

Haciendo

$$x + \frac{1}{x} = y\ ,$$

$\left(\text{de donde se deduce } x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2\right)$ y sustituyendo en la última ecuacion, se convierte en:

$$a\,y^2 + b\,y + (c - 2\,a) = 0\ .$$

De esta suerte se hace depender la resolucion de la ecuacion propuesta de una ecuacion de segundo grado. Resolviendo esta ecuacion, como de $b + \frac{1}{x} = y$, resulta $x^2 - y\,x + 1 = 0$, bastaría sustituir en esta en lugar de y los dos valores hallados por esta incógnita, y resolviendo después las dos ecuaciones de segundo grado en x, correspondientes á cada una de dichas sustituciones, se tendrán los *cuatro valores de* x de la ecuacion propuesta de cuarto grado.

$$6\,x^4 - 35\,x^3 + 62\,x^2 + 35\,x + 6 = 0\,.$$

Ejecutando todas las operaciones ántes expresadas, resulta:

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 62 = 0$$

$$6\,y^2 - 35\,y + 50 = 0\,.$$

Resolviendo esta última:

$$y = \frac{35 \pm \sqrt{25}}{12} = \begin{cases} \dfrac{10}{3} \\[2mm] \dfrac{5}{2} \end{cases}.$$

Sustituyendo estos valores de y en la ecuacion $x^2 - y\,x + 1 = 0$, se tienen las dos siguientes:

$$x^2 - \frac{10}{3}\,x + 1 = 0$$

$$x^2 - \frac{5}{2}\,x + 1 = 0\,.$$

Núm. 12. Sea, como ejemplo, la siguiente ecuacion simétrica de cuarto grado:

De la primera se deduce

$$x = 3\,,\; x = \frac{1}{3}\,,$$

y de la segunda,

$$x = 2\,,\; x = \frac{1}{2}\,.$$

Estos son, pues, los valores que satisfacen á la ecuacion propuesta. Como se ve, dichos valores son *recíprocos*, conforme corresponde á las condiciones con que cumple la ecuacion dada.

B. Donnet.

El Ministerio de Correos y Telégrafos de Francia ha publicado recientemente las memorias redactadas por el Jurado de la Exposicion Internacional de electricidad de 1881. Una de estas memorias, escrita por Mr. Banderali, miembro de dicho Jurado é Ingeniero encargado del servicio central de material y traccion en el camino de hierro del Norte, se refiere á las aplicaciones de la electricidad á la explotacion de los caminos de hierro. El asunto es tan interesante que hemos creido conveniente dar á conocer dicho trabajo á nuestros lectores, publicando en la Revista la primera parte de la mencionada Memoria, que contiene la historia detallada de las apli-