

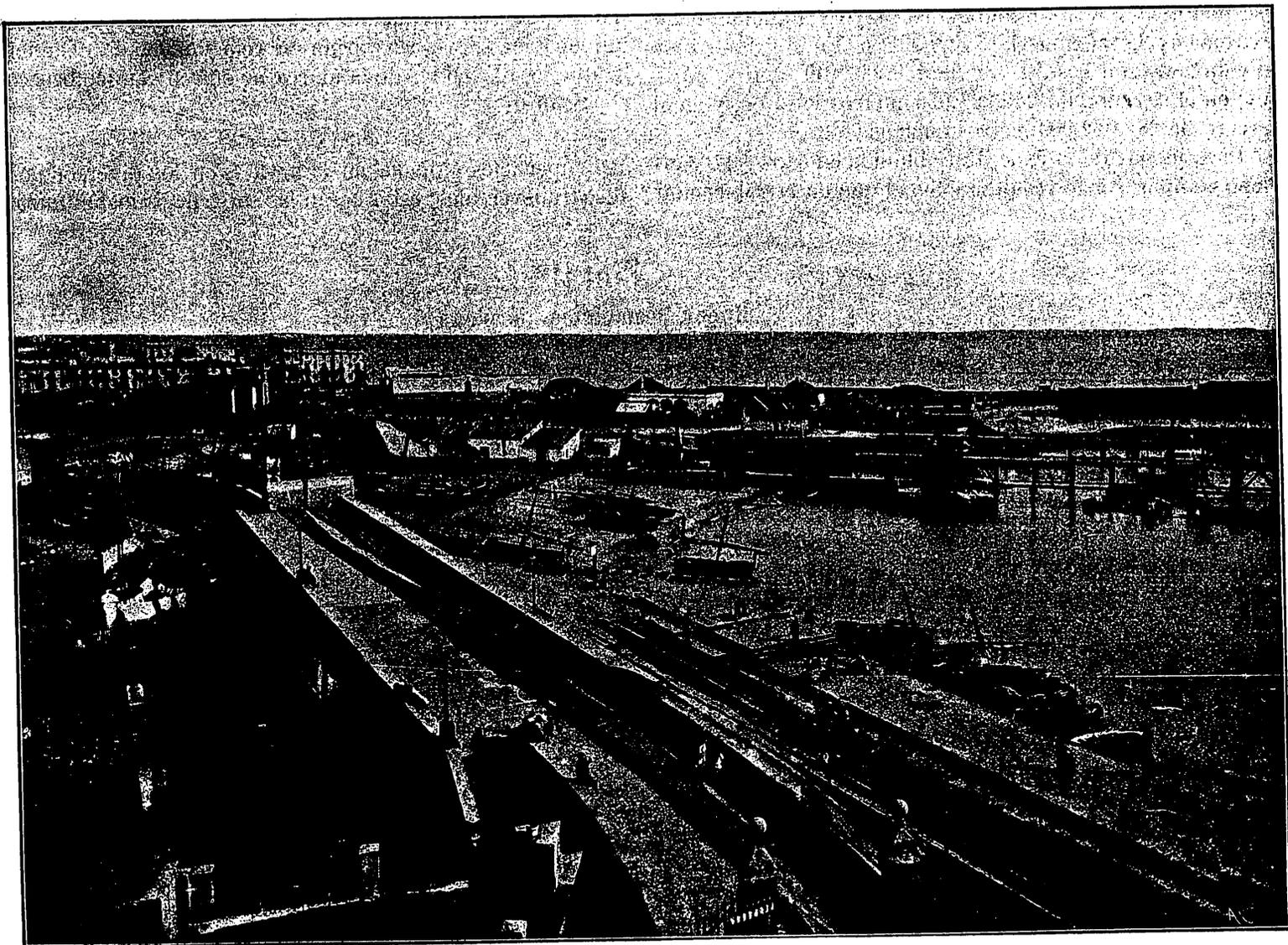
# REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS

FUNDADA Y SOSTENIDA POR EL CUERPO NACIONAL DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

**Editor-Presidente**..... Excmo. é Ilmo. Sr. D. Luis Sáinz, Inspector general de primera clase del Cuerpo.  
**Redactores**..... Los Sres. Presidentes de las Comisiones regionales de Ingenieros.  
 D. Luis Gaztelu, Profesor de la Escuela de Caminos.  
 D. Manuel Maluquer, Ingeniero del mismo Cuerpo, *Secretario*.  
**Colaboradores**..... Todos los Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.

SE PUBLICA LOS JUEVES

Redacción y Administración: Puerta del Sol, 9, pral.



Puerto de Barcelona.—Embarcadero y varadero de los Pescadores.

## VII CONGRESO INTERNACIONAL DE NAVEGACIÓN <sup>(1)</sup>

Los primeros métodos empleados se fundaban todos en la determinación de los lugares geométricos de plea y baja mar, y el volumen comprendido entre esas dos curvas era el que se consideraba que entraba en la ría, suponiéndose además, que las superficies que limitaban estos volúmenes, eran planas, y que se separaban proporcional-

mente á la distancia, de suerte que rectificado el eje de la ría, el volumen aparecía como un tronco de pirámide.

Hoy se considera el volumen comprendido entre las curvas instantáneas correspondientes á las estoas, y para apreciar mejor las variaciones en las diversas fases de la marea, se evalúan los volúmenes correspondientes á las curvas instantáneas de hora en hora, ó con intervalos más cortos.

De todos modos, y cualquiera que sea el método empleado en la cubicación en las rías, en que el cauce es irre-

(1) Véase el número anterior.

gular y de ancho y profundidad variable, pueden obtenerse resultados muy diversos según el número y la situación de los perfiles que se consideren. Así, por ejemplo, en el informe que sobre este tema presenta Mr. Grahay de Franchimont, hace notar que en la Gironde, entre el extremo inferior de la Isla Verde y el puerto de Saint Estiphe, hay una distancia de veinte kilómetros; en este intervalo hay tres estaciones intermedias, en Panillac, Saint-Julien y Blaye, que corresponden en Panillac y Blaye á puntos de ancho y sección mínima respecto á los trozos próximos, y en Saint-Julien corresponde á un máximo local.

Al calcular el volumen total correspondiente á este tramo durante el flujo para una marea determinada, se pueden utilizar las secciones de las cinco estaciones citadas, ó bien entre las intermedias no tomar más que las dos correspondientes á las mínimas de Blaye y Panillac, ó las extremas y la máxima de Saint-Julien. En el primer caso el volumen total resulta ser de 259.286.400 metros cúbicos; en el segundo de 246.923.000 metros cúbicos, y en el tercero de 282.622.000 metros cúbicos.

Para juzgar de la exactitud obtenida en cada caso conviene comparar este resultado con el que da la cubicación

por medio de los datos que arrojan los perfiles instantáneos.

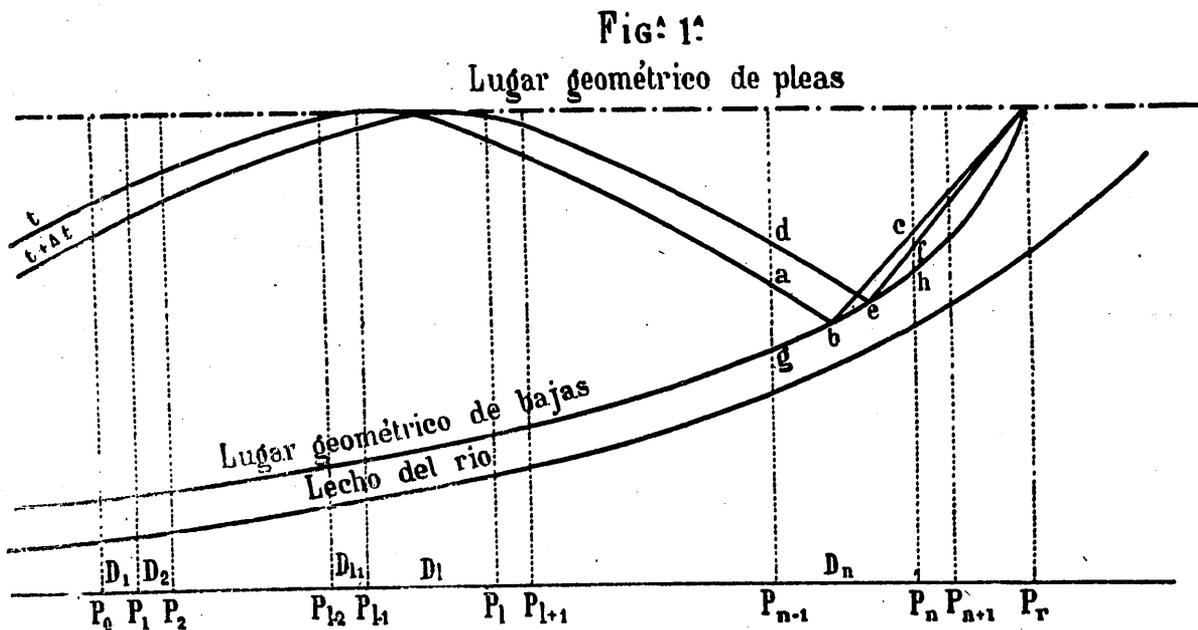
Mr. de Franchimont lo expone del modo siguiente: todos los métodos empleados tienen por fundamento la comparación de los volúmenes de agua que hay en la ría aguas arriba de un perfil determinado en dos instantes [separados por un intervalo de tiempo  $\Delta t$ . Su diferencia da el gasto total ó volumen que ha pasado por la sección considerada durante el tiempo  $\Delta t$ . Se puede establecer del modo siguiente la relación general entre los dos volúmenes totales que sucesivamente existen en el cauce de una ría.

Sea (figura 1.<sup>a</sup>)  $P_0$  la sección aguas arriba de la cual se quiere cubicar el volumen de agua acumulado,  $P_1, P_2, \dots, P_r$  un determinado número de perfiles transversales intercalados hasta el punto  $P_r$  en que cesa la acción de la marea; se supone además que entre cada dos perfiles las dimensiones de la ría varían en relación con la distancia  $O$  que los elementos de la marea no sufren cambio brusco.

Sean

$$S_0 - S_1 - S_2 - \dots - S_r$$

las superficies mojadas en la hora  $t$ , en los diversos perfiles transversales; estas serán las superficies instantáneas



hecha con perfiles tomados á la distancia uniforme de 400 metros en todo ese tramo, lo cual da 51 perfiles, y haciendo el cálculo completo, suponiendo que entre dos estaciones los perfiles instantáneos de las estoas de flujo y reflujos son rectilíneos, se halla como total un volumen de 252.447.600 metros cúbicos.

Si esto lo representamos por 1, los otros tres estarán representados por 1,027; 0,978 y 1,119. La diferencia es de importancia, sobre todo entre los volúmenes obtenidos en el segundo y tercer caso, en que llega á 14,4 por 100. Para que pueda juzgarse de su valor relativo, bastará observar que esta diferencia es del mismo orden que la que se obtendría separando con los mismos perfiles para dos mareas cuya amplitud difiriese en una altura de 0<sup>m</sup>,33.

Esto demuestra cuán esencial es para comparar los volúmenes correspondientes á mareas diversas, emplear en todas ellas los datos correspondientes á perfiles tomados en los mismos puntos.

Vamos ahora á indicar el modo de hacer la cubicación

de gasto;

$$\Delta s_1 - \Delta s_2 - \Delta s_3 - \dots - \Delta s_r,$$

las variaciones de las superficies instantáneas durante el tiempo  $\Delta t$ ; suponiendo que estas variaciones se tomen con su signo, considerando  $\Delta s$  como positivo durante el flujo y como negativo durante el reflujos;

$$\sigma_0 - \sigma_1 - \dots - \sigma_r,$$

los valores absolutos de las diferencias en la hora  $t$ , entre las superficies instantáneas  $S_0 - S_1, \dots$  y las superficies mojadas á baja mar, en cada sección y para la marea que se considera.

$E - E_1, \dots, E_r$  los valores absolutos de las diferencias de las superficies instantáneas en la hora  $t$ , con las superficies mojadas en plea de la misma marea.

$D_1 - D_2, \dots, D_r$  las distancias entre perfiles

$t_1, \dots, t_r$  las horas de baja mar y

$T_1, \dots, T_r$  las horas de plea mar.

Se trazan los lugares geométricos de las bajas y plea

mares, y dos perfiles instantáneos de la superficie del agua en las horas  $t$  y  $t + \Delta t$ . En estos perfiles la plea mar tiene lugar en el intervalo  $D_e$  comprendido entre los perfiles  $P_{e-1}$  y  $P_e$  y la baja mar en el intervalo  $D_n$  entre los perfiles  $P_{n-1}$  y  $P_n$ .

La variación  $\Delta Q$  durante el tiempo  $\Delta t$  del volumen total acumulado en la ría aguas arriba de  $P_e$  es la suma algebraica de las variaciones de los volúmenes acumulados en cada entre-perfil.

Consideremos uno, el  $P_{m-1} P_m$ , por ejemplo, en el cual no esté comprendida ni la plea ni la baja mar. Para este y todos los entre-perfiles análogos la variación  $\Delta q_m$  tendrá por expresión

$$\Delta q_m = \left( \frac{\Delta s_{m-1} + \Delta s_m}{2} \right) D_m \quad (1)$$

Para el que comprenda la baja mar, el cubo estará aumentado por el volumen correspondiente á la diferencia de dos troncos de pirámide triangulares, que tengan respectivamente por secciones rectas los triángulos curvilíneos  $deg$  y  $abg$ , teniendo por altura el ancho medio de la ría en el intervalo  $D_m$ , medido al nivel medio del agua durante el tiempo  $\Delta t$ . Este mismo volumen ha disminuído en el mismo tiempo en la diferencia entre dos troncos de prismas análogos que tengan respectivamente por secciones rectas  $bch$  y  $cjh$ .

La distancia del punto  $b$  al perfil  $P_{n-1}$  es, por otra parte, en virtud de las anotaciones anteriores,

$$\frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} D_n$$

y las distancias del mismo punto y de  $e$  á los perfiles  $P_{n-1}$  y  $P_n$  tienen expresiones análogas.

Tendremos por lo tanto para la fórmula del aumento de volumen en el entre-perfil que comprenda la baja mar

$$\frac{D_n}{2} \left[ (\sigma_{n-1} + \Delta s_{n-1}) \frac{t + \Delta t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} - \sigma_{n-1} \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \right]$$

La disminución de volumen en el mismo intervalo será:

$$\frac{D_n}{2} \left\{ \sigma_n \frac{t_n - t}{t_n - t_{n-1}} - (\sigma_n + \Delta s_n) \frac{t_n - (t + \Delta t)}{t_n - t_{n-1}} \right\}$$

Y por último; la variación de volumen en el entre-perfil, después de efectuar las reducciones, será:

$$\Delta q_n = \frac{D_n}{2(t_n - t_{n-1})} \left\{ \Delta s_{n-1}(t - t_{n-1}) + \Delta s_n(t_n - t) + (\sigma_{n-1} - \sigma_n) \Delta t \right\} \quad (2)$$

Haciendo las mismas operaciones para el entre-perfil  $P_{e-1} P_e$  que comprende la plea mar, se determinará la variación correspondiente, cuya fórmula será:

$$\Delta q_e = \frac{D_e}{2(T_e - T_{e-1})} \left\{ \Delta s_{e-1}(t - T_{e-1}) + \Delta s_e(T_e - t) + \Delta t(\Sigma_e - \Sigma_{e-1}) \right\} \quad (3)$$

La suma algebraica de los términos  $\Delta q$  en número igual al de los entre-perfiles considerados, dará la variación de volumen  $\Delta Q$  que se busca. Debe tenerse en cuenta que es debido á la vez á la acción de la marea y á la cantidad de agua dulce venida de la parte superior á la región marítima. Si se designa por  $X$  el gasto del río en la

unidad de tiempo, la variación de volumen debida solamente á la marea será:

$$\Delta Q' = \Sigma_1^{l-1} \Delta q_m + \Delta q_e + \Sigma_{l+1}^{n-1} \Delta q_m + \Delta q_n + \Sigma_{n+1}^r \Delta q_m \pm X \Delta t \quad (4)$$

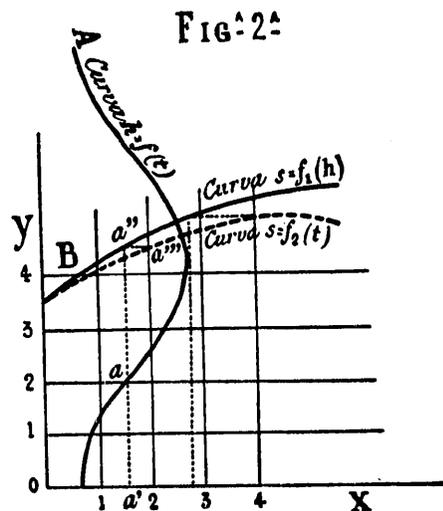
Los diferentes valores de  $\Delta q$  se obtendrán por medio de las fórmulas (1), (2), (3); tomando el último término con signo + cuando la suma de los  $r$  primeros es negativa y con signo - en el caso contrario.

La evaluación numérica de las cantidades que entran en la fórmula (4) para determinar sea la ley de los gastos instantáneos, sea los cubos totales, puede hacerse por diferentes métodos, de los cuales indicaremos los más prácticos.

*Modo de calcular las secciones transversales instantáneas.*—Lo esencial para la ejecución de los cálculos es obtener rápidamente las variaciones  $\Delta \sigma_m$  de las secciones transversales en un perfil en función del tiempo.

Los datos que se necesita tener por observaciones son la altura del agua en función del tiempo, la cual puede deducirse de la curva de marea  $h = f(t)$  y del plano de la sección. Se puede también trazar los niveles del agua en horas sucesivas y calcular geoméricamente ó por medio del planímetro las superficies de la sección transversal en esas horas. Pero si se descompone la marea en un gran número de intervalos, y si además hay que repetir esto mismo para muchas mareas de distintos coeficientes, las operaciones son muy largas y enojosas. Entre los medios de simplificarlas el mejor parece el siguiente:

Se traza por puntos, de una vez para siempre, por medio de un cierto número de áreas determinadas con planímetro, la curva  $S = f(h)$  que relaciona la sección transver-



sal instantánea correspondiente á la altura del agua. Trazándola (figura 2.) con relación á un eje horizontal  $OX$  sobre el cual se toman como abscisas las alturas del agua en la escala  $\frac{1}{\lambda}$ ; basta para una marea determinada, buscar cuál será la transformada de esta curva si se toman por abscisas sobre el mismo eje los tiempos  $t$  en la escala de  $\frac{1}{\lambda}$  y si las nuevas abscisas están con las primeras en la relación  $h = f(t)$ , la ordenada origen común de la curva y de la transformada, deberá corresponder á la vez al instante de la baja mar y á la altura del agua en esta fase.

Tracemos ahora la curva de marea  $h = f(t)$  con relación á un eje vertical OY, tomando sobre él los tiempos en la escala  $\frac{1}{\tau}$  y conservando para las alturas del agua la escala  $\frac{1}{\lambda}$ , colocando el origen O en el instante de baja mar.

Tracemos las paralelas á los ejes que en los dos sistemas horizontal y vertical corresponden á las horas — 1 — 2 — 3 — .... A la hora 2, por ejemplo, corresponde sobre la curva de la marea un punto a y, por tanto, una altura Oa', y por consecuencia una sección a'a'' y se halla enseguida en a''' el punto buscado de la transformada para la hora 2 — . Del mismo modo se pueden determinar todos los demás puntos que se deseen. En la práctica no es necesario hacer el trazado de las curvas de marea, tomadas en la sección considerada. Basta construir la curva  $s = f_1(h)$  sobre un papel calco cuadrículado de modo que las divisiones representan en la escala  $\frac{1}{\tau}$  el intervalo de tiempo que se haya tomado por unidad; aplicando este calco en la posición conveniente, sobre las curvas de una marea se pueden trazar fácilmente las curvas  $s = f_2(t)$  correspondientes á las mareas observadas.

Del mismo modo pueden obtenerse las curvas  $l = f_3(t)$  que darán en función del tiempo, los anchos medios sucesivos de la sección considerada.

(Se continuará.)

FERNANDO G. ARENAL.

## ATENEO DE MADRID

CONFERENCIAS DEL SR. ECHEGARAY (1)

Cuando  $T_i$  pertenece al subgrupo, es evidente que  $T_i S_n T_i^{-1}$  también pertenece á él. Por eso dijimos que  $T_i$  era cualquiera, alterando lo que de ordinario pasaba siempre, en que  $T_i$  era una sustitución de las no comprendidas en el subgrupo.

Puede suceder que dentro del subgrupo  $S_1 S_2 \dots S_r$  haya otro invariante suyo. Resulta de esto que en el grupo principal hay subgrupos que están contenidos unos en otros, siendo entre sí invariantes. Esto aparte de los otros subgrupos invariantes que puede haber sin estar comprendidos unos en otros.

Pues bien, el grupo invariante que contiene otros y á él sólo le contiene el grupo principal, se llama grupo *invariante máximo*.

Y vamos á demostrar que aquel subgrupo H, común á todos los grupos del cuadro de los tales de Galois, es un grupo *invariante*.

En efecto, sea S una sustitución cualquiera de H y formemos  $s S s^{-1}$ ;  $s^{-1}$  convierte á  $\varphi_\alpha$  en  $\varphi_\beta$ ; S, según el teorema de Picard, deja invariable á  $\varphi_\beta$ ; y s convierte á  $\varphi_\beta$  en  $\varphi_\alpha$ ; luego  $s S s^{-1}$  deja invariable á  $\varphi_\alpha$  y es una de las H; por tanto, este es un grupo invariante del  $S_1 S_2 \dots S_r$ .

Hemos representado por G el grupo de la ecuación  $(f x) = 0$ ; ese grupo G ( $S_1 S_2 \dots S_r$ ) lo hemos puesto en forma de cuadro, siendo la primera línea el

subgrupo  $S_1 S_2 \dots S_r$ , que representaremos por J. De este cuadro hemos deducido el de las s, que representamos entonces por g y que desde ahora vamos á representar por el símbolo G|J, cuadro que, según vimos, era de menores dimensiones que el G. Pues bien, así como el cuadro G contiene todas las sustituciones que forman el grupo de la ecuación dada, de igual modo el cuadro G|J, el de las s, constituye el grupo de la ecuación  $A(\varphi) = 0$ , la que nos da las cantidades  $\varphi$  que, cual más adelante veremos, son de gran importancia en esta teoría de Galois.

Para demostrar que el cuadro G|J es el grupo de la ecuación  $A(\varphi) = 0$ , no hay más sino ver si satisface á las condiciones características del grupo de una ecuación. Y fácilmente se ve que si  $F(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$  es una función de las raíces de  $A(\varphi) = 0$ , queda invariable para toda sustitución de G|J; luego este cuadro es el grupo de  $A(\varphi) = 0$ .

Este teorema es favorable á la resolución de las ecuaciones; pero hay un teorema adverso, que dice que  $A(\varphi)$  es irreducible. Y, en efecto, si no lo fuese tendría un factor  $(\varphi - \varphi_1)(\varphi - \varphi_2) \dots (\varphi - \varphi_\alpha)$ , siendo  $\alpha < p$ ; y esto no es posible, pues poniendo en vez de  $\varphi$  una función del dominio de racionalidad, quedará una función racional de valor invariable que no puede descomponerse en dos sistemas de factores. Luego la simplificación vendrá, cuando sea posible, por otro camino.

Al formar el cuadro de los grupos de Galois partimos de un subgrupo  $S_1 S_2 \dots S_r$  del grupo G y con él formamos la primera línea; si en vez de tomar ese subgrupo hubiéramos tomado un *invariante* y lo hubiéramos puesto por primera línea en el cuadro, todas las demás líneas de éste serían iguales, quedando reducido á una sola línea.

El cuadro G|J también se modifica. Una sustitución suya, cualquiera, es

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots \\ \varphi_\alpha & \varphi_\beta & \dots \end{vmatrix}.$$

La primera línea del cuadro queda toda reducida á 1, pues resulta de aplicar sucesivamente á  $\varphi_1 \varphi_2 \dots$  las sustituciones  $S_1, S_2, \dots, S_r$ . La segunda línea resulta de aplicar á  $\varphi_1 \varphi_2 \dots$  la análoga de G, ó sea las sustituciones  $T_1 S_1, T_1 S_2, T_1 S_3, \dots, T_1 S_r$ ; los segundos factores dan todos por resultado 1, y aplicando luego  $T_1$ , resulta la misma sustitución  $S_1$  en toda la segunda línea. De igual modo se ve que la tercera línea se reduce á  $S_2$ , y la última á  $S_p$ , y el cuadro se convierte en

$$\begin{vmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_p \end{vmatrix} = G|J.$$

Como resumen de lo que antecede, ya podemos indicar la teoría completa ó método de Galois, el cual conduce á la resolución algebraica de la ecuación, cuando esto es posible, á la simplificación cuando no puede resolverse por radicales, y á determinar las condiciones para que lo sea.

Recordemos que siendo  $f(x) = 0$  la ecuación dada, se forma la expresión

$$V = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n,$$

y que efectuando en ella todas las sustituciones posibles, se obtienen N! valores  $V_1, V_2, \dots, V_{N!}$ , los cuales son las raíces de la ecuación resolvente total  $\Psi(V) = 0$ .

(1) Véase el número 1.211.