Tracemos ahora la curva de marea $h = f(t)$ con relación á un eje vertical OY, tomando sobre él los tiempos en la escala $\frac{1}{\tau}$ y conservando para las alturas del agua la escala $\frac{1}{\lambda}$, colocando el origen O en el instante de baja mar.

Tracemos las paralelas á los ejes que en los dos sistemas horizontal y vertical corresponden á las horas — 1 — 2 — 3 — ..... A la hora 2, por ejemplo, corresponde sobre la curva de la marea un punto a y, por tanto, una altura Oa', y por consecuencia una sección a'a'' y se halla enseguida en a''' el punto buscado de la transformada para la hora 2 — . Del mismo modo se pueden determinar todos los demás puntos que se deseen. En la práctica no es necesario hacer el trazado de las curvas de marea, tomadas en la sección considerada. Basta construir la curva $s = f_1(h)$ sobre un papel calco cuadriculado de modo que las divisiones representan en la escala $\frac{1}{\tau}$ el intérvalo de tiempo que se haya tomado por unidad; aplicando este calco en la posición conveniente, sobre las curvas de una marea se pueden trazar fácilmente las curva $s = f_2(t)$ correspondientes á las mareas observadas.

Del mismo modo pueden obtenerse las curvas $l = f_3(t)$ que darán en función del tiempo, los anchos medios sucesivos de la sección considerada.

(Se continuará.)

FERNANDO G. ARENAL.

ATENEO DE MADRID

CONFERENCIAS DEL SR. ECHEGARAY (1)

Cuando T_1 pertenece al subgrupo, es evidente que $T_1 S_h \bar{T}_1^1$ también pertenece á él. Por eso dijimos que T_1 era cualquiera, alterando lo que de ordinario pasaba siempre, en que T_1 era una sustitución de las no comprendidas en el subgrupo.

Puede suceder que dentro del subgrupo $S_1 S_2 \ldots\ldots S_\alpha$ haya otro invariante suyo. Resulta de esto que en el grupo principal hay subgrupos que están contenidos unos en otros, siendo entre sí invariantes. Esto aparte de los otros subgrupos invariantes que puede haber sin estar comprendidos unos en otros.

Pues bien, el grupo invariante que contiene otros y á él sólo le contiene el grupo principal, se llama grupo *invariante máximo*.

Y vamos á demostrar que aquel subgrupo H, común á todos los grupos del cuadro de los tales de Galois, es un grupo *invariante*.

En efecto, sea S una sustitución cualquiera de H y formemos $s S \bar{s}^1$; $\bar{s}^1$ convierte á φ_α en φ_β; S, según el teorema de Picard, deja invariable á φ_β; y s convierte á φ_β en φ_α; luego $s S \bar{s}^1$ deja invariable á φ_α y es una de las H; por tanto, este es un grupo invariante del $S_1 S_2 \ldots\ldots S_{r_1}$.

Hemos representado por G el grupo de la ecuación $(f\,x) = 0$; ese grupo G $(S_1 S_2 \ldots\ldots S_{r_1} \ldots\ldots S_r)$ lo hemos puesto en forma de cuadro, siendo la primera línea el subgrupo $S_1 S_2 \ldots\ldots S_{r_1}$, que representaremos por J. De este cuadro hemos deducido el de las s, que representamos entonces por g y que desde ahora vamos á representar por el símbolo G|J, cuadro que, según vimos, era de menores dimensiones que el G. Pues bien, así como el cuadro G contiene todas las sustituciones que forman el grupo de la ecuación dada, de igual modo el cuadro G|J, el de las s, constituye el grupo de la ecuación $A(\varphi) = 0$, la que nos da las cantidades φ que, cual más adelante veremos, son de gran importancia en esta teoría de Galois.

Para demostrar que el cuadro G|J es el grupo de la ecuación $A(\varphi) = 0$, no hay más sino ver si satisface á las condiciones características del grupo de una ecuación. Y fácilmente se ve que si $F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots \varphi_\rho)$ es una función de las raíces de $A(\varphi) = 0$, queda invariable para toda sustitución de G|J; luego este cuadro es el grupo de $A(\varphi) = 0$.

Este teorema es favorable á la resolución de las ecuaciones; pero hay un teorema adverso, que dice que $A(\varphi)$ es irreducible. Y, en efecto, si no lo fuese tendría un factor $(\varphi - \varphi_1)(\varphi - \varphi_2) \ldots\ldots (\varphi - \varphi_\alpha)$, siendo $\alpha < \varphi$; y esto no es posible, pues poniendo en vez de φ una función del dominio de racionalidad, quedará una función racional de valor invariable que no puede descomponerse en dos sistemas de factores. Luego la simplificación vendrá, cuando sea posible, por otro camino.

Al formar el cuadro de los grupos de Galois partimos de un subgrupo $S_1 S_2 \ldots\ldots S_{r_1}$ del grupo G y con él formamos la primera línea; si en vez de tomar ese subgrupo hubiéramos tomado un *invariante* y lo hubiéramos puesto por primera línea en el cuadro, todas las demás líneas de éste serían iguales, quedando reducido á una sola línea.

El cuadro G|J también se modifica. Una sustitución suya, cualquiera, es

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \ldots\ldots \\ \varphi_\alpha & \varphi_\rho \ldots\ldots \end{vmatrix}.$$

La primera línea del cuadro queda toda reducida á 1, pues resulta de aplicar sucesivamente á $\varphi_1 \varphi_2 \ldots\ldots$ las sustituciones $S_1, S_2, \ldots\ldots S_{r_1}$. La segunda línea resulta de aplicar á $\varphi_1 \varphi_2 \ldots\ldots$ la análoga de G, ó sea las sustituciones $T_1 S_1, T_1 S_2, T_1 S_3, \ldots\ldots T_1 S_{r_1}$; los segundos factores dan todos por resultado 1, y aplicando luego T_1, resulta la misma sustitución S_2 en toda la segunda línea. De igual modo se ve que la tercera línea se reduce á S_3, y la última á S_ρ, y el cuadro se convierte en

$$\left.\begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_\rho \end{matrix}\right| = G|J.$$

Como resumen de lo que antecede, ya podemos indicar la teoría completa ó método de Galois, el cual conduce á la resolución algebráica de la ecuación, cuando esto es posible, á la simplificación cuando no puede resolverse por radicales, y á determinar las condiciones para que lo sea.

Recordemos que siendo $f(x) = 0$ la ecuación dada, se forma la expresión

$$V = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots\ldots + \alpha_n x_n,$$

y que efectuando en ella todas las sustituciones posibles, se obtienen N! valores $V_1, V_2, \ldots\ldots V_{N!}$, los cuales son las raíces de la ecuación resolvente total $\Psi(V) = 0$.

(1) Véase el número 1.211.

Representando por ψ (V) un factor simple cualquiera de Ψ (V) que corresponda á las raíces V_1, V_2, ... V_r, sabemos que todas las raíces de la ecuación dada se expresan en función racional de cada una de las de la resolvente parcial ψ (V) = 0, y así se obtiene

$$x_1 = R_1 (V_1),\ x_2 = R_2 (V_1),\ .....\ x_n = R_n (V_1).$$

Expresando ahora las mismas raíces en función de V_2, sabemos que las características de las nuevas funciones son las mismas anteriores; así

$$x_\alpha = R_1 (V_2),\ x_\beta = R_2 (V_2),\ .....\ x_\lambda = R_n (V_2).$$

De igual modo se obtiene

$$x_{\alpha_1} = R_1 (V_3),\ x_{\beta_1} = R_2 (V_3),\ .....\ x_{\lambda_1} = R_n (V_3).$$

Y por último,

$$x_{\alpha_{(r-2)}} = R_1 (V_r),\ x_{\beta_{(r-2)}} = R_2 (V_r),\ .....\ x_{\lambda_{(r-2)}} = R_n (V_r).$$

Combinando la primera línea de este cuadro con sí misma y con todas las demás, se forman r sustituciones S_1, S_2, ... S_r que, como sabemos, forman un grupo, que es el de la ecuación.

Este grupo G tendrá un subgrupo J (que, por lo menos, será J = 1), y tomando por primera línea este subgrupo J (S_1, S_2, ... S_{r_1}) se forma el cuadro de sustituciones de Galois, que tiene ρ líneas, siendo ρ el cociente de dividir r por r_1.

$$\rho\ \boxed{S_1\ S_2\ .....\ S_{r_1}}$$

Luego se forma el cuadro de los grupos de Galois que, cual ya sabemos, tiene por primera línea la misma del cuadro anterior, y las otras resultan de transformar las sustituciones S_1, S_2, ... S_{r_1} por las sustituciones T_2, T_3, ... T_ρ.

$$\boxed{\begin{array}{c} S_1\ S_2\ .....\ S_{r_1} \\ TS\overline{T}^1 \end{array}}$$

Después se busca una función φ, que no cambie de valor para todas las sustituciones de J. Aplicando á φ_1 las otras sustituciones del cuadro G, se obtienen los valores φ_2, φ_3, ... φ_ρ, pues sabemos que todas las sustituciones de cada línea de aquel cuadro dan el mismo resultado. Sabemos también que los grupos de estas funciones φ_1, φ_2, ... φ_ρ son las líneas del segundo cuadro que hemos formado, ó sea el de los grupos de Galois.

Aplicando ahora á φ_1, φ_2 ..... φ_ρ todas las sustituciones del cuadro G, ó sea S_1, S_2, ... S_{r_1}, ... S_r, se forman las sustituciones s y con ellas el cuadro G|J, el cual, como ya vimos, podía ser de menores dimensiones que el G, lo que sucedía cuando en el cuadro de los grupos de Galois había igual número H de sustituciones comunes á todas las líneas ó grupos.

Hasta aquí no hemos hecho sino recordar todo lo que antecede; ahora vamos á indicar en qué consiste el método de Galois.

Considerando las expresiones φ_1, φ_2, ... φ_ρ como cantidades adjuntas y ampliando el dominio de racionalidad de modo que en él queden comprendidas estas cantidades, el factor ψ (V), que era irreducible, no lo es en este nuevo dominio y admite el divisor ψ' (V); además, H resulta ser entonces el grupo de la ecuación, pues para las sustituciones de este grupo queda invariable toda función racional de las raíces de esa ecuación.

Ahora se repite con H lo mismo; se busca un subgrupo suyo, pero no uno cualquiera, sino uno que sea invariante, y las sustituciones que componían H, las cuales formaban un cuadro, dan lugar á otro cuadro de menores dimensiones; buscaremos otra función φ'_1 y de ella se deducirán las φ'_2, φ'_3 ..... φ'_ρ, y luego formaremos el cuadro de los grupos de estas nuevas φ', en el cual cuadro buscaremos un subgrupo H' común á todas las líneas, y tomando como nuevas adjuntas estas cantidades φ'_1, φ'_2, ..., el grupo de la ecuación se habrá reducido á H', y ψ' (V) tendrá otro factor ψ'' (V) de menor grado, y así sucesivamente. No hay necesidad de obtener estas resolventes parciales φ (V), porque llegaremos á un caso en que las líneas del cuadro de los grupos no tendrán ninguna sustitución común sino la unidad, y entonces la resolvente será de primer grado, $V_3 - L = 0$, por ejemplo, con lo cual queda determinada V_3, y luego en función de ella, por medio de las funciones R_1 (V_3), R_2 (V_3), ... R_n (V_3), quedan determinadas las raíces de la ecuación dada.

Siempre se llegará á ese invariante igual á 1 y no caben los temores que señalan algunos libros. La dificultad está en resolver las ecuaciones que dan las φ.

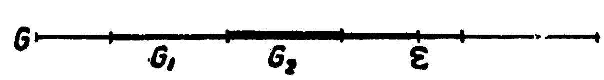
Para precipitar la marcha entre el concepto de los grupos invariantes é invariantes máximos.

Y ya que hemos abierto una especie de paréntesis para exponer el método de Galois, abriremos otro para recordar y ampliar lo que hemos dicho de los grupos invariantes.

Hemos dicho que en un subgrupo G_1 del grupo G es nvariante suyo cuando la transformada $\Sigma S \overline{\Sigma}^1$ es también una sustitución de G_1.

De esta definición se deduce que la unidad es un invariante, pues $\Sigma . 1 . \overline{\Sigma}^1 = 1$.

También es invariante el grupo alterno por componerse $\Sigma S \overline{\Sigma}^1$ de un número par de transposiciones, cuando S también se descompone en un número par. Para expresar simbólicamente que G_1 es un invariante de G se escribe $\Sigma G_1 \overline{\Sigma}^1 = G_1$ siendo Σ una sustitución cualquiera de G.



Un grupo puede tener varios invariantes. En esta figura se representan tres invariantes del grupo G; los tres segmentos G_1, G_2 y G_3 deberían tener un extremo común, porque los tres tienen la sustitución unidad, pero se representan separados para mayor claridad.

Ahora puede suceder que G_1 tenga un subgrupo invariante suyo G_2, pero que no sea invariante de G, es decir, según la notación simbólica, que $\Sigma G_1 \Sigma^1 = G_2$, siendo Σ una sustitución cualquiera del segmento G_1, mas no distinta de las de este segmento. Si G_1 no está contenido en ningún otro invariante es un *invariante máximo* de G.

Pues bien, dado G escojamos un invariante máximo suyo G_1; otro de éste G_2; otro de G_2, que llamaremos G_3, y así sucesivamente hasta llegar á 1. Con esto se forma la serie G, G_1, G_2, G_3, ... 1. Pero si G tiene otro invariante máximo G'_1, partiendo de éste y escogiendo las invariantes máximas comprendidas sucesivamente en los anteriores, formaremos esta otra serie G, G'_1, G'_2, ... 1. Y luego otra G, G''_1, G''_2, ... 1, y así sucesivamente, hasta agotar todos los invariantes máximos de G. En estas series están, pues, todos los invariantes máximos del grupo dado, pero no todos los invariantes ordinarios.

Representando por r el orden ó número de sustituciones de G y por la misma letra con los índices y acentos correspondientes los órdenes de los invariantes máximos sucesivos que entran en las series anteriores, si dividimos en cada serie el orden de cada grupo por el del siguiente, obtendremos unos cocientes exactos que se llaman *factores de composición*. Así, en la primera serie los factores de composición serán

$$\frac{r}{r_1} = e, \ \frac{r_1}{r_2} = e_1, \ \frac{r_2}{r_3} = e_2, \ldots..$$

En la segunda serie y en la tercera los factores serán

$$\frac{r}{r'_1} = e', \ \frac{r'_1}{r'_2} = e'_1, \ \frac{r'_2}{r'_3} = e_2, \ \ldots. \quad \text{y}$$

$$\frac{r}{r''_1} = e'', \ \frac{r''_1}{r''_2} = e''_1, \ \frac{r''_2}{r''_3} = e''_2, \ldots..$$

Estas series son las mismas aunque en distinto orden. Para demostrarlo tenemos que recordar y ampliar algo de lo que hemos dicho en los primeros artículos.

(Se continuará.)

M. LUIÑA.

REVISTA EXTRANJERA

Leyes de las corrientes eléctricas, y su influencia sobre el éter ambiente (1).

(Conclusión.)

Art. V.— Campo de una corriente circular.

Sea una corriente circular de centro o y de radio ρ (fig. 13), colocada en el plano de la figura, y m un punto cualquiera del espacio, que se proyecta en p. Unamos $om = h$ y op, y luego tracemos el diámetro dd' perpendicular á op, y una cuerda cualquiera ab, paralela á este diámetro; ab y dd' serán normales al plano mop.

Busquemos ahora la acción ejercida por los dos elementos de corriente aa', bb', sobre el átomo de éter situado en m. Los volúmenes elementales cruzados por la corriente, en bb', por ejemplo, pueden ser representados por $\sigma\rho d\omega$, siendo σ la sección del conductor y $d\omega$ la variación del ángulo que forma el radio móvil ob con la proyección fija ocp. Llamando α al ángulo de

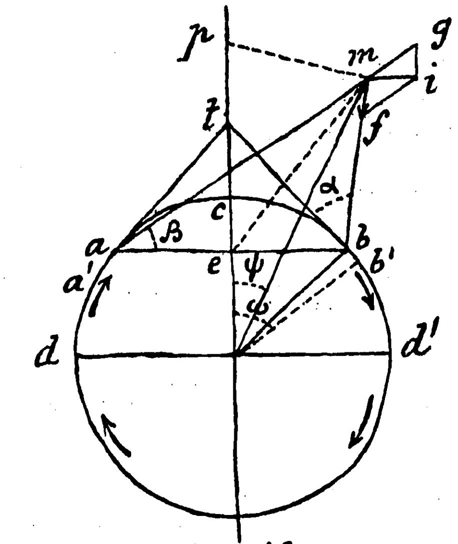


Fig 13

mb con la tangente bt, un átomo de éter de la corriente que pasa por b ejerce sobre el átomo m una atracción dirigida según mb é igual á $\frac{3}{8} k \, V \, \Delta t \cos \alpha \, \frac{r^2}{mb^2}$; y llamando n al número de átomos de la corriente contenidos en el volumen elemental que es proporcional á $\sigma\rho d\omega$, y observando que $\sigma V \Delta t$ es proporcional á la intensidad i de la corriente, se puede representar la acción del elemento de corriente bb' por

$$A i \, \frac{\cos \alpha \, \rho d\omega}{mb^2}$$

El elemento de corriente aa' ejercerá una acción repulsiva de igual intensidad, dirigida según la prolongación de am, y la resultante de las dos fuerzas iguales mf y mg coincidirá con la bisectriz del ángulo gmf, paralela á ab, y por consiguiente, perpendicular al plano mop. Por otra parte, su intensidad será

$$2 A i \, \frac{\cos \alpha \cos 6 \, \rho \, d\omega}{mb^2}, \text{ haciendo } gmi = fim = 6.$$

Luego la resultante de la influencia total de la corriente será

$$R = 2 A i \int_0^\pi \frac{\rho \cos \alpha \cos 6}{mb^2} \, d\omega.$$

Es necesario ahora valuar $\frac{\cos \alpha \cos 6}{mb^2}$ en función de la variable ω y de las constantes $ob = \rho$, $om = h$ y $mop = \psi$.

En primer lugar,

$$\cos 6 = \frac{be}{mb} = \frac{\rho \operatorname{sen} \omega}{mb},$$

y además, $mb^2 = h^2 + \rho^2 - 2 \rho h \cos mob$; pero en el triedro $mobp$, el diedro op es recto; luego

$$\cos mob = \cos \psi \cos \omega.$$

y

$$mb^2 = h^2 + \rho^2 - 2 \rho h \cos \psi \cos \omega.$$

(1) Véase el número anterior.