

Ahora puede suceder que G_1 tenga un subgrupo invariante suyo G_2 , pero que no sea invariante de G , es decir, según la notación simbólica, que $\Sigma G_2 \bar{\Sigma}^1 = G_2$, siendo Σ una sustitución cualquiera del segmento G_1 , mas no distinta de las de este segmento. Si G_1 no está contenido en ningún otro invariante es un *invariante máximo* de G .

Pues bien, dado G escojamos un invariante máximo suyo G_1 ; otro de éste G_2 ; otro de G_2 , que llamaremos G_3 , y así sucesivamente hasta llegar a 1. Con esto se forma la serie $G, G_1, G_2, G_3, \dots, 1$. Pero si G tiene otro invariante máximo G'_1 , partiendo de éste y escogiendo las invariantes máximas comprendidas sucesivamente en los anteriores, formaremos esta otra serie $G, G'_1, G'_2, \dots, 1$. Y luego otra $G, G''_1, G''_2, \dots, 1$, y así sucesivamente, hasta agotar todos los invariantes máximos de G . En estas series están, pues, todos los invariantes máximos del grupo dado, pero no todos los invariantes ordinarios.

Representando por r el orden ó número de sustituciones de G y por la misma letra con los índices y acentos correspondientes los órdenes de los invariantes máximos sucesivos que entran en las series anteriores, si dividimos en cada serie el orden de cada grupo por el del siguiente, obtendremos unos cocientes exactos que se llaman *factores de composición*. Así, en la primera serie los factores de composición serán

$$\frac{r}{r_1} = e, \frac{r_1}{r_2} = e_1, \frac{r_2}{r_3} = e_2, \dots$$

En la segunda serie y en la tercera los factores serán

$$\frac{r}{r'_1} = e', \frac{r'_1}{r'_2} = e'_1, \frac{r'_2}{r'_3} = e'_2, \dots \quad \text{y}$$

$$\frac{r}{r''_1} = e'', \frac{r''_1}{r''_2} = e''_1, \frac{r''_2}{r''_3} = e''_2, \dots$$

Estas series son las mismas aunque en distinto orden. Para demostrarlo tenemos que recordar y ampliar algo de lo que hemos dicho en los primeros artículos.

(Se continuará.)

M. LUIÑA.

REVISTA EXTRANJERA

Leyes de las corrientes eléctricas, y su influencia sobre el éter ambiente (1).

(Conclusión.)

Art. V.— Campo de una corriente circular.

Sea una corriente circular de centro o y de radio ρ (fig. 13), colocada en el plano de la figura, y m un punto cualquiera del espacio, que se proyecta en p . Unamos $om = h$ y op , y luego tracemos el diámetro dd' perpendicular a op , y una cuerda cualquiera ab , paralela a este diámetro; ab y dd' serán normales al plano mop .

Busquemos ahora la acción ejercida por los dos elementos de corriente aa' , bb' , sobre el átomo de éter situado en m . Los

(1) Véase el número anterior.

volúmenes elementales cruzados por la corriente, en bb' , por ejemplo, pueden ser representados por $\sigma \rho d\omega$, siendo σ la sección del conductor y $d\omega$ la variación del ángulo que forma el radio móvil ob con la proyección fija ocp . Llamando α al ángulo de

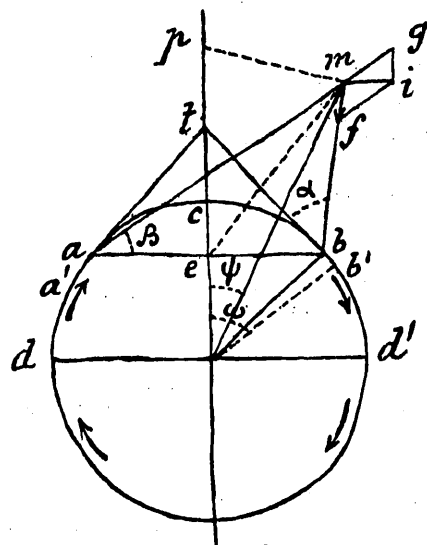


Fig 13

mb con la tangente bt , un átomo de éter de la corriente que pasa por b ejerce sobre el átomo m una atracción dirigida según mb é igual a $\frac{3}{8} k V \Delta t \cos \alpha \frac{r^2}{mb^2}$; y llamando n al número de átomos de la corriente contenidos en el volumen elemental que es proporcional a $\sigma \rho d\omega$, y observando que $\sigma V \Delta t$ es proporcional a la intensidad i de la corriente, se puede representar la acción del elemento de corriente bb' por

$$A i \frac{\cos \alpha \rho d\omega}{mb^2}$$

El elemento de corriente aa' ejercerá una acción repulsiva de igual intensidad, dirigida según la prolongación de am , y la resultante de las dos fuerzas iguales mf y mg coincidirá con la bisectriz del ángulo gmf , paralela a ab , y por consiguiente, perpendicular al plano mop . Por otra parte, su intensidad será

$$2 A i \frac{\cos \alpha \cos \epsilon \rho d\omega}{mb^2}, \text{ haciendo } gmi = fim = \epsilon.$$

Luego la resultante de la influencia total de la corriente será

$$R = 2 A i \int_0^\pi \frac{\rho \cos \alpha \cos \epsilon}{mb^2} d\omega.$$

Es necesario ahora valuar $\frac{\cos \alpha \cos \epsilon}{mb^2}$ en función de la variable ω y de las constantes $ob = \rho$, $om = h$ y $mop = \psi$.

En primer lugar,

$$\cos \epsilon = \frac{be}{mb} = \frac{\rho \sin \omega}{mb},$$

y además, $mb^2 = h^2 + \rho^2 - 2 \rho h \cos \psi \cos \omega$; pero en el triedro $mobp$, el diedro op es recto; luego

$$\cos \psi \cos \omega = \cos \epsilon.$$

y

$$mb^2 = h^2 + \rho^2 - 2 \rho h \cos \psi \cos \omega.$$

Finalmente, el triángulo mbd da

$$\cos \alpha = \frac{mb^2 + bt^2 - mt^2}{2mb \cdot bt}$$

y después de algunas transformaciones, se llega á las expresiones

$$\cos \alpha = \frac{h \cos \psi \operatorname{sen} \omega}{bm}, \text{ y } \cos \alpha \cos \epsilon = \frac{\rho h \cos \psi \operatorname{sen}^2 \omega}{mb^2}$$

Luego

$$R = 2 A i \int_0^\pi \frac{h \rho^2 \cos \psi \operatorname{sen}^2 \omega d\omega}{(h^2 + \rho^2 - 2\rho h \cos \psi \cos \omega)^2}$$

$$= \frac{2 A i h \rho^2 \cos \psi}{(h^2 + \rho^2)^2} \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2 \omega d\omega}{(1 - B \cos \omega)^2}$$

siendo

$$B = \frac{2\rho h \cos \psi}{h^2 + \rho^2}$$

Se deduce ahora

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2 \omega d\omega}{(1 - B \cos \omega)^2} = \frac{1}{B} \int_0^\pi \frac{\cos \omega d\omega}{1 - B \cos \omega}$$

$$= -\frac{\pi}{B^2} + \frac{1}{B^2} \int_0^\pi \frac{d\omega}{1 - B \cos \omega}$$

Por otra parte

$$\int_0^\pi \frac{d\omega}{1 - B \cos \omega}$$

$$= \left[\frac{2}{\sqrt{1-B^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{1+B}{1-B}} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \right) \right]_0^\pi = \frac{\pi}{\sqrt{1-B^2}}$$

Luego finalmente,

$$R = \frac{2 A i \rho^2 h \cos \psi \pi}{(h^2 + \rho^2)^2 B^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-B^2}} - 1 \right)$$

$$= \frac{\pi A i}{2 h \cos \psi} \left(\frac{1}{\sqrt{1-B^2}} - 1 \right)$$

$$= \frac{\pi A i}{2 h \cos \psi} \left(\frac{1}{2} B^2 + \frac{3}{8} B^4 - 1 \right)$$

Y despreciando B^4

$$R = A i \frac{\pi \rho^2 h \cos \psi}{(h^2 + \rho^2)^2} = A i \frac{\pi \rho^2 \cos \psi}{h^3 \left(1 + \frac{\rho^2}{h^2} \right)^2}$$

Si la razón $\frac{\rho^2}{h^2}$ es despreciable en comparación de la unidad, se podrá decir que la acción de la corriente es proporcional á $\cos \psi$, á la intensidad i y á la superficie del círculo $\pi \rho^2$, y en razón inversa de h^3 .

Además, es perpendicular á om , paralela al plano del círculo y dirigida en el sentido de la corriente.

Para $\cos \psi = 0$, ó $\psi = \frac{\pi}{2}$, la influencia es nula. Por consiguiente, los átomos de éter situados en la perpendicular al centro del círculo no están influidos, y esta perpendicular es el eje de los vértices excitados por la corriente.

A cada valor particular de ψ responde un cono recto, y la sección de este cono por un plano paralelo á la corriente da una circunferencia sobre la cual los átomos de éter reciben impulsiones tangenciales iguales.

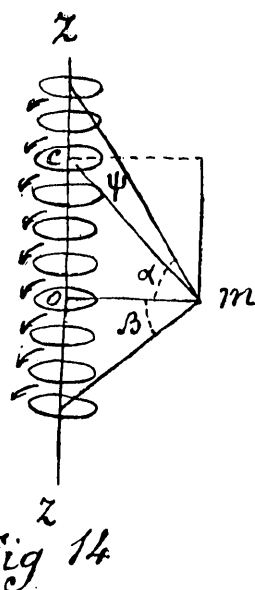
Si el punto m se proyectase en el interior del círculo, la fórmula sería la misma; pero se tendría

$$h \cos \psi < \rho$$

y ya no se podría suponer que $\frac{\rho^2}{h^2}$ fuese muy pequeño.

Art. VI.—Campo de un solenoide.

Consideremos una serie de corrientes circulares iguales, paralelas y del mismo sentido, cuyos centros se hallan distribuidos regularmente sobre el eje rectilíneo zz , y sea m un punto cualquiera del espacio (fig. 14). Bajemos desde este punto una per-



pendicular mo al eje de las z y supongamos que su pie coincide con el centro O de una de las corrientes circulares. Según el artículo precedente, la acción de una corriente cualquiera c sobre un átomo de éter situado en m estará representada por la fórmula

$$f = A i \frac{\pi \rho^2 h \cos \psi}{(h^2 + \rho^2)^2}$$

en la cual, las diversas letras tienen igual significación que anteriormente.

Si designamos co por z y mo por x , tendremos

$$h \cos \psi = x$$

y

$$h^2 = x^2 + z^2$$

y la fórmula se convertirá en

$$f = \frac{A i \pi \rho^2 x}{(\rho^2 + x^2 + z^2)^2}$$

Por otra parte, la dirección de la fuerza es la de la perpendicular levantada en m al plano mco , hacia el lado á donde se dirige la corriente. Siendo esta dirección fija, será la misma para todas las corrientes aisladas, y la resultante general R de todas las fuerzas parciales será igual á su suma; luego

$$R = A i \pi \rho^2 \sum_z \frac{x}{(\rho^2 + x^2 + z^2)^2}$$

Para efectuar esta suma, tomemos por unidad de longitud la distancia c que separa dos corrientes consecutivas; hagamos $\rho = \rho'c$, $x = x'c$, $z = z'c$, $z_1 = n'c$, $z_2 = n''c$, y tendremos que calcular entonces

$$R = \frac{Ai \pi \rho'^2}{c} \sum \frac{n''}{n'} \frac{x'}{(\rho'^2 + x'^2 + z'^2)^{3/2}};$$

expresión que demuestra que la resultante está en razón inversa de la distancia c entre dos círculos consecutivos. Limitémonos al caso más sencillo y teóricamente el más importante, el de un solenoide de espiras muy próximas. Se puede entonces reemplazar la suma por una integración, y se obtiene

$$R = Ai \pi \rho^2 x \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{(\rho^2 + x^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{Ai \pi \rho^2 x}{2(\rho^2 + x^2)^{3/2}} \left[\frac{z}{\sqrt{\rho^2 + x^2}} : \left(1 + \frac{z^2}{\rho^2 + x^2} \right) + \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + x^2}} \right]_{z_1}^{z_2}$$

Cuando se trata de un filete solenoidal y ρ^2 es bastante pequeño para poder ser despreciado frente a x^2 , la resultante toma la forma más sencilla

$$R = \frac{Ai \pi \rho^2}{2x^2} \left[\frac{z}{x} : \left(1 + \frac{z^2}{x^2} \right) + \operatorname{arctg} \frac{z}{x} \right]_{z_1}^{z_2}$$

Examinando la figura se ve que

$$\frac{z_2}{x} = \operatorname{tg} \alpha, \quad -\frac{z_1}{x} = \operatorname{tg} \beta;$$

y sustituyendo, se encuentra

$$R = \frac{Ai \pi \rho^2}{2x^2} \left(\frac{\operatorname{sen} 2\alpha + \operatorname{sen} \beta}{2} + (x + \beta) \right);$$

$\alpha + \beta$ es el ángulo bajo el cual se ve desde el punto m el filete solenoidal. Si el filete es indefinido, la fórmula se reduce a

$$R = \frac{Ai \pi \rho^2}{2x^2}$$

Comparando las modificaciones del medio producidas por una corriente rectilínea y por una corriente solenoidal indefinidas, se observa que las superficies isodinámicas son en ambos casos cilindros circulares rectos, que tienen por eje la corriente ó el filete; pero en el primero, las fuerzas están dirigidas según las generatrices y arrastran el éter en el mismo sentido de la corriente; y en el segundo, las fuerzas están dirigidas perpendicularmente a las generatrices y tienden a producir un torbellino de éter alrededor del filete.

Obsérvase también que, en el primer caso, las variaciones de la fuerza están en razón inversa de la distancia, y en el segundo, del cuadrado de la distancia.

Prueba de una nueva campana de buzo.

En América se ha llevado a cabo un ensayo de una campana de buzo fundada en un principio nuevo, ó al menos no sometido a pruebas prácticas hasta ahora.

Tratábase de una campana de buzo capaz de resistir, gracias a la disposición de su armazón metálica y de la resistencia propia de las superficies que la limitaban, a la presión del agua

ambiente, de modo que en su interior pudieran respirar los buzos el aire a la presión atmosférica, cualquiera que fuese la profundidad. Es el mismo principio admitido como base fundamental de su programa por el distinguido alumno de la Escuela de Caminos D. Eduardo Navarro Beltrán, quien publicó en esta REVISTA, hace dos años, un interesante artículo titulado «Ensayo teórico de una escafandra metálica», como recordarán nuestros lectores.

La idea es, en efecto, seductora, pues se trata nada menos que extender el dominio del hombre a profundidades mayores que las accesibles actualmente, que no pasan de unos 50 metros; y los inventores americanos, provistos de medios materiales de que no podía disponer nuestro compatriota para intentar esta empresa, no han vacilado en realizar una prueba en el lago de Michigán, sumergiendo una campana sólidamente construída a una profundidad de 61 metros.

La campana era en conjunto de forma cúbica con aristas de 1^m,80, pero con la planta ligeramente estrechada según la dirección de uno de los ejes, como una pila de puente dotada de tajamares ó como un barco. Estaba formada de placas de bronce fosforoso de 16 milímetros de espesor con bridas en su contorno para unir las unas con otras por medio de pasadores, empleando el mayor número posible de éstos, de modo que las cabezas y las tuercas quedaban casi en contacto. Además, las placas estaban reforzadas interiormente por nervios de 25 milímetros de grueso y 50 de longitud en sentido perpendicular a la superficie exterior de la campana, y las paredes estaban fuertemente arriostradas por medio de un sistema de tirantes dispuestos para oponerse a cualquier deformación. A fin de poder observar la parte exterior, se dejaron unos ventanillos de 76^{mm}. de lado cerrados con cristales de 25^{mm}. de espesor y reforzados interiormente con fuertes barras de hierro.

El experimento se verificó a 12 millas de la margen del lago Michigán, en un punto en que la profundidad era de 61 metros, como ya hemos dicho. El constructor tenía tal confianza en que la campana resistiría a la presión, que se había propuesto bajar al fondo del lago encerrado en ella. Por fortuna para él, renunció a tiempo a esa atrevida prueba; porque no había llegado aún al fondo la campana, cuando se vieron flotar en la superficie de las aguas algunas piezas de madera que se habían dejado unidas a ella al sumergirla. Sospecharon los experimentadores lo ocurrido, y al tratar de levantar la campana, observaron que el aparato había quedado reducido a un informe montón de escombros; los gruesos cristales de las ventanillas se habían reducido a polvo y las placas de metal de las paredes opuestas, violentamente deformadas y empujadas por la presión del agua hacia el interior, habían llegado a tocarse.

Se ha dicho que la campana debió haberse construído de forma esférica y era lo lógico y natural; pero es lo cierto que, aparte de esto, se habían adoptado toda clase de precauciones para aumentar en lo posible la resistencia del aparato, y sin embargo no bastaron para impedir la rotura casi instantánea antes de llegar a la profundidad prevista.