tal de una región tan rica sólo exista la vía que transporta á Port-Nolloth los productos cupríferos de Ookiep.

El Sudoeste africano también se encuentra limpio hasta la fecha de trazos indicadores de ferrocarriles en las cartas geográficas más recientes. Los alemanes, sin embargo, están empezando la construcción de uno de 500 kilómetros, que desde la desembocadura del Swakop se dirigirá á Otijimbingue y Vindhoc para fusionarse más tarde con la prolongación de la red del Cabo y apenas atacadas las obras en una extensión de 25 kilómetros, ya piensan en otro entre Angra Pequeña y Bethania para explotar la Namaqualandia.

Que en todos estos proyectos se ve algo más que el interés puramente comercial, no cabe desconocerlo; pero como para juzgar acerca de ellos habría que colocarse en un punto de vista ageno á nuestro propósito, dejemos á los aficionados á tal género de estudios que saquen partido de estas escuetas relaciones. Y mientras que las potencias mimadas hoy por la fortuna, avanzan hacia el corazón del Africa con dobles filas de carriles, acompañando á sus políticas coloniales la acción real y productiva de la actividad y del trabajo, aprovechémonos siquiera de sus enseñanzas y reconozcamos en los ferrocarriles africanos los instrumentos pacíficos que preparan y aseguran el dominio sobre las comarcas que atraviesan.

RAMÓN S. DE LOS TERREROS.

TEORÍA DE LAS FUNCIONES ELÍPTICAS

Extracto de las conferencias dadas por D. José Echegaray en el Ateneo de Madrid.

El primero que se dedicó al estudio de las funciones elípticas, de un modo didáctico y ordenado, fué Legendre. Este insigne matemático, dedicado durante mucho tiempo al cálculo integral, vió en unas integrales de forma especial el origen de unas nuevas funciones, á cuyo estudio se dedicó desde entonces, y sobre las cuales escribió una gran obra (su tratado de funciones elípticas), que puede considerarse como clásico en el estudio de esta materia.

La obra de Legendre, que estableció los fundamentos de la nueva teoría, es notable por su claridad; los cálculos son de una sencillez extraordinaria, de una transparencia absoluta; cualquier principiante, por poco versado que esté en el conocimiento de las matemáticas superiores, puede seguir las transformaciones, sin dificultad ninguna. Pero si estas transformaciones son tan sencillas, tan fáciles, carecen, en cambio, de elegancia; no se verifican de un modo natural y lógico, sino por medio de artificios más ó menos directos, casi siempre difíciles de retener en la memoria. Este abuso, de los artificios de cálculo, tendremos ocasión de observarlo al hacer el estudio de la teoría, siguiendo las doctrinas de su fundador, en cuyo estudio tomaremos por guía la obra de Legendre.

Después de Legendre, otros muchos matemáticos siguieron el estudio de las funciones elípticas, entre ellos Jacobi, cuyos *principales trabajos y notaciones* son dignos de consulta.

Quizás estos estudios hubieran sido abandonados si un joven matemático noruego, Abel, no hubiera venido á darles nueva impulsión, considerando á las funciones elípticas bajo un nuevo aspecto.

Abel empieza estudiando las funciones *doblemente periódicas*, y encuentra, en las funciones elípticas, la *doble periodicidad*.

Todavía se ha llegado al estudio de las nuevas funciones por otros caminos. Briot y Bouquet encuentran en la aplicación de las integrales imaginarias estudiadas por Cauchy una nueva manera de llegar al estudio de las funciones elípticas (1).

Ha habido quien ha hecho el estudio de esta teoría como una especie de trigonometría de la elipse; pero los modernos procedimientos, que tanta simplificación han introducido en los cálculos, son debidos á los matemáticos alemanes, que toman como punto de partida de sus investigaciones los estudios de Abel.

Los alemanes, Weiertrass entre ellos, entran en el estudio de la teoría por la doble periodicidad, y el principal mérito de sus trabajos es la gran simplificación introducida en los cálculos. Reducen el polinomio de cuarto grado, que figura bajo radical, á polinomio de tercero, y, de este modo, la integral que Legendre consideraba como más general, no es sino un caso particular de la integral con polinomio de tercer grado, que da lugar á cálculos mucho más sencillos.

Enviamos, al que quiera más detalles sobre la materia, á las *Memorias de Veiertrass* y á la notable obra de *Halphen*, de cuyo tercer tomo sólo hay publicado un cuaderno.

Daremos fin á esta enumeración de procedimientos indicando el seguido por los modernos matemáticos ingleses. Tratan éstos el asunto de un modo esencialmente práctico. Sus obras no desarrollan la teoría de un modo general, sino que se limitan á presentar la resolución de una serie de problemas, en cuyo planteamiento aparece una integral elíptica.

Vemos, pues, que las funciones elípticas han sido consideradas de modos muy diversos, y que han sido muchos los matemáticos que de ellas se han ocupado en estos últimos tiempos. Multitud de obras tiene á su disposición el que emprenda el estudio de esta nueva teoría; y estas obras no son sólo folletos, simples monografías, sino también tratados completos, todos ellos de carácter didáctico y muy apropiados, para servir de texto en un curso de funciones elípticas.

Pero el estudio, hecho con arreglo á una sola de esas obras, pecaría de deficiente. Si elegimos la obra de Legendre y á ella circunscribimos nuestra atención, el estudio será anticuado y desconoceremos los modernos procedimientos de Weiertrass, que tanta simplificación han introducido en la teoría. Si nos limitamos á las obras modernas, dejando á un lado la de Legendre, el estudio carecerá de una base sólida. En todo caso, al ocuparnos de una sola obra, conoceremos la teoría bajo un sólo punto de vista, el del autor, y el estudio será, necesariamente, incompleto.

Por todas estas razones, y deseando estudiar del modo más completo posible la teoría de las funciones elípticas, seguiremos en la exposición un orden histórico, empezando por considerar esas funciones como lo hizo el fundador de la teoría, el insigne matemático Legendre.

(1) Briot y Bouquet.—Su gran obra (segunda edición).

I

NOCIONES PRELIMINARES

Funciones.—Cuando dos variables x é y están ligadas entre sí por una relación, en virtud de la cual los valores de una de las variables dependen de los que reciba la otra, se dice que la primera variable es función de la segunda. A esta última variable, cuya ley de variación es arbitraria, se la llama *variable independiente*.

Si consideramos á x como variable independiente y á y como función, la igualdad simbólica

$$y = f(x)$$

expresa de un modo general, y en abstracto, la ley de dependencia que liga los valores de y con los correspondientes de x. Claro es que si y depende de x, la recíproca es cierta; x dependerá de y.

Operando con la x, de todas las maneras posibles, por los procedimientos algebráicos (sumas, restas), obtendremos una infinidad de polinomios ó cocientes de polinomios, capaces de expresar la ley de dependencia algebráicamente. Estas funciones se llaman *algebráicas*.

Variando los coeficientes exponentes, podemos obtener una infinidad de polinomios ó fracciones en x, que corresponden á distintas leyes de variación de y; pero no por esto debemos creer que todas las funciones puedan expresarse por polinomios algebráicos ó cocientes de polinomios.

El arco s de elipse, contado á partir del eje de las y, y la abscisa x correspondiente, deben estar ligados por alguna relación. El seno de un arco de círculo varía con dicho arco. El ángulo θ, que forma con la vertical el péndulo en una posición cualquiera, depende, evidentemente, del tiempo t transcurrido desde que aquél ocupó la posición vertical. Podemos, pues, escribir

$$s = f(x), \text{ sen } x = \varphi(x), \theta = \psi(t);$$

pero si queremos determinar la forma de las funciones f, φ, ψ, nos encontraremos con que ninguna función algebráica es capaz de expresar, en términos finitos, aquellas leyes de variación. Siowille demostró, en una Memoria, la imposibilidad para las funciones elípticas. Fácil nos sería demostrarlo para las citadas y para otras muchas que pudieran presentarse; pero nos basta hacer constar este hecho, en virtud del cual aparecen otras nuevas funciones llamadas *transcendentes*.

Hemos dicho que las funciones transcendentes no pueden expresarse por polinomios algebráicos en términos finitos. Se ha hecho esta salvedad porque muchas de las funciones transcendentes pueden expresarse algebráicamente con tal que el número de términos sea infinito. Esta solución la proporcionan las *series convergentes*, que no definiremos por sernos perfectamente conocidas.

(*Se continuará.*)

JUAN GONZÁLEZ PIEDRA.

REVISTA EXTRANJERA

Puentes de fábrica articulados en los arranques y en la clave.

Desde que fueron dados á conocer en la prensa técnica los primeros puentes de fábrica articulados por medio de placas de plomo interpuestas en las juntas de las dovelas de la clave y de los arranques, construídos por el ingeniero Leibbrand en Alemania, hemos procurado tener á nuestros lectores al corriente de los progresos realizados en esta materia, que ofrece un interés excepcional para los ingenieros.

El año 1891 publicamos una primera serie de artículos, en los números 21, 22 y 23, dando cuenta de los primeros estudios y de la construcción de los puentes de Hofen, sobre el río Enz (de 28 metros de luz y 2,m80 de flecha); de Wildbab, sobre el mismo río (15,m60 y 3,m25); Neuneck, sobre el río Glatt (17 metros y 3,m00); y de Marbach, sobre el Murr (32 metros y 3,m10).

Posteriormente hemos descrito, en artículos ó notas más ó menos extensas: el puente de la Coulouvrenière, sobre el Ródano, en Ginebra (37 metros de luz y 4,m80 de flecha), con articulaciones de viguetas metálicas, en el número 6 del primer semestre de 1896; el de Inzigkofen, sobre el Danubio (43,m00 de luz y 4,m38 de flecha), también con articulaciones metálicas, en el número 20 del segundo semestre del mismo año; el 30 de Diciembre de 1897 describimos el puente ya muy importante de Munderkingen, sobre el Danubio (de 59 y metros de luz y 5 de flecha, con 8 metros de ancho útil); y en el número 1.205, correspondiente al 27 de Octubre último, dimos una noticia sucinta acerca del puente de Inmau, sobre el río Eyach, de 30 metros de luz, rebajado al 1/10 y construído con articulaciones de granito.

Más recientemente aún, en nuestro número 1.208, correspondiente al 17 de Noviembre último, hablamos de un puente proyectado por nuestro compañero D. José Eugenio Ribera para el río Nalón, en la carretera de Oviedo á Soto del Barco, también de hormigón y articulado, de 50 metros de luz y rebajado al 1/10.

El asunto despierta, con razón, mucho interés, pues se trata de un sistema de construcción llamado indudablemente á adquirir gran desarrollo, permitiendo ampliar las luces, hasta ahora reducidas, á las cuales se pueden aplicar únicamente en la actualidad los puentes de fábrica, por razones económicas. Como prueba de que interesa á los ingenieros esta materia, podemos afirmar que son muchos los que nos han consultado acerca de la literatura referente á ella.

En el tomo correspondiente al tercer trimestre de 1898 de los *Annales des Ponts et Chaussées*, que acaba de publicarse, hemos leído una memoria del Inspector general francés M. Bourdelles, en la cual se resume toda la doctrina admitida actualmente respecto á los puentes de hormigón con tres articulaciones. Y en vista de la importancia del asunto, nos proponemos publicar en varios números de la REVISTA, la traducción *in extenso* de ese interesante trabajo, pues no creemos deber contentarnos con dar á conocer á nuestros lectores un extracto ó un simple resumen de él, tratándose de una materia de mucha actualidad y de gran importancia.

INTRODUCCIÓN

1. El problema de la triple articulación de los arcos no es nuevo. Ya, en 1854, J. Poirée proponía recurrir, para los puen-