Derivada de una función, es el límite del incremento de esa función al de la variable, cuando éste tiende hacia *cero*,

$$\text{Lim}\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

No insistiremos sobre estas funciones derivadas, pues nos son ya perfectamente conocidas; únicamente hablaremos algo sobre una cuestión muy discutida. *¿Existe siempre la derivada?*

Los matemáticos han admitido por mucho tiempo, como evidente, la existencia de la derivada, en el caso de ser la función continua. Ya sabemos cómo lo demostraban: construían la curva representativa de la función $y = f(x)$, referido á dos ejes rectangulares; y se veía que la derivada, en cada punto, estaba representada por el coeficiente angular de la tangente, perfectamente determinado y finito, salvo en ciertos puntos *singulares*, los cuales, si existían, era siempre en número muy limitado.

Esto, aunque parece muy sencillo, no es cierto tan en general como lo admitían los citados matemáticos. Hay *funciones continuas* que tienen su derivada indeterminada en puntos que no son singulares; más aún: hay funciones que, á pesar de su continuidad perfecta, tienen la derivada completamente indeterminada en todos sus puntos.

No vamos á hacer una demostración matemática de esta resta; vamos sólo á presentar una *imagen* que nos haga concebir la posibilidad de que aquello suceda.

Consideremos una serie discontinua de puntos, y alrededor de cada uno de ellos una espiral que tenga al punto correspondiente por polo. Imaginemos que los puntos se aproximan indefinidamente hasta dar lugar á una curva continua; concibamos, al mismo tiempo, que cada espiral va transformándose por ley de continuidad, dando lugar á otras cuyas espiras son cada vez más próximas, más apretadas; y que, en el límite, cada espiral, decreciendo de este modo, llega á condensar el número infinito de sus espiras en el punto que la servía de polo. Llegado ese límite, la curva continua, lugar geométrico de los polos, puede, á la vez, considerarse como un conjunto de espirales. La tangente, en un punto cualquiera de la curva, será la tangente á la espiral correspondiente; pero esta tangente es indeterminada, luego el coeficiente angular, que representa la derivada, lo es también en todos los puntos de la curva.

Repetimos que el razonamiento precedente no tiene el rigor matemático de una demostración, pero sirve, sin embargo, para hacer concebir la posibilidad de que una función continua tenga la derivada indeterminada para cualquier valor de la variable.

Funciones integrales. — Resuelto el problema general del cálculo diferencial, se presenta al matemático la resolución del problema inverso.

El cálculo diferencial nos dice cuál es la derivada $f'(x)$ de una función conocida $f(x)$ El cálculo integral plantea el problema inverso. ¿Cuál es la función, $f(x)$, capaz de tener por derivada $f'(x)$?

Nosotros concebimos que siempre existirá una función (ó varias) capaz de resolver el problema, y que esa función desconocida, debiendo estar ligada con la derivada, podrá representarse por una función de dicha derivada

$$f(x) = Y\,[f'(x)],$$

en la cual el símbolo Y expresa una operación contraria á la derivación y el problema queda reducido á determinar la función Y.

Pero no es esta la manera de considerar el problema en el cálculo integral. El modo corriente de hacerlo es: definir la función $f(x)$ por la expresión

$$f(x) \int_{x_0}^{x} f'(x)\,dx.$$

¿Qué representa el segundo miembro? El segundo miembro representa, según sabemos, el límite de la suma

$$\Sigma_{x_0}^{x} f'(x)\,\Delta x,$$

cuando Δx tiende hacia *cero*.

Fácil es demostrar que la función definida de este modo es la integral de $f'(x)$. Construyamos la curva $f'(x)$ referida á dos ejes de coordenadas; la expresión $\int_{x_0}^{x} f'(x)\,dx$ estará representada por el área comprendida entre la curva, el eje de las x y las ordenadas correspondientes á las abscisas x_0 y x; el incremento de la función $f(x)$, para un incremento dx de la variable, será

$$dy = f'(x)\,dx,$$

luego la derivada de $f(x)$ será $f'(x)$, como se quería demostrar.

(Continuará.)

JUAN GONZÁLEZ PIEDRA.

INSPECCIÓN CENTRAL DE SEÑALES MARÍTIMAS

Apreciables colegas en la prensa se ocuparon con juicios altamente favorables de la reforma que implica el Real decreto de 28 de Enero último.

Sobre este particular recibimos también hace días atenta carta del Sr. Presidente de la Junta Consultiva de Caminos, Canales y Puertos, que contiene la siguiente autorizada opinión:

«Con gran satisfacción he leído el número de esa *Revista* de 30 de Enero último, dedicado exclusivamente á la publicación del Real decreto del 28 creando la *Inspección central de señales marítimas.* Ha tenido esa Redacción una excelente idea en dar á conocer al público el alcance y la grandísima importancia de dicha soberana disposición, que ha de sacar nuestro anticuado sistema de alumbrado y valizamiento de las costas y puertos del lamentable estado de atraso en que se encuentra respecto á lo que hoy se halla establecido en todas las naciones civilizadas y no dudo que todos los Ingenieros lo habrán aplaudido.

»Plácemes merece también esa Redacción por los elogios que tributa á los que han contribuído á la publicación del mencionado Real decreto, Sres. Sagasta, Ministro de Fomento; Arias Miranda, Director general de obras públicas; Sanz, Subdirector y Jefe del Negociado de Puertos, y De Federico, Diputado á Cortes, pues todos ellos merecen bien del país por la parte que cada uno ha tenido en tan importantísimo asunto; pues justo es que se premie con el aplauso unánime lo que tan beneficioso ha de ser para las marinas de todas las naciones y que ha de redundar en el crédito de esta hoy desdichada España, que no se abate por los reveses de la fortuna, y que en medio de sus que-

(1) Véanse los números de 2 de Abril y 15 de Octubre de 1896.

brantos no olvida los más sagrados deberes de la humanidad».

Descartando, aunque agradeciendo sinceramente, los elogios inmerecidos que dedica á esta Redacción por haber prestado atención especial á dicho Real decreto, encontramos muy justificados los de las personalidades mencionadas y no lo serían menos los que se tributasen á la Junta Consultiva de Caminos por haber expuesto en 1896 á la Superioridad la necesidad del estudio de la reforma de los planes del alumbrado marítimo y valizamiento vigentes (1) y al Sr. Alvarez Núñez en particular en lo que se refiere al establecimiento del museo de aparatos y accesorios de los diversos modelos usados en los faros que propuso desde la Dirección de la Escuela.

Como se ve, se confirma la primera impresión que consignamos en nuestro número extraordinario. Ahora lo que hace falta es que las Cortes reconozcan igual importancia á este asunto de interés general, en los Presupuestos.

REVISTA EXTRANJERA

Empuje de tierras.—Aplicación á las obras públicas de la fórmula de Boussinesq (1).

Designemos por:

φ, el ángulo natural del talud de las tierras con el horizonte;

α, el ángulo del mismo talud con la vertical;

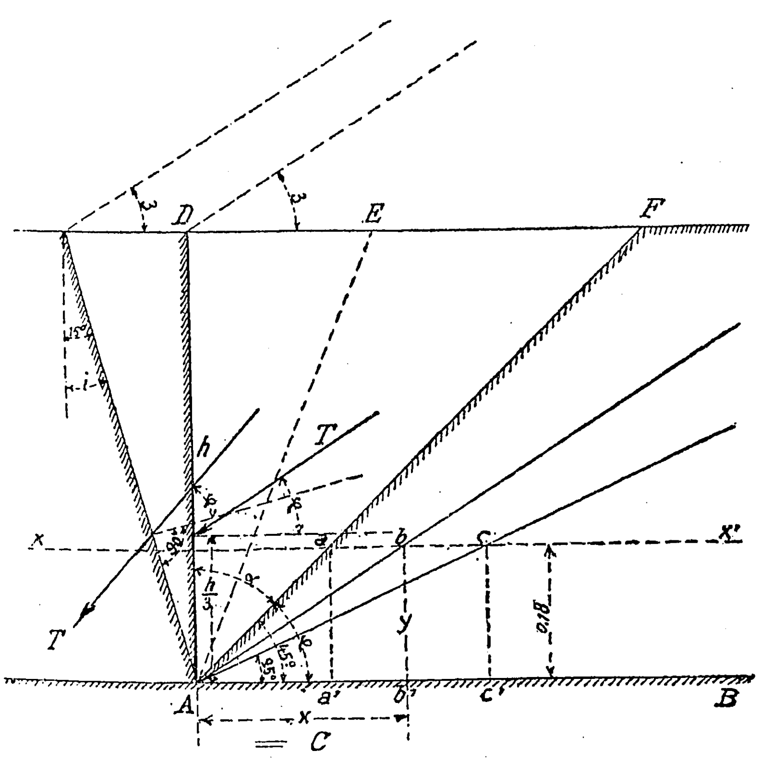
i, el ángulo que forma el paramento posterior del muro con la vertical;

ω, el ángulo del plano superior del terraplén con el horizonte;

h, la altura del terraplén;

π, el peso del metro cúbico de tierra.

Tracemos la bisectriz A E del ángulo α (figura adjunta).



Para determinar el empuje horizontal, cuyo punto de aplicación se halla al tercio de la altura del muro á partir de la base del terraplén, se emplea ordinariamente la fórmula sencilla:

(1) *Nouvelles Annales de la construction*, Ch. Maurel.

$$Q = \operatorname{tang}^2 \frac{\alpha}{2} \frac{\pi h^2}{2}.$$

la cual se puede resolver con los datos de la figura. Son conocidos, en efecto, α, h y π, y se sabe además que $D\,E = h \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}$.

Mas se obtienen así empujes exagerados á los cuales hay que oponer un volumen de fábrica mayor que el estrictamente necesario.

El empuje exacto, ó por lo menos muy aproximado, se deduce de la fórmula:

$$T = \frac{k}{\cos\varphi} \frac{\pi h^2}{2 \cos^2 i}$$

dada por Boussinesq (1); pero el cálculo del coeficiente k es bastante penoso. Para simplificar las operaciones, el Inspector general, M. Flamant, formó unas tablas, publicadas en el número de Abril de 1885 de los *Annales des ponts et chaussées*, las cuales dan, en todos los casos usuales en la práctica, el coeficiente C por el cual hay que multiplicar el factor $\frac{\pi h^2}{2}$ para obtener el valor T del empuje. Estas tablas han sido reproducidas por el Ingeniero Jefe Sr. Résal en la *Enciclopedia de obras públicas*. (Puentes de fábrica, 1er tomo); aplícanse á los casos en que

φ está comprendido entre 21° y 45°
i — — 0° y 25°
y ω — — 0° y 45°

M. Flamant ha determinado también T por un procedimiento gráfico aproximado que se puede ver en los *Annales des ponts et chaussées* de 1885 y en la *Enciclopedia de obras públicas*. (Estabilidad de construcciones y resistencia de materiales).

Por desgracia, el empleo de este método racional no parece que se pueda extender fácilmente. Hemos creído que los prácticos utilizarían sus resultados, si poseyeran, para la determinación exacta del empuje de las tierras, un procedimiento enteramente elemental, fácil de retener en la memoria, y que no exigiera el uso de tablas. Esta es la razón que nos induce á dar á conocer un procedimiento empírico muy sencillo, y que da resultados sensiblemente exactos dentro de los siguientes límites:

$\omega = o$, explanación horizontal.
φ comprendido entre 25° y 45°
i — — 0° y 16°

Entre estos límites están comprendidas las aplicaciones más frecuentes en obras públicas.

El siguiente cuadro da por una parte las cifras obtenidas por M. Flamant (valores exactos de C) y por otra, los resultados que se obtienen por el método empírico que indicamos más adelante (valores aproximados de C).

Las diferencias se hallan inscritas en una columna encabezada: diferencias + ó —.

Como se ve, los coeficientes aproximados son sensiblemente iguales á los exactos. La mayor diferencia positiva absoluta corresponde á $\varphi = 24°$, é $i = 10°$.

Afectando el término $\frac{\pi h^2}{2}$ del coeficiente aproximado 0,505, se obtendría un valor del empuje que excedería del verdadero próximamente en $^1/_{11}$.

El mayor error negativo absoluto tiene lugar para $\varphi = 45°$ é $i = o$ La aplicación del coeficiente aproximado 0,180 daría un empuje inferior al verdadero en $^1/_{16}$ de este último.

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 17, 24 y 31 de Mayo y 7 de Abril de 1884.