de Amberes empleó unos 50 millones para aumentar las dársenas y proporcionar medios rápidos de carga y descarga.

La nueva extensión de 2.000 metros del muelle de ribera está presupuesta en 11 millones de francos, que habrán de tener bastante aumento cuando la nueva zona esté completa con almacenes, grúas, vías y demás accesorios indispensables.

Si á estas sumas se agregan las gastadas entre Amberes y Lillo y en las otras rectificaciones mencionadas, se comprenderá la importancia de los trabajos ejecutados para mejorar las condiciones de la navegación de la ría más frecuentada de Bélgica.

No se puede decir que hayan sido gastos improductivos, pues el tráfico marítimo, que era de 1.118.158 toneladas á la entrada en 1870, llegó á 6.315.930 en 1897, y el que por la ría y canales se verifica aguas arriba de Amberes, de 1.030.785 en 1870, pasa á 4.102.650 en 1897. Como el tonelaje de salida es, próximamente, igual, resulta la suma de ambos, tanto á la entrada como á la salida, de 4.297.886 en 1870 y de 20.837.140 en 1897, rápido aumento del cual no hay ejemplo en Europa, teniendo sólo en cuenta condiciones de industria y comercio; pues el de Hamburgo, que en igual período pudiera compararsele, es debido, en gran parte, á circunstancias políticas, que le han convertido en el primer puerto de la confederación ó imperio germánico después de la guerra del 70.

En cambio, Amberes es sólo el primer puerto de una nación pequeña; tiene la embocadura de la ría Fleringa, que le hace una gran competencia; por el Sur están Dunkerque y el Havre; y por el Norte Amsterdam y Roterdam; y entre todos descuella, dejándolos atrás, no sólo en tonelaje absoluto, sino en el aumento progresivo, lo cual prueba que ha sabido, más que ningún otro, adaptarse á la transformación que en ese mismo período se ha efectuado en las condiciones del transporte marítimo. En efecto, en los últimos treinta años la navegación de vela ha quedado reducida á menos de la cuarta parte, y la de vapor ha duplicado en tonelaje; de aquí que haya sido preciso variar las condiciones de explotación de los puertos, tanto porque son insuficientes los calados y muelles, que antes prestaban excelentes servicios, como por la rapidez que se impone en las operaciones de carga y descarga, pues mientras que en los barcos de vela se contaba por semana, en los de vapor tiene importancia una ó dos horas, que pueda economizarse en una escala, aun tratándose de buques de carga, pues los rápidos trasatlánticos cuentan hasta los minutos, y basta que se vean obligados á retrasar su itinerario para que abandonen un puerto de medianas condiciones para hacer escala en otro donde se trabaja más rápidamente.

El haberse amoldado á estas condiciones, y en cierto modo adelantado á la transformación, y el estar unido á una red muy perfecta de caminos de hierro y de canales, es lo que explica que Amberes haya quintuplicado su tráfico en el período citado y se haya puesto á la cabeza de los puertos de la Europa continental. Débese también, en parte, este rápido aumento, á la excelente administración y lo bien organizados que están todos los servicios, la primera á cargo del síndico y una comisión del Municipio de Amberes, que conserva precedentes de independencia, de que hace excelente uso, y tiene á su servicio Ingenieros que garantizan la buena ejecución de todas las obras. Así es que el puerto está tan bien montado como los mejores de Inglaterra, y no resultan tan caros los servicios que en él se prestan al comercio y á la navegación.

*(Se continuará.)*

FERNANDO G. ARENAL.

## TEORÍA DE LAS FUNCIONES ELÍPTICAS (1)

**Extracto de las conferencias dadas por D. José Echegaray en el Ateneo de Madrid.**

(Continuación.)

Queda, pues, definida la función integral por la igualdad

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} f'(x)\, dx,$$

en la cual el límite superior $x$ es variable y el inferior $x_0$ una constante que determina la ordenada, á partir de la cual se cuentan las representativas de los diversos valores de la función. Haciendo variar el límite inferior $x_0$ se obtienen una infinidad de funciones, integrales todas de $f'(x)$, que sólo difieren entre sí en una constante.

Puesto que el cálculo integral nos da el medio de retroceder de una función derivada á la función primitiva correspondiente, lógico es hacer aplicación de este cálculo á la investigación de nuevas funciones. Pero si hacemos una lista y nos proponemos determinar una por una las integrales correspondientes, observaremos desde luego la imposibilidad de integrar todas ellas. A este primer resultado, hijo de la falta de generalidad de los procedimientos del cálculo integral, se une otra nueva observación; las expresiones integrales dan por resultado funciones conocidas.

Es natural. Fijémonos en los procedimientos del cálculo integral, y comparémoslos con los del diferencial: en este último se procede de un modo directo, en aquél de una manera empírica, por decirlo así; en el segundo se halla directamente el límite de la relación del incremento de la función al de la variable, al tender el último á cero—y así se dice que $x^m$ tiene por derivada $mx^{m-1}$; en el primero se dice que la integral de $mx^{m-1}$ es $x^m$, no porque lo averiguemos directamente, sino porque sabemos la recíproca—que la derivada de $x^m$ es $mx^{m-1}$. Vemos, pues, que, ya sea la integral inmediata, se necesita ser preparada por transformaciones; si llegamos á obtener una función que tenga por derivada la propuesta, esa función *tiene que ser conocida*. Sólo cuando no sepamos hacer la integración, podremos asegurar que nos hallamos frente á una función nueva cuya expresión simbólica es

$$\int_{x_0}^{x} f'(x)\, dx.$$

A través de esa forma simbólica, podemos percibir las propiedades de la función desconocida; y al ver que ninguna, de las que conocemos, goza de esas propiedades que

(1) Véase el número anterior.

descubrimos, llegaremos á la convicción de que, efectivamente, nos hallamos enfrente de una nueva función.

Tratemos de aclarar los conceptos precedentes por un ejemplo. Propongámonos hacer la integración de la expresión

$$\int_1^x \frac{dx}{x}.$$

Todos sabemos que la derivada de L es $\frac{1}{x}$, y por lo tanto, que la expresión anterior es igual á L$x$. Pero esto lo sabemos porque conocemos los legenitinos; si no los conociéramos, si supiéramos que sólo nos son conocidas las funciones algebráicas, nos encontraríamos en frente de una función desconocida cuya expresión simbólica es

$$\int_1^x \frac{dx}{x}. \quad (1)$$

Designemos esta función *desconocida* por $f(x)$; vamos á ver que el símbolo (1) nos acusa las propiedades de la función $f(x)$. Nada más sencillo. Demostramos, por ejemplo, la propiedad que expresa la igualdad siguiente:

$$f(a) + f(6) = f(a\,b);$$

que no es sino el conocido teorema «el logaritmo del producto es la suma de los logaritmos de los factores». En efecto,

$$f(x) = \int_1^x \frac{dx}{x},$$

luego:

$$f(a) = \int_1^a \frac{dx}{x},$$

$$f(a\,b) = \int_1^{ab} \frac{dx}{x} = \int_1^a \frac{dx}{x} + \int_a^{ab} \frac{dx}{x}.$$

Podemos transformar el segundo sumando en otra integral, cuyos límites sean más sencillos, haciendo $x = az$, lo cual no ofrece inconveniente, puesto que $\frac{1}{x}$ no pasa por $x$ entre los límites. Se tiene así:

$$\left.\begin{array}{l} x = ae \\ dx = adz \end{array}\right| \begin{array}{ll} x = a & z = 1 \\ x = ab & z = b \end{array} \left| f(ab) = \int_1^a \frac{dx}{x} + \int_1^2 \frac{dz}{z} = f(a) + f(b)\right.$$

como queríamos demostrar.

---

Como resumen de lo que precede podemos asegurar: que si formamos una lista de todas las expresiones que sabemos integrar, aplicando los procedimientos del cálculo, cualquiera otra expresión no comprendida en esa lista dará lugar, el día que lleguemos á integrarla, á una nueva función desconocida hasta ese día.

El insigne matemático Legendre estudió todas las expresiones consideradas, hasta entonces, como integrables, y dió procedimientos de integración para muchas de ellas; formó una lista de estas expresiones integrables y vió que todas quedaban comprendidas en la forma simbólica general

$$\int F\left(x, \sqrt{X}\right) dx,$$

en la cual X es un polinomio de segundo grado en $x$, y F expresa una función algebráica racional.

Si varía la forma de la función F, ó el grado del polinomio X, las expresiones que resulten de esas variaciones nos ofrecen nuevos problemas de cálculo integral.

Examinando Legendre la expresión que había determinado, vió como de sus alteraciones iban surgiendo esos nuevos problemas de cálculo; y tomando uno de esos problemas, en particular, á él consagró desde entonces toda su atención, estableciendo las bases de una nueva teoría, la de las funciones elípticas, en cuyo estudio vamos á entrar.

La integral estudiada por Legendre se derivaba de la general con sólo suponer que el polinomio X es de tercer ó cuarto grado; la función F se conservaba algebráica y racional.

Las nuevas expresiones

$$\int F\left[x, \sqrt{ax^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3}\right] dx,$$

$$\int F\left[x, \sqrt{ax^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4}\right] dx,$$

son el símbolo de las nuevas funciones denominadas *elípticas*.

Si suponemos que el polinomio es de grado superior al cuarto, del grado $m$, en general, resultarán nuevas funciones, que por analogía llamaremos *hiper-elípticas*. La forma general de una función hiper-elíptica de grado $m$ es, pues:

$$\int F\left(x, \sqrt{X}\right) dx,$$

siendo

$$X = ax^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a^m.$$

---

Presentadas de este modo abstracto las integrales elípticas, no parecen sino puras lucubraciones matemáticas, más propias para dar ocasión al matemático de lucir la sutilidad de su ingenio, que para satisfacer las necesidades de la práctica y dar solución á los problemas que plantean las ciencias de aplicación.

Sin embargo, hemos dicho que los matemáticos ingleses tratan la cuestión de un modo esencialmente práctico, presentando en sus obras, no una teoría completa y matemática de las funciones elípticas, sino la resolución de una serie de problemas de Mecánica, Física matemática, etcétera, por medio de estas nuevas funciones.

(*Se continuará.*)

JUAN GONZÁLEZ PIEDRA.