sucesivamente, llevando ante sí materiales más gruesos, hasta que dada la exagerada curvatura del dique, empezaría á inclinarse por su centro aguas arriba, á cuartearse, por consiguiente, y, por fin, á su completa y paulatina destrucción.

En omisiones análogas incurrieron nuestros antepasados al construir esta clase de obras, como podrá leerse en el artículo siguiente.

ANTONIO LASIERRA.

DETERMINACIÓN DE LA LUZ DE COSTE MÍNIMO EN UN PUENTE METÁLICO

DE LONGITUD TOTAL DADA

Al tratar de proyectar un puente metálico, se presenta siempre un problema de importancia capital si se ha de establecer con acierto la obra. Consiste en determinar las luces más convenientes de los tramos ó el número de pilas que se deben construir para obtener la mayor economía posible.

Los ingenieros han resuelto, hasta ahora, este problema, generalmente por medio de tanteos, siguiendo un procedimiento puramente empírico.

En nuestra *Práctica usual de los cálculos de estabilidad de los puentes* dimos una solución de carácter general, fundada en el trazado de ciertas curvas. Su aspecto nos sugirió la idea de sustituirlas por otras que se aproximasen á ellas lo suficiente para no ocasionar errores de un orden inadmisible en la práctica y susceptibles de una definición geométrica, para poder aplicar á ellas los métodos conocidos del análisis. Y, en efecto, la solución es muy fácil siguiendo este método, por medio del cual se obtiene una fórmula sencillísima que se puede aplicar con toda confianza en la mayor parte de los casos que se presentan en la práctica.

Vamos á dar á conocer el resultado de este estudio; pero convendrá recordar antes la solución que propusimos en el libro citado.

«Para la determinación de la luz más económica en los puentes metálicos, decíamos allí, puede seguirse un método general que da la solución del problema con toda la aproximación necesaria en la práctica.

Se puede suponer, provisionalmente, que todos los tramos han de ser iguales, y valuar, en cada una de las soluciones, el coste alzado de la parte metálica. Para ello basta acudir al cuadro que da el peso de la estructura metálica para las diversas luces, y conocido el peso de la obra en toneladas, multiplicarlo por el precio de la tonelada puesta en obra, obteniéndose así el coste de la superestructura.

Hecho esto, se traza una curva cuyas abscisas son las luces y cuyas ordenadas representan los costes en escalas arbitrarias.

La ordenada de esta curva crece rápidamente con la luz, como se ve en la curva de trazo fino (fig. 1.)

Como el espesor de una pila varía poco con las luces, se puede determinar un precio medio que se admite para todas las pilas, y llevando como ordenadas correspondientes á las luces estudiadas el coste total de las pilas que exige cada solución, obtendremos la curva de trazos, cuya ordenada decrece rápidamente cuando aumenta la abscisa.

Para cada luz, la suma de las ordenadas de las curvas precedentes nos indicará el coste total de la obra (prescindiendo de los estribos, que representan un gasto común á todas las soluciones y no es necesario tener en cuenta). La curva de trazo grueso representa esta curva, y la abscisa correspondiente á su ordenada mínima será la luz más conveniente.

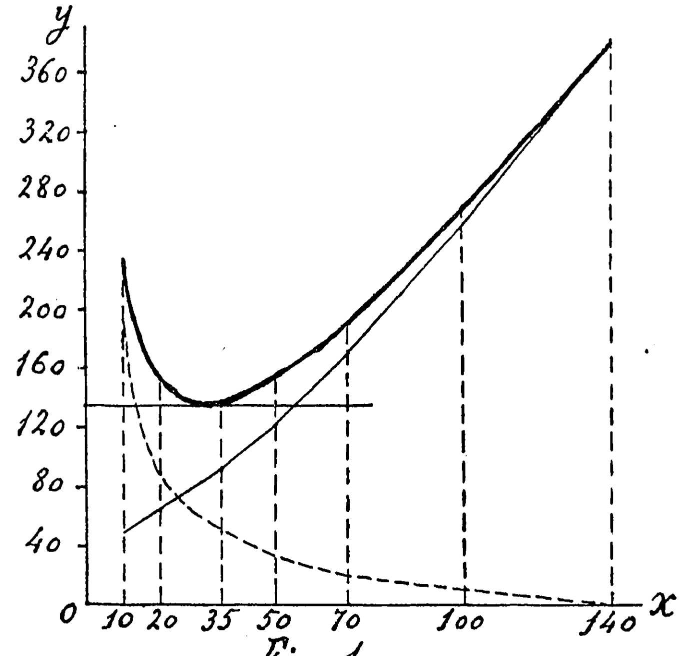

Fig 1.

Un ejemplo aclarará la explicación que precede.

Ejemplo.—Supongamos que se trata de un puente para ferrocarril de simple vía, cuya longitud total es de 140 metros.

Admitiendo que las luces hayan de ser iguales en todos los tramos, estudiaremos las cinco soluciones siguientes:

1.ª	14	tramos de	10	metros con	13	pilas.
2.ª	7	—	20	—	6	—
3.ª	4	—	35	—	3	—
4.ª	2	—	70	—	1	—
5.ª	1	—	140	—	0	—

Estudiando el peso de la super-estructura metálica en cada una de estas soluciones, por medio del cuadro citado, y admitiendo que el precio de la tonelada de hierro puesta en obra sea de 400 pesetas, tendremos los valores siguientes:

SOLUCIONES	Peso por metro lineal. — *Toneladas.*	PESO DE LA ESTRUCTURA METÁLICA — *Toneladas.*	COSTE — *Pesetas.*
1.ª	0,783	$0,783 \times 140 = 109,62$	43 848
2.ª	1,115	$1,115 \times 140 = 156,10$	62.440
3.ª	1,682	$1,682 \times 140 = 235,48$	94.192
4.ª	3,191	$3,191 \times 140 = 446,74$	178.696
5.ª	6,519	$6,519 \times 140 = 912,66$	365.064

Tomando por abscisas las luces correspondientes á cada solución y por ordenadas los costes, se obtiene la curva de trazo fino de la fig. 1. Se ha adoptado para escala de distancias medio milímetro por metro, y para las ordenadas 4 milímetros por cada 20.000 pesetas.

Suponiendo que cada pila cuesta, por término medio, 15.000 pesetas, el coste total será, para las distintas soluciones:

1.ª solución,	13 × 15.000 =	195.000	pesetas.
2.ª —	6 × 15.000 =	90.000	—
3.ª —	3 × 15.000 =	45.000	—
4.ª —	1 × 15.000 =	15.000	—
5.ª	0	0	—

La curva de trazos representada en la figura se ha obtenido tomando como abscisas las luces correspondientes á las distintas soluciones, y como ordenadas las cifras que preceden.

Finalmente, sumando las ordenadas de las curvas anteriores, se obtiene la representada con trazo grueso, cuyas abscisas son las luces y cuyas ordenadas son los costes de las obras correspondientes á aquéllas, prescindiendo de los estribos. La abscisa correspondiente á la ordenada mínima es la luz que conviene adoptar.

La combinación mas ventajosa es la construcción de 5 tramos de 28 metros.»

Pasemos ahora á exponer la solución analítica del mismo problema.

Es fácil demostrar las tres proposiciones siguientes:

1.ª *La curva que representa el coste de la parte metálica en función de la luz puede ser sustituída por una recta, sin error sensible para nuestro objeto, en todos los casos que ofrecen interés en la práctica.*

2.ª *La curva que representa el coste de las pilas en las diversas soluciones es,* POR SU NATURALEZA, *una hipérbola equilátera, que tiene por asíntotas el eje de las* y *y una paralela al eje de las* x *trazada á una distancia igual á la que representa el precio medio* P *de una pila por el lado de las ordenadas negativas.*

3.ª *La curva de los costes totales, que resulta de sumar las ordenadas de la recta y de la hipérbola equilátera definidas anteriormente, es otra hipérbola, que tiene por asíntotas el eje de las* y *y una paralela á la recta de los costes de la estructura metálica, cuyas ordenadas son inferiores á las de aquélla en la magnitud constante* P (véase fig. 5).

1.º *El coste de la estructura metálica puede ser representado por una función lineal de la luz.*

Constituyen la base de este estudio los cuadros estadísticos que dan los pesos de la parte metálica en función de la luz. Croizette-Desnoyers trata extensamente este punto en su *Cours de construction des ponts*, y sus cuadros son los más conocidos y generalizados.

Para representar los términos medios de los pesos por metro lineal en los puentes de ferrocarriles y por metro superficial de planta en los de carreteras, propone este autor las siguientes expresiones:

Puentes de simple vía para ferrocarriles.

(Pesos por metro lineal.)

$$y = 51\sqrt{50^2 + (x+28)^2} - 2.420 \qquad (a)$$

Puentes de doble vía para ferrocarriles.

(Pesos por metro lineal.)

$$y = 92{,}82\sqrt{50^2 + (x+28)^2} - 4.404 \qquad (b)$$

Puentes para carreteras.

(Pesos por metro cuadrado de planta.)

$$y = 8{,}50\sqrt{50^2 + (x+20)^2} - 375 \qquad (c)$$

Estas fórmulas son bastante complicadas, y aunque se podrían adoptar sin inconveniente para el cálculo, es preferible sustituirlas por otras funciones que conduzcan á una fórmula final mas sencilla.

Basta examinar los cuadros gráficos que figuran en las páginas 488 y 489 del tomo II de la obra citada y la lámina XLV del atlas, que contiene el cuadro correspondiente á los ferrocarriles de simple vía en mayor escala y con minuciosos pormenores que explican su formación, para convencerse, por el simple aspecto de las curvas, de que se pueden reemplazar por líneas rectas sin cometer errores que puedan afectar prácticamente á los resultados, y sin que dichas rectas dejen de representar los términos medios de los pesos de los puentes considerados tan legítimamente como las funciones irracionales adoptadas por el autor.

Las adjuntas figuras 2, 3 y 4 representan, por una parte, las curvas de los cuadros formados por Croizette-Desnoyers y por otra, las rectas con que nos proponemos reemplazarlas. Basta una simple ojeada para comprender, dada la naturaleza del problema que nos ocupa, que no puede esta sustitución introducir errores dignos de ser tenidos en cuenta. La lámina XLV de la obra de Croizette-Desnoyers contiene, como hemos indicado, el detalle de la formación del cuadro para el caso de los tramos de ferrocarriles de simple vía, y en ella se indican por puntos aislados las luces y los pesos de un gran número de puentes. Si se traza en ese gráfico la recta definida por los dos puntos

$$x = 0 \qquad y = 300$$
$$x = 160 \qquad y = 7.500$$

se ve que, no sólo no se separa mucho de la curva del cuadro, sino que representa perfectamente un término medio de los pesos de los puentes que figuran en él.

En suma, se pueden adoptar en los tres casos citados las tres rectas siguientes, que definimos por dos de sus puntos:

Pesos por met. lineal de los tramos para ferrocarriles de simple via.

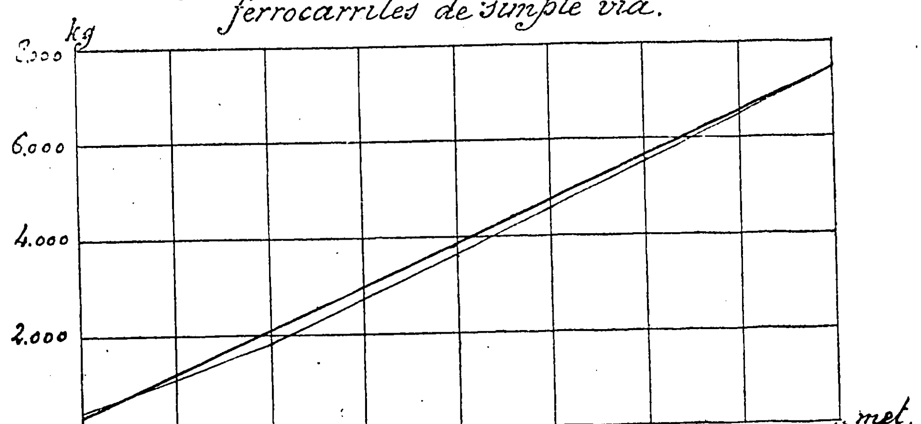

Fig 2.

Puentes de simple vía para ferrocarriles.

(Peso por metro lineal.)

$x = 0 \quad y = 300$ } Ecuación de la recta
$x = 160 \quad y = 7.500$ } $y = 45\,x + 300$ $\quad (a')$

Puentes de doble vía para ferrocarriles.

(Peso por metro lineal.)

$x = 0 \quad y = 500$ } Ecuación de la recta
$x = 160 \quad y = 13.000$ } $y = 78\,x + 500$ $\quad (b')$

Puentes para carreteras.

(Peso por metro cuadrado de planta.)

$x = 0 \quad y = 0$ } Ecuación de la recta
$x = 100 \quad y = 730$ } $y = 7{,}3\,x$ $\quad (c')$

Es de observar que, en este último caso, la recta propuesta se separa bastante del término medio en el intervalo de x comprendido entre cero y 40 metros. En esta región, cuya consideración es muy importante en los puentes de carreteras, se ciñe mejor á los resultados de la estadística la recta AB de la figura 4, que se define así:

$x = 0 \quad y = 70$ } Ecuación de la recta
$x = 40 \quad y = 280$ } $y = 5{,}25\,x + 70$ $\quad (c'')$

Es recomendable su uso con preferencia á la fórmula (c') cuando los datos del problema conduzcan á luces pequeñas.

Debemos advertir también que en el caso de los puentes para carreteras, y representa el peso por metro cuadrado de planta, y para obtener el peso por metro lineal, que es el que dan los cuadros para los puentes de ferrocarriles, hay que multiplicar los valores (c') y (c'') por el ancho útil del puente.

El Ingeniero austriaco Sr. Leber presentó al Congreso internacional de ferrocarriles celebrado en Londres en los meses de Junio y Julio de 1895 una extensa memoria titulada *Construction des ponts métalliques*, de la cual dimos cuenta en la sección bibliográfica de esta Revista, número 24 de Septiembre de 1896.

Esta memoria contiene un nuevo cuadro gráfico muy completo de los puentes metálicos para los ferrocarriles, en el cual hay tres curvas que representan, por cada vía establecida en el puente, los pesos por metro lineal de la estructura metálica para tráfico ligero, medio y pesado respectivamente.

Para luces comprendidas entre 0 y 100 metros, estas tres curvas pueden ser reemplazadas por las rectas siguientes:

Tráfico ligero.

(Peso por metro lineal.)

$x = 0 \quad y = 400$ } Ecuación de la recta
$x = 100 \quad y = 3.000$ } $y = 26\,x\,400$ $\quad (a_1)$

Tráfico de peso medio.

(Peso por metro lineal.)

$x = 0 \quad y = 800$ } Ecuación de la recta
$x = 100 \quad y = 4.400$ } $y = 36\,x + 800$ $\quad (a_2)$

Tráfico pesado.

(Peso por metro lineal.)

$x = 0 \quad y = 1.000$ } Ecuación de la recta
$x = 100 \quad y = 5.600$ } $y = 46\,x + 1.000$ $\quad (a_3)$

Finalmente, en la misma memoria se encuentra un cuadro más detallado que se refiere únicamente á luces pequeñas, inferiores á 25 metros.

Los pesos medios de dicho cuadro pueden ser representados aproximadamente por las tres rectas siguientes:

Tráfico ligero.

(Peso por metro lineal.)

$x = 0 \quad y = 230$ } Ecuación de la recta
$x = 25 \quad y = 1.080$ } $y = 34\,x + 230$ $\quad (\alpha_1)$

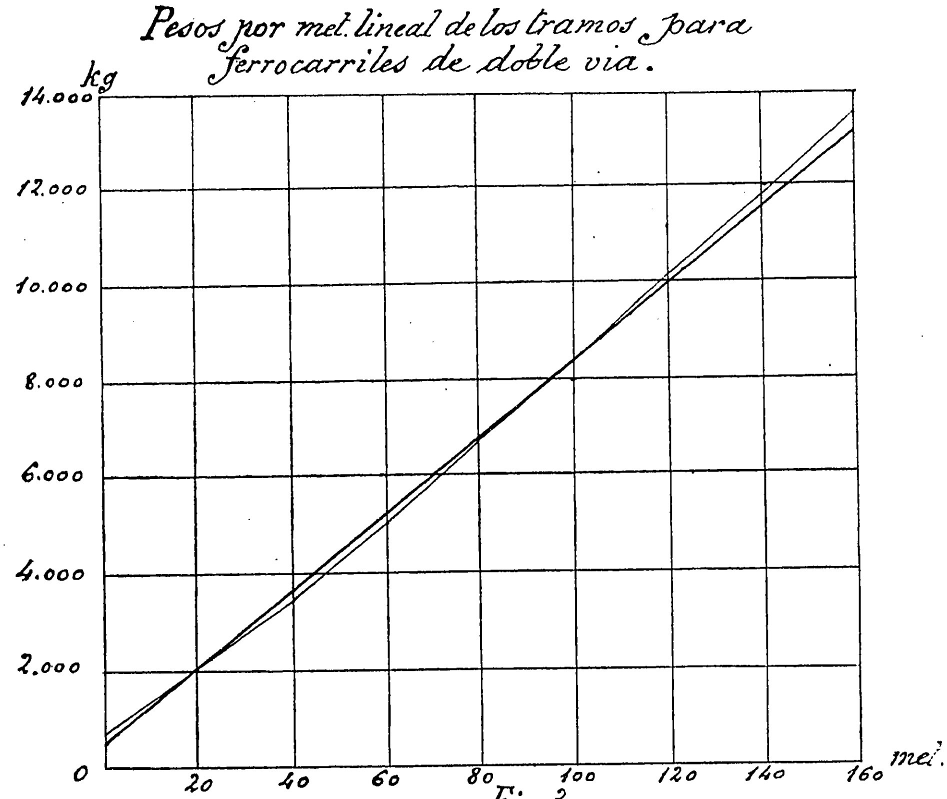

Fig 3.

Tráfico de peso medio.

(Peso por metro lineal.)

$x = 0 \quad y = 400$ } Ecuación de la recta
$x = 25 \quad y = 1.700$ } $y = 52\,x + 400$ $\quad (\alpha_2)$

Tráfico pesado.

(Peso por metro lineal.)

$x = 0 \quad y = 600$ } Ecuación de la recta
$x = 25 \quad y = 2.300$ } $y = 68\,x + 600$ $\quad (\alpha_3)$

En lo que precede hemos indicado simplemente soluciones generales que se aproximan en conjunto á las funciones dadas por los cuadros. En los casos particulares que se presenten, será siempre posible llegar á valores de las constantes muy aproximados á la verdad, investigando por medio de un tanteo previo un intervalo de x en el cual deba hallarse la solución, y buscando una recta que se ciña bien á las curvas de los cuadros dentro de ese intervalo.

En resumen, dedúcese de las anteriores consideraciones, que se puede siempre expresar el peso del metro li-

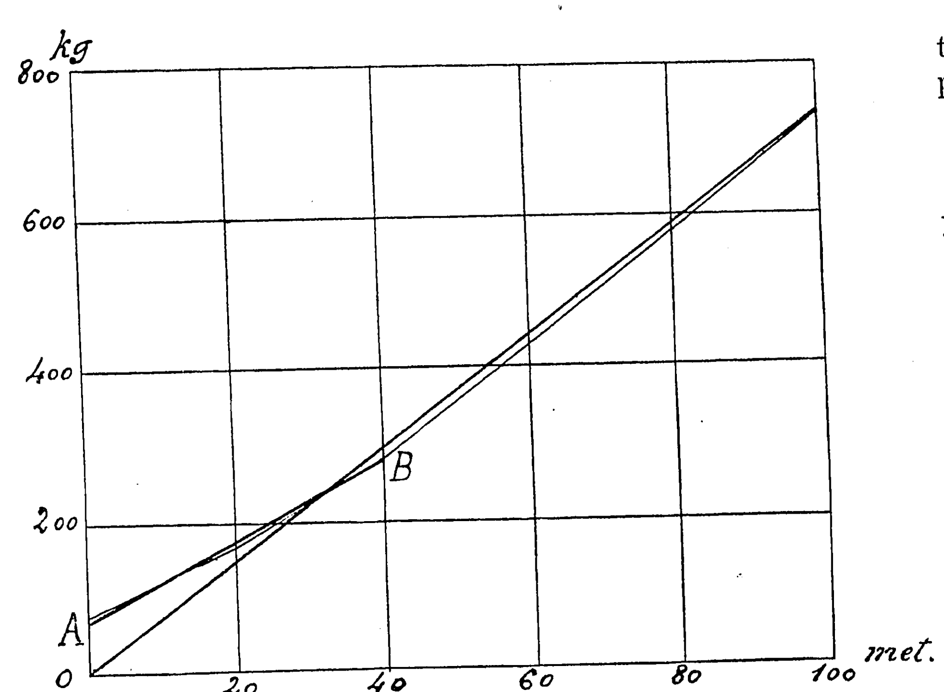

Fig 4.—Pesos por m.² de planta para tramos de carreteras.

neal de la estructura metálica en función lineal de la luz, siendo representado por la fórmula general

$$y = ax + b.$$

Luego, llamando p al precio del kilogramo de metal puesto en obra y L á la longitud total de los tramos metálicos, el coste de la estructura metálica será

$$\eta = \alpha x + \beta \qquad (1)$$

siendo

$$\alpha = \mathrm{L}\, pa;\ \beta = \mathrm{L}\, p\, b.$$

2.° *El coste de las pilas es la ordenada de una hipérbola equilátera, siendo la luz la abscisa.*

Admitimos que el coste de todas las pilas que entran en la comparación sea sensiblemente igual.

Llamemos P al coste de una pila.

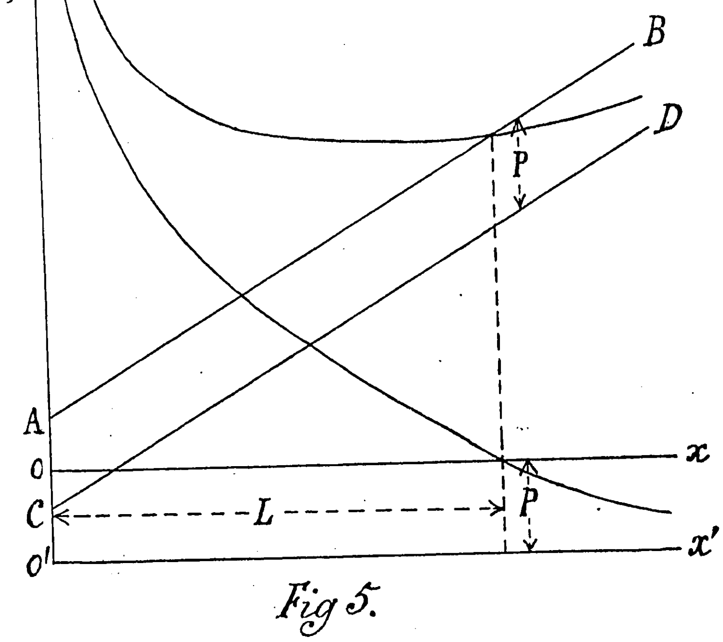

Fig 5.

Siendo L la longitud total de la obra metálica y x la luz de un tramo, el número de pilas será

$$\frac{\mathrm{L}}{x} - 1$$

y su coste

$$y = \mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{L}}{x} - 1\right) = \frac{\mathrm{PL}}{x} - \mathrm{P} \qquad (2)$$

Si trasladamos el eje de las x á la posición $o'x'$ (figura 5), es decir, á la distancia P por debajo del eje primitivo ox, haciendo

$$y = y' - \mathrm{P},$$

la ecuación anterior se convierte en

$$y' = \frac{\mathrm{PL}}{x},$$

la cual representa una hipérbola equilátera, cuyas asíntotas son los ejes $o'x'$, $o\, y$.

En la ecuación (2) se observa que para $x = \mathrm{L}$, $y = o$; la curva corta al eje ox á la distancia L del origen, como debe suceder. Es el caso en que se construye un solo tramo de la longitud total L, y entonces el coste de las pilas es nulo.

(*Se continuará.*)

L. Gaztelu.

REVISTA EXTRANJERA

Aplicación del sistema «Cantilever» á las vigas de los puentes metálicos de tramos independientes.

Dice Mr. J. A. Joseph en *Nouvelles Annales de la Construction:*

Entre las formas económicas que han llegado á adoptarse para las vigas de los puentes metálicos, figura el sistema llamado «Cantilever», que hoy es ya de uso corriente. Todo el mundo sabe en qué consiste el sistema y se sabe también que únicamente es aplicable al caso de varios tramos continuos, puesto que el beneficio del empotramiento solo se obtiene sobre las pilas. Por consiguiente, admitida la imposibilidad material de conseguir el empotramiento absoluto en los estribos, á no ser que se recurra á los arcos, solución no exenta de inconvenientes y que no es aplicable á todos los casos, se comprende que, hasta hoy, para los puentes metálicos de un solo tramo, los constructores hayan adoptado como disposiciones más económicas los cuchillos parabólicos, los arcos y los *bow-strings.*

Esta nota tiene por objeto demostrar cómo se puede reducir el peso de un tramo independiente introduciendo en su composición ménsulas de forma particular que nos proporcionen las ventajas del sistema «Cantilever».

Para hacer más clara y precisa la comparación, supongamos que tenemos que hacer un puente económico de 45 metros de luz con los siguientes datos:

Anchura libre entre montantes..........	2,50 m.
Sobrecarga uniformemente repartida por metro lineal........................	650 kg.
Coeficiente de trabajo por milímetro cuadrado..............................	8 kg.

Si adoptamos el sistema *bow-string*, pesaría el puente 27.000 kilogramos.

Dividamos ahora, como indica la figura, el espacio total en tres partes, de modo que resulten dos tramos laterales de 9 me-