forma el cauce, influye notablemente en la dirección de las corrientes y en la distribución de las velocidades, en las diversas y sucesivas secciones transversales. Cuando aquél es pequeño, la corriente se lleva rápidamente á la orilla cóncava, acercando á ésta los filetes de máxima velocidad, estrechando considerablemente la parte de la sección transversal que éstos ocupan, quedando casi sin velocidad las aguas que discurren por la otra orilla convexa; estas diferencias de velocidad en las aguas de la orilla cóncava y de la convexa, que representan diferencias de nivel piezométrico ó de presión, dentro de la masa líquida, ocasiona en las puntas convexas, y á redoso de la corriente, movimientos desviatorios y de remolino, que parten del lado de más presión hacia el lado de menos presión, llevando velocidades de un valor absoluto, que dependen de la mayor ó menor velocidad general de la corriente, pudiendo llegar el caso de que se conviertan en verdaderas revesas, cuando la corriente lleva gran velocidad, como sucede en las avenidas. Con las corrientes de mareas no se ven estas revesas, percibiéndose solamente los remolinos, de poca violencia, que los marinos conocen con el nombre de revesones de marea.

Los fenómenos que se acaban de indicar, relativos á la dirección de las corrientes en los tornos, se exageran con la violencia de éstos, ó sea con la pequeñez del radio de curvatura en cada punto.

Es de observar también, que en virtud de la velocidad y fuerza viva de que está animada la masa de agua, toda sección transversal recibe influencias de las que le preceden, aunque estén separadas por distancias visibles; de modo que, el régimen de las aguas en una sección determinada, será el que resulte del que le sea propio y de las influencias que lleguen de las secciones anteriores en el sentido de la corriente: este hecho ocasiona lo que se puede llamar ley de separación ó de retraso en una sección; separación que representa, á veces, cantidad de metros muy apreciable, que depende para el mismo radio de curvatura del valor general de la velocidad; así, en las crecidas, resulta visible é importante el fenómeno, careciendo de importancia y valor en las corrientes de marea, que tienen velocidades de valores máximos relativamente pequeños, y que disminuyen rápidamente, hasta llegar á cero en el momento de inversión de la corriente.

De cuanto se acaba de exponer sobre la dirección de las corrientes, se deduce el hecho, comprobado siempre en la práctica, de que, en general, la corriente de hinchente remonta el cauce siguiendo una dirección, en la mayor parte de los lugares, algo distinta de la de vaciante, por encontrar las orientaciones sucesivas de las márgenes, en sentido opuesto y contrario, al propagarse también en opuesta dirección. Suceso que tampoco tiene importancia, porque no influye en nada, como se verá después, en el régimen definitivo de la ría, que es el que interesa conocer.

En el actual cauce de la ría, existen irregularidades en las corrientes que es preciso hacer notar. En general, donde sucesivas secciones anchas, son inmediatamente precedidas ó seguidas por secciones relativamente estrechas, se presentan grandes revesas visibles y comprobadas con toda corriente de marea ó de avenida, y por tanto, con las ascendentes y descendentes.

La existencia de estas revesas es fácil de explicar: si las aguas pasan de un tramo de secciones estrechas á otro inmediato que presenta grandes anchuras, las aguas se distribuyen en éstas, acumulándose las velocidades y las presiones reinantes en la masa líquida sobre una orilla, con preferencia á la otra, si la dirección del tramo es curvilínea, presentándose grandes diferencias de presión en las aguas que discurren sobre cada una de ellas; estas diferencias, que son más notables cuanto mayor es la diferencia de anchuras, provocan movimientos desviatorios, que forman en la orilla en que reinan presiones menos notables, una corriente bien visible de dirección opuesta á la que reina, y que se anula en las proximidades de la sección estrecha, y en la zona de agua situada en la mediación del cauce en que subsisten juntas ó próximas la corriente directa y la revesada.

Cuando el tramo de secciones estrechas sigue en sentido de la corriente á las secciones anchas, sufre la corriente general una detención ó represa, con elevación de su nivel, en la cantidad necesaria para obtener la velocidad conveniente para pasar el caudal de aguas por el tramo estrecho, ocasionándose así diferencias de presión, entre una y otra orilla de las secciones anchas, para dar lugar á la distribución de velocidades, que requiere la forma del tramo estrecho en sus diversas secciones, dando lugar en las secciones anchas á los consiguientes movimientos desviatorios que originan la corriente contraria á la principal, ó sea su revesa.

Cuando el tramo de secciones anchas es precedido y seguido por secciones estrechas, tienen lugar á un tiempo, con la corriente de vaciante ó con la corriente de hinchente, los fenómenos que se acaban de indicar, y que adquieren mayor ó menor importancia, según la mayor ó menor diferencia relativa de las secciones, y según el valor absoluto de la velocidad de las corrientes principales.

En este caso se encuentra, en la ría del Guadalquivir, el tramo del Cabezo de la Mata. Sus diferentes revesas, del género antes explicado, se miden y se comprueba su existencia todos los días, acusándose con flotadores y por la posición de los barcos fondeados á la gira, y hasta son utilizadas por la pequeña navegación á la vela para bajar ó remontar la ría.

El tramo estrecho de aguas arriba del Cabezo de la Mata tiene una sección de 305 metros de latitud; el de aguas abajo presenta la de 400 metros, y la máxima latitud del tramo ancho corresponde, como es natural, al bajo importante que vela en bajamar, que aparece en los planos, y es de 770 metros de longitud.

Al principio y al fin de la Corta de los Jerónimos, en que existen también diferencias en las anchuras, de las secciones de cauces sucesivas, parten las aguas y las corrientes en una ú otra boca, entre la Corta y el cauce antiguo, produciéndose en las inmediaciones de ésta, aguas arriba ó aguas abajo, según la corriente que se considere, detenciones y remansos, destinados á obtener la velocidad que necesitan el paso de las aguas por la estrecha corta, quedando atenuado el fenómeno de la revesa, que no se presenta en una y otra boca, por el aliviadero y corriente que se dirige por el cauce que antes formaba el antiguo torno.

Para terminar con las irregularidades de la dirección de las corrientes de marea, que son más visibles en la ría del Guadalquivir, hay que decir dos palabras sobre las corrientes de la región del Puntal, confluencia del brazo del Noroeste, ó ría del Guadiamar, con la ría principal del Guadalquivir, aunque en ellas no exista verdadera irregularidad, pues todo se reduce á la presentación de algún revesón en la corriente de hinchente, y á un hilero de corriente que despide la punta de la confluencia, al componerse las vaciantes de uno y otro cauce.

LUIS MOLINÍ.

TEORÍA DE LAS FUNCIONES ELÍPTICAS (1)

Determinación de las tres formas que pueden presentar.

Por medio de una serie de simplificaciones se llega á reducir el estudio de la integral general

$$\int F(x, \sqrt{X})\, dx ,$$

al de los tipos mucho más sencillos

$$\int \frac{x^k}{\sqrt{X}}\, dx \quad (1)$$

y

$$\int \frac{M}{P\sqrt{X}}\, dx \quad (2).$$

Considerando el primer tipo

$$\int \frac{x^k}{\sqrt{X}}\, dx$$

conviene, antes de seguir adelante, ver si puede hacerse en él alguna reducción del exponente K; y en el caso de ser esto posible, saber hasta qué límite puede reducirse dicho exponente. Esta nueva simplificación se efectúa por medio de un artificio, que consiste en hallar la derivada de la expresión $(x^\lambda \sqrt{X}$, siendo λ una indeterminada. Tenemos

$$(x^\lambda \sqrt{X})' = \lambda x^{\lambda-1} \sqrt{X} + x \frac{\lambda X'}{2\sqrt{X}} = \frac{2\lambda x^{\lambda-1} X + x^\lambda X'}{2\sqrt{X}}$$

(1) Extracto de las conferencias de D. José Echegaray en el Ateneo.

y como
$X = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m$, y $X' = m\, a_0 x^{m-1} + (m-1)\, a_1 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1}$, sustituyendo

$$(x^\lambda \sqrt{X})' = \frac{2\lambda x^{\lambda-1}(a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a^m) + x^\lambda(m\, a_0 x^{m-1} + (m-1)\, a_1 x^{m-2} + \ldots + {}_{m-1})}{2\sqrt{X}}$$

Integrando, designando por I_k la integral

$$\int \frac{x^k}{\sqrt{X}}\, dx$$

y llamando A, B, C... á los coeficientes, queda

$$x^\lambda \sqrt{X} = A I_{\lambda+m-1} + B I_{\lambda+m-2} + \ldots + L I_\lambda + M I_{\lambda-1},$$

$$A = a_0 \frac{2\lambda + m}{2},\quad B = a_1 \frac{2\lambda + m - 1}{2},\quad \ldots.\quad L = a_{m-1}\frac{2\lambda+1}{2},\quad M = a_m \lambda$$

Dando ahora, á la indetermida λ, los valores numéricos

$$0,\ 1,\ 2\ldots$$

tendremos las ecuaciones

$$\begin{array}{ll}
\lambda = 0, & \sqrt{X} = A I_{m-1} + B I_{m-2} + \ldots + L I_0, \quad M = 0 \\
\lambda = 1, & x\sqrt{X} = A I_m + B I_{m-1} + \ldots + L I_1 + M I_0 \\
\lambda = 2, & x^2\sqrt{X} = A I_{m+1} + B I_m + \ldots + L I_2 + M I_1 \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

De la primera ecuación se saca

$$I_{m-1} = \varphi_1(I_{m-2},\ I_{m-3}\ \ldots\ I_0);$$

sustituyendo en la segunda y sacando el valor de I_m,

$$I_m = \varphi_2(I_{m-2},\ I_{m-3},\ \ldots\ I_0);$$

y así continuaremos; teniendo en definitiva expresadas las integrales

$$\ldots\ I_{m+1},\ I_m,\ I_{m-1}$$

en función de las

$$I_{m-2},\ I_{m-1}\ \ldots\ I_0,$$

basta, pues, conocer estas últimas para deducir el valor de la

$$\int \frac{x^k}{\sqrt{X}}\, dx,$$

cualquiera que sea K.

El segundo tipo

$$\int \frac{M}{P\sqrt{X}}\, dx,$$

en el cual P no contiene más que factores sencillos y es primo con X, es también susceptible de simplificación. Basta para ello descomponer $\frac{M}{P}$ en fracciones sencillas.

$$\frac{M}{P} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \ldots,$$

y la integra

$$\int \frac{M}{P\sqrt{X}}\, dx,$$

queda reducida á la más sencilla

$$\int \frac{dx}{(x - x)\sqrt{X}}.$$

Llegados á este punto recordaremos la observación hecha al final del capítulo 1.°, á saber: que todo lo dicho se refiere al caso general de funciones hiper-elípticas de grado m, de las cuales son un caso particular las elípticas: que determinados ya los tipos de que depende el conocimiento de una integral hiper-elíptica, en el caso más general, debemos abandonar esta hipótesis tan amplia para circunscribirnos á la particular que corresponde á $m = 4$; pues de continuar por aquél camino los cálculos se dificultarían de un modo extraordinario.

Ciñámonos, pues, al estudio de las integrales elípticas y dediquemos nuestra atención al estudio del radical del denominador, del cual hasta ahora no nos hemos ocupado.

En este caso.

$$\sqrt{X} = \sqrt{x^4 + a_1 x^3 + a_2 x_2 + a_3 x + a_4},$$

pues siempre podremos sacar del radical el coeficiente de x 4. El polinomio sub-radical, siendo de 4.° grado, tendrá *cuatro* raices que designaremos por

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta.$$

Descompongamos el polinomio de 4.° grado en el producto de *dos* de 2.°; transformación que siempre es posible, y tendremos

$$\sqrt{X} = \sqrt{(x^2 + px + q)(x^2 + p'x + q')}.$$

Pero esta transformación, que puede hacerse de varios modos, no debe efectuarse en este caso de una manera arbitraria. Y en efecto, en los tiempos en que esta transformación se estudiaba, era aún desconocida la significación de una integral, en la cual los límites ó la función tomaran valores imaginarios. Los estudios de Cauchy (que tanto impulso dieron al estudio de las funciones elípticas) sobre integrales imaginarias son posteriores á estas primeras investigaciones de Legendre, que sucintamente estamos relatando; y claro es que si p, q, p' ó q' no fueran reales, la integral que contiene el radical $\sqrt{X}$, carecería de sentido. Era, pues, preciso que p, q, p' y q' fueran *reales*; pero esta condición es fácil de cumplir siempre que a_1, a_2, a_3 y a_4 lo sean también, pues entonces las raíces imaginarias (si las hay), serán conjugadas y siempre habrá medios de combinar las raíces para que p, q, p' y q' resulten reales.

Quedaba, pues, descartado el caso de ser imaginarios algunos de los coeficientes a_1, a_2, a_3, a_4, y sólo se estudiaba aquél en que los cuatro eran reales.

Supongamos que sean α y β las raices del trinomio $x^2 + px + q$, y γ y δ las del otro $x^2 + p'x + q'$; tendremos

$$\begin{array}{ll}
p = -(\alpha + \beta), & p' = -(\gamma + \delta) \\
q = (\alpha\ \ \beta, & q' = \gamma\,\delta.
\end{array} \qquad (3)$$

Terminado ya el radical en esta forma,

$$\sqrt{(x^2 + px + q)(x^2 + p'x + q')},$$

procedamos á una nueva transformación, que consiste en hacer desaparecer los segundos términos de cada trinomio. Si $p = p'$ la desaparición de dichos términos se efectúa con sólo hacer

$$x = z + k,$$

pues el valor de k que hace desaparecer el coeficiente de x en uno de ellos lo hace desaparecer también en el otro.

Nosotros consideraremos el caso más general, aquel en que p y p' son diferentes; en este caso no basta una sola indeterminada, como en la sustitución anterior, hacen falta *dos* para que al igualar á *cero* los coeficientes de los segundos términos el número de ecuaciones sea igual al de constantes á determinar. La sustitución lineal

$$x = \frac{\lambda + \mu t}{1 + t} \quad (4),$$

contiene dos indeterminadas λ y μ; haciendo la sustitución é igualando á cero los coeficientes de t, el número de ecuaciones es igual al de las indeterminadas λ y μ; la sustitución (4) efectuada puede, pues, hacer desaparecer los segundos términos, como deseábamos. Pero al resolver el sistema citado, de dos ecuaciones con igual número de incógnitas, los valores de éstas pueden resultar imaginarios; y ya hemos dicho que en los tiempos en que Legendre efectuaba estas transformaciones, había que huir de las cantidades imaginarias bajo el *signo integral*. Había interés en demostrar, por consiguiente, que la transformación (4) podía verificarse para valores reales de λ y μ. Nada más sencillo que esta demostración. Haciendo la sustitución en los trimonios que están bajo el radical queda éste convertido en

$$\sqrt{X} = \sqrt{\left[\left(\frac{\lambda + \mu t}{1+t}\right)^2 + p\left(\frac{\lambda + \mu t}{1+t}\right) + q\right]\left[\left(\frac{\lambda + \mu t}{1+t}\right)^2 + p'\left(\frac{\lambda + \mu t}{1+t}\right) + q'\right]}$$

y sacando el factor $(1 + t)^2$ fuera del radical

$$\sqrt{[(\lambda + \mu t)^2 + p(\lambda + \mu t)(1+t) + q(1+t)^2]\,[(\lambda + \mu t)^2 + p'(\lambda + \mu t)(1+t) + q'(1+t)^2]}$$

igualando á cero los coeficientes de t en los dos trinomios, tenemos las *dos* ecuaciones de condición

$$\begin{cases} 2\lambda\mu + p(\lambda + \mu) + 2q = 0 \\ 2\lambda\mu + p'(\lambda + \mu) + 2q' = 0 \end{cases}$$

de las cuales se pueden despejar los valores de $\lambda\mu$ y $\lambda + \mu$

$$\begin{cases} \lambda\mu = \dfrac{pq' - qp'}{p' - p} \\ \lambda + \mu = \dfrac{2(q - q')}{p' - p} \end{cases}$$

Designando el producto $\lambda\mu$ por π y la suma $\lambda + \mu$ por σ, la determinación de λ y μ queda reducida á la resolución de

$$y^2 - \sigma y + \pi = 0,$$

ecuación de segundo grado con una incógnita.

No necesitamos conocer los valores numéricos de λ y μ, nos basta saber si dichos son reales; y para ello es preciso que se verifique la condición

$$\frac{\sigma^2}{4} - \pi > 0$$

ó

$$\frac{(q - q')^2}{(p' - p)^2} - \frac{pq' - qp'}{p' - p} > 0.$$

Sustituyendo en vez de p, q, p y q' sus valores (3) en función de α, β, γ, y δ, tenemos la condición

$$(\alpha\beta - \gamma\delta)^2 - [\alpha\beta(\gamma + \delta) - \gamma\delta(\alpha + \beta)]\,[(\alpha + \beta) - (\gamma + \delta)] > 0,$$

y observando que el primer miembro de esta desigualdad se reduce á *cero* para

$$\alpha = \beta, \quad \alpha = \delta, \quad \beta = \gamma, \quad \beta = \delta,$$

queda en definitiva

$$(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)(\beta - \delta) > 0; \quad (5)$$

pero esta condición se cumple siempre que los coeficientes p, q, p', q' sean reales, como suponemos. En efecto, en ese caso, sólo caben tres hipótesis respecto á las raíces α, β, γ, δ,

1.ª Las *4* reales α, β, γ, δ,
2.ª Dos reales y dos imaginarias,
3.ª Las cuatro imaginarias:

En el primer caso siempre se verifica la condición (5), como es fácil ver: en el segundo las dos imaginarias tienen que ser conjugadas

$$\gamma = m + n\sqrt{-1}, \quad \delta = m - n\sqrt{-1}$$

$$(\alpha - m - n\sqrt{-1})(\alpha - m + n\sqrt{-1})(\beta - m - n\sqrt{-1})(\beta - m + n\sqrt{-1}) > 0,$$

ó

$$[(\alpha - m)^2 + n^2]\,[(\beta - m)^2 + n^2] > 0,$$

lo cual es evidente: en el tercer caso las 4 raíces tienen que ser imaginarias *dos á dos*.

JUAN GONZÁLEZ PIEDRA.

(Se continuará.)

BIBLIOGRAFIA

TRAMVIE ELETTRICHE, por MAX SCHIEMANN, traducción italiana del Ingeniero FLAVIO DESSY.—Un vol. de 400 págs. con 364 grabados y 6 láminas, 12 liras.—*Ulrico Hoepli*, editor.—Milán, 1900.

El enorme y rápido desarrollo de los tranvías eléctricos, obliga á los Ingenieros á buscar libros en los que se hallen reunidos los datos, observaciones y procedimientos que andan desperdigados en multitud de libros y revistas, y que son tan difíciles de recoger por ser tan grande el número de publicaciones técnicas en que están esparcidos. Unicamente el que se especializa puede seguir el continuo progreso de una de las ramas de la técnica, y resumir en un trabajo sistemático todo lo que principalmente importa conocer en aquella rama, de suerte que en tal compendio puedan el principiante conocer los fundamentos de la materia, y el práctico encontrar ideas nuevas.

A este objeto responde el libro de Schiemann, que no vacilamos en recomendar á nuestros compañeros.

He aquí un resumen del índice:

Generalidades.—Diversos sistemas de tracción eléctrica.—Producción de la corriente eléctrica. Calderas. Motores de vapor, de gas, de viento, hidráulicos. Generadores de corriente. Acumuladores. Cáculo de las centrales.—*Transmisión de la corriente.* Cálculo de los conduc-