AÑO XLVI. Madrid 26 de Octubre de 1899. Núm. 1257.

REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS

FUNDADA Y SOSTENIDA POR EL CUERPO NACIONAL DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

Redactor-Presidente... Excmo. é Ilmo. Sr. D. Leonardo de Tejada, Inspector general del Cuerpo
Redactores... Los Sres. Presidentes de las Comisiones regionales de Ingenieros.
D. Antonio Sonier, Profesor de la Escuela de Caminos.
D. Manuel Maluquer, Ingeniero del mismo Cuerpo, *Secretario*.
Colaboradores... Todos los Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.

SE PUBLICA LOS JUEVES **Redacción y Administración: Puerta del Sol, 9, pral.**

APUNTES HISTÓRICOS

SOBRE EL ORIGEN Y DESARROLLO DE LA TEORÍA DE LA RESISTENCIA DE MATERIALES

POR

DON LUIS GAZTELU

INGENIERO DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

I

Galileo.—Todos los autores que han escrito sobre esta materia convienen en fijar como punto de partida de los estudios matemáticos acerca de la resistencia de los sólidos el célebre problema de Galileo; así se llamó, durante mucho tiempo, á la investigación de las condiciones de equilibrio y de resistencia de una viga empotrada por uno de sus extremos en un muro y cargada de diferentes pesos.

El primer trabajo relacionado con estos estudios aparece en una obra de Galileo intitulada *Discorsi e dimostrazioni matematiche*, publicada en Leiden el año 1638; es la base de las investigaciones de los físicos y matemáticos que se dedicaron durante los siglos XVII y XVIII al estudio dela resistencia de materiales.

Galileo estudió dos problemas relativos á la resistencia de las vigas, barras de sección circular, y cilindros huecos empotrados por un extremo y libres por el otro, y enunció 17 proposiciones, algunas de ellas muy importantes. Admitía como hipótesis fundamental que las fibras son *inextensibles*, hipótesis evidentemente inadmisible, pero que fué, sin embargo, aceptada por muchos de los primeros geómetras que se ocuparon en estudios de resistencia de materiales, debido sin duda á la gran autoridad de Galileo.

El primer problema que se estudia en el memorable trabajo que estamos examinando puede enunciarse así:

Dada una viga empotrada por uno de sus extremos en un muro, sometida á su peso propio y á otro adicional aplicado al extremo libre, hallar la fuerza que tiende á romperla según un plano perpendicular al eje.

En todas estas primeras memorias se da el nombre de *base de fractura* á la sección de empotramiento de la viga.

Merecen ser citadas las dos proposiciones siguientes:

(*a*) Las resistencias de las bases de fractura de vigas prismáticas semejantes son entre sí como los cuadrados de sus correspondientes dimensiones.

(*b*) Entre las infinitas vigas semejantes y de constitución homogénea, sólo existe una cuyo peso se halla exactamente en equilibrio con la resistencia de la base de fractura. Las demás, si la longitud es mayor, se romperán; y si la longitud es menor, su base de fractura tendrá un exceso de resistencia.

El segundo problema de Galileo consiste en la definición y determinación de la viga de igual resistencia.

En la magnífica obra de Todhunter y Pearson, *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials*, que nos sirve de guía para redactar estos breves apuntes, se enuncia el segundo problema de Galileo en esta forma:

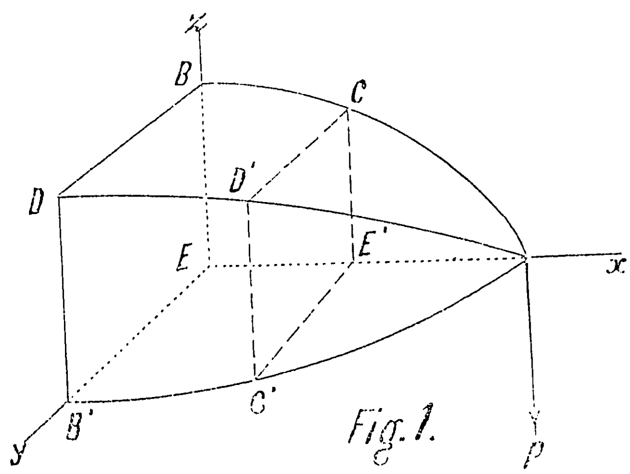

Fig. 1.

$A\ C\ B$, $A\ C'\ B'$ (fig. 1) son dos curvas trazadas en los planos vertical ($z\ x$) y horizontal ($x\ y$) respectivamente (1). Se limita un sólido por medio de los planos coordenados y de dos cilindros, que tienen por directrices las curvas citadas, y por generatrices paralelas á los ejes y y z respectivamente.

Este sólido $B\ E\ B'\ D\ A$ es considerado como una viga empotrada en la sección $B\ E\ B'\ D$, y se supone aplicado en A un peso P.

El problema consiste en hallar la forma de las directrices de las superficies cilíndricas, con la condición de que la resistencia de una sección cualquiera $C\ E'\ C'\ D'$ sea exactamente igual á la tendencia á la rotura en dicha sección.

Puede ser generalizado este problema suponiendo aplicado á la viga un sistema de fuerzas cualquiera.

Como el problema enunciado así es evidentemente indeterminado, Galileo sustituyó la directriz $A\ C'\ B'$ por una recta paralela al eje de las x, de modo que todas las secciones verticales paralelas al eje longitudinal de la viga son iguales. En este caso, llegó á la consecuencia de que la curva $A\ C\ B$ debe ser una parábola.

Es de advertir el carácter casi exclusivamente geométrico que dió Galileo á este problema en lo relativo á las fuerzas interiores, gracias á la hipótesis adoptada, que le permitió prescindir de toda consideración acerca de la elasticidad ó de la constitución molecular de los cuerpos.

Ejerció el problema de los sólidos de igual resistencia gran influencia en los estudios de los geómetras de los siglos XVII y XVIII, con motivo de la célebre controversia que suscitó, y en la cual tomaron parte matemáticos eminentes como Wurtz, Blondel, Marchetti, Grandi, Varignon y Parent; esta discusión fué resumida por Girard, en su *Traité analytique de la résistance des solides et des solides d'égale résistance*, publicado en París en 1798.

(1) En la fig. 1 falta la letra A en el vértice del sólido, ó sea en el punto del eje de las x donde va aplicado el peso P.

La importancia histórica de este problema consiste principalmente en que fué causa de que fijaran su atención en los estudios de resistencia de materiales los más eminentes geómetras. Pero, en opinión de Pearson, contribuyó más eficazmente á los adelantos de esta ciencia el problema de la flexión de las vigas.

II

Hooke.—Mariotte.—Leibnitz.—Mientras los matemáticos de la parte continental de Europa trataban de asentar los fundamentos de la nueva ciencia, estudiando algunos problemas desde un punto de vista puramente geométrico, ó, para decirlo con más propiedad, desde el punto de vista de la Mecánica racional, que considera los cuerpos sólidos como indeformables, algunos investigadores ingleses emprendían caminos muy diferentes para llegar á la solución definitiva de los mismos problemas.

William Petty daba á conocer á la Real Sociedad de Londres, en 1674, una memoria de carácter filosófico acerca de la constitución íntima de los cuerpos, cuyo único mérito consiste en ser la primera ó una de las primeras acerca de este tema.

Mucho más importantes son los trabajos experimentales de Roberto Hooke, quien descubrió la ley de proporcionalidad entre el alargamiento relativo ó por unidad de longitud y el esfuerzo por unidad de superficie de la sección de los alambres, mientras los esfuerzos ó los alargamientos no excedan de ciertos límites, ley que puede ser considerada como la verdadera base de la teoría elemental de la resistencia de materiales que se enseña actualmente en todas las escuelas de aplicación.

Hooke publicó, en 1678, una memoria intitulada *De potentia restitutiva*, en la cual afirma haber descubierto diez y ocho años antes la ley lineal que liga los esfuerzos con los alargamientos correspondientes en los muelles y en los cuerpos elásticos de forma prismática. No quiso entregarla antes á la publicidad, según declara él mismo, porque deseaba obtener una patente para una aplicación especial; pero figuraba en una de sus obras, publicada en la época citada, el siguiente anagrama:

c e i i i n o s s s t t u u

que, según el autor, debe traducirse *Ut tensio sic vis*, enunciado de la citada ley de proporcionalidad.

Hooke tenía un concepto perfectamente claro de esta ley. Lo demuestra el párrafo siguiente de la memoria en que la dió á conocer:

«De todo esto resulta evidentemente que la regla ó ley de la naturaleza en todo cuerpo elástico consiste en que la fuerza ó potencia para volver á su primitiva situación natural es siempre proporcional á la distancia ó espacio que se le ha hecho recorrer, ya sea por rarefacción ó separación de sus partes, ya por condensación ó aproximación de las mismas, unas respecto á otras» (1).

La ley de Hooke es de importancia excepcional en la ciencia, no sólo por ser la base de la teoría elemental de la resistencia de materiales, sino porque las modernas expresiones de las seis componentes de la presión como funciones lineales de las deformaciones correspondientes pueden ser consideradas como una generalización de la ley de Hooke; Pearson cita, en apoyo de esta opinión, textos tomados de la célebre memoria de Saint-Venant sobre la torsión de los prismas y la traducción francesa, anotada por el mismo autor, de la obra de Clebsch *Theorie der Elasticität fester Körper*.

Mariotte fué el primero que aplicó las ideas de Hooke. Realizó en 1680 experimentos relativos al problema de Galileo, y dedujo que una parte de las fibras sufren tensión, mientras otras están sujetas á compresión, según lo afirma en su *Traité du mouvement des eaux*, publicado en 1686, añadiendo que la teoría de Galileo no está de acuerdo con la experiencia. Llega á decir que puede admitirse, *como hipótesis*, que la mitad de las fibras sufren tensión y la otra mitad compresión.

Leibnitz, en sus *Demonstrationes novæ de Resistentia solidorum* (Acta Eruditorum Lipsiæ, Julio de 1684), examina las opiniones de Galileo y de Mariotte, y se decide en favor de la última, admitiendo que existe siempre deformación antes de verificarse la rotura, y que las fibras de los cuerpos naturales son extensibles. Opina que la resistencia es proporcional á la extensión, es decir, acepta la ley de Hooke para las fibras elementales.

Estos trabajos de Mariotte y de Leibnitz ejercieron una influencia decisiva en las opiniones de los matemáticos y experimentadores, y la hipótesis de las fibras extensibles, cuya resistencia es proporcional al alargamiento sufrido, fué denominada por los escritores de aquella época teoría de Mariotte y Leibnitz.

III

De la Hire.—Varignon.—Parent.—De la Hire, en su tratado de Mecánica, publicado en París el año 1695, consagra algunos párrafos al estudio de la resistencia de los sólidos y compara las hipótesis de Galileo y de Mariotte, concluyendo en favor de la última.

Este autor fué el primero que aplicó los principios de la Estática al estudio del equilibrio de las bóvedas. Fijaba hipotéticamente las juntas de rotura, suponiendo que coinciden con las normales al intradós, que forman con la horizontal un ángulo de 45° en los arcos de medio punto, y de 30° en los arcos carpaneles cuya flecha es $^1/_3$ de la luz. En ambos casos consideraba que la cuña comprendida entre estas juntas tendía á descender empujando hacia afuera las partes inferiores, las cuales debían girar alrededor de las aristas exteriores de los arranques. Hacía abstracción del rozamiento en las juntas de rotura. De estas hipótesis deducía fácilmente las presiones que la cuña ejerce normalmente á las juntas de rotura, lo que le permitía determinar los espesores de las regiones inferiores de la bóveda.

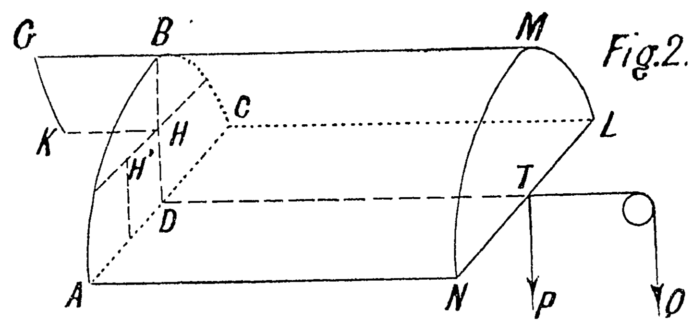

Fig. 2.

Varignon, en un trabajo publicado por la Academia de París en 1702, dió unas fórmulas relativas á la viga empotrada, que, aunque erróneas, por no haber supuesto el eje neutro en su posición verdadera, ofrecen gran interés histórico; el autor emplea para demostrarlas un procedimiento de análisis que se aproxima mucho al que se adopta actualmente.

Sea $A\,B\,C\,N\,M\,L$ (fig. 2) una viga empotrada, y $A\,B\,C$ su sección de empotramiento ó base de fractura; supónese compuesta la viga de fibras longitudinales, paralelas entre sí y perpendiculares al paramento del muro, siendo sus longitudes todas iguales á $A\,N$.

Sea H' un punto de la base de fractura; tomemos en dicha base dos ejes rectangulares, siendo $A\,C$ el de las x y A el origen; es decir, que $A\,E = x$, $H'\,E = y$.

Q es un peso unido al extremo de la viga por medio de una cuerda y una polea de cambio de dirección, de modo que ejerce una tracción sobre la pieza.

Siendo r la resistencia de una fibra y admitiendo que la fuer-

(1) He aquí el texto original en inglés:
«From all which it is evident that the Rule or Law of Nature in every springing body is, that the force or power thereof to restore itself to its natural position is always proportionate to the distance or space it is removed therefrom, whether it be by rarefaction, or separation of its parts one from the other, ord by a condensation, or crowding of those parts nearer together.»

za Q se reparta uniformemente en la base de fractura, tendremos

$$Q = r \int y \, dx$$

extendiendo la integral á toda el área de dicha base.

Este esfuerzo Q se denomina *resistencia absoluta.*

Consideremos ahora que obre sobre el extremo de la viga un peso P normalmente á su longitud.

Todas las fibras correspondientes á una misma horizontal H de la base de fractura desarrollarán la misma resistencia, y ésta puede ser representada por una perpendicular $H K$ á la base de fractura, trazada por el punto en que la horizontal H corta al eje vertical de simetría $D B$ de dicha base. Entre H y B las resistencias estarán representadas por una curva $K G$.

Llamemos l á la luz de la viga, u á la resistencia $H K$, y escribiendo la ecuación de los momentos respecto á AC, tendremos

$$P l = \int \int u \, y \, dx \, dy.$$

Esta integral se llama *resistencia relativa* ó *resistencia de la base de fractura.*

La única dificultad para poder aplicar la fórmula consiste en la determinación de u.

Si se admite la hipótesis de Galileo, u es constante, y representando su valor por R_1 la fórmula se convierte en

$$P l = \frac{R_1}{2} \int y^2 \, dx.$$

Admitiendo la hipótesis de Mariotte y Leibnitz, es preciso fijar además la posición de la fibra neutra, y en esto yerra Varignon. Supone que *las fibras de la base $A C L N$ son las que no sufren tensión*, y admite que la curva $G K$ es una recta que pasa por el punto D.

En este caso, siendo R_2 la resistencia ó la tensión de la fibra B, la correspondiente á las fibras de la horizontal H será, llamando a á la altura $D B$,

$$u = R_2 \frac{y}{a}$$

y la *resistencia de la base de fractura* tiene por valor

$$P l = \frac{R_2}{3a} \int y^3 \, dx.$$

Si la sección es rectangular, designando por b la dimensión horizontal, las fórmulas anteriores se convierten en

$$P l = R_1 \frac{a^2 b}{2}$$

y

$$P l = R_2 \frac{a^2 b}{3}.$$

Estas fórmulas son evidentemente erróneas; vamos á compararlas con la fórmula admitida actualmente

$$P l = \frac{R I}{v}$$

en la cual I es el momento de inercia respecto al eje horizontal, y v la mitad de la altura; en el caso actual se convertirá en

$$P l = R \frac{a^2 b}{6},$$

puesto que

$$I = \frac{b a^3}{12}; \qquad v = \frac{a}{2}.$$

Vemos que la fórmula de Varignon da para la tensión de la fibra más cargada un valor igual á tres veces el verdadero si se admite la hipótesis de Galileo, é igual al doble si se parte de la hipótesis de Mariotte y Leibnitz.

Sin embargo, es muy fácil llegar á la fórmula verdadera partiendo de la general dada por Varignon; basta para ello, como vamos á ver, corregir la hipótesis relativa á la posición de la fibra neutra.

Tomando como eje de las x la mediana horizontal de la base de fractura y como eje de las y la otra mediana, el valor de u será

$$u = \frac{2 R y}{a}.$$

Sustituyendo este valor en la integral doble de la fórmula fundamental de Varignon y poniendo los límites, tendremos

$$P l = \frac{2 R}{a} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dx \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} y^2 \, dy = \frac{2 R b}{a} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} = R \frac{a^2 b}{6}.$$

que es la misma fórmula que acabamos de aplicar.

Resulta, pues, que para la resolución completa del problema práctico de la determinación de la tensión y de la presión máxima en una viga empotrada, sólo faltaba á los geómetras del principio del siglo próximo pasado el conocimiento de la verdadera posición del eje neutro. Pero casi todos los escritores de ese siglo persistieron en errores respecto á este punto, y aun se citan libros de texto que se utilizaron en la enseñanza á principios del siglo presente, que incurren en el mismo error, como veremos más adelante.

De todos modos resulta demostrada la importancia de los trabajos de Varignon y su influencia en el progreso de la teoría de la resistencia de materiales.

Merece ser mencionada la memoria de A. Parent, publicada por la Academia de París en 1710, y que lleva por título: *Des points de rupture des figures retenues par un de leurs bouts et tirées par telles et tant de puissances qu'on voudra.*

Deduce su autor la sección de rotura de un sólido por un procedimiento muy ingenioso indudablemente, dado el estado de los conocimientos sobre estas materias en aquella época, pero poco satisfactorio desde el punto de vista científico, en opinión de Pearson.

Considérese, dice este autor, para resumir en pocas palabras el procedimiento empleado por Parent, el caso de una viga cargada de un modo cualquiera; adoptando la misma directriz horizontal de la viga (que se supone engendrada como se ha explicado al tratar del enunciado del 2.° problema de Galileo), podemos reemplazar la viga propuesta por un sólido de igual resistencia de la misma luz, cambiando la directriz vertical del cilindro de generatrices horizontales; se puede también invertir el procedimiento, conservando la directriz vertical y determinando la horizontal del sólido de igual resistencia. En cualquiera de los dos casos, toda sección en que la diferencia de las resistencias relativas entre el sólido propuesto y el hipotético de igual resistencia sea un mínimo, será un punto de mínima resistencia. Una sección en la cual esta diferencia se anule ó se haga negativa, será una sección de rotura.

Parent estudió también el problema del equilibrio de las bóvedas, ampliando y perfeccionando la teoría de La Hire.

III

Santiago Bernoulli.—El primer trabajo de verdadero valor matemático es, según Todhunter, la memoria de Santiago Bernoulli intitulada *Curvatura laminæ elasticæ*, publicada en 1694. Pero no satisfizo á su autor este primer ensayo, y volvió al estudio de las mismas cuestiones en su célebre memoria *Véritable* *hypothèse de la résistance des solides, avec la démonstration de la courbure des corps qui font ressort,* fechada el año 1705, y publica la en Ginebra en 1744.

Empieza esta memoria con una reseña de los trabajos de Galileo, Leibnitz y Mariotte, y afirma el autor ser el primero que ha tenido en cuenta la existencia de compresiones en una parte de la viga.

Establece luego cuatro lemas:

I. Las fibras de la misma materia y del mismo ancho ó espesor, tendidas ó comprimidas por la misma fuerza, se extienden ó comprimen proporcionalmente á sus longitudes.

II. Las fibras homogéneas y de igual longitud, pero de diferentes anchos ó espesores, se extienden ó comprimen igualmente cuando son solicitadas por fuerzas proporcionales á sus anchos.

El tercer lema es de escasa importancia, y el cuarto requiere algunas explicaciones.

Hemos visto que Varignon admitía que las fibras de la cara interior de la viga $A\ C\ L\ N$ (fig. 2.ª) son las que no sufren tensión ni compresión. Bernoulli opinaba, como ya se ha dicho, que unas fibras deben hallarse tendidas y otras comprimidas, existiendo un eje neutro ó de equilibrio que no sufre tensión ni compresión; pero después de reconocer la dificultad de fijar su posición, llega á la conclusión errónea de que esta posición es indiferente, y admite que una misma fuerza exterior, obrando con el mismo brazo de palanca, producirá el mismo efecto, ya estén las fibras tendidas ó comprimidas, ya tendidas en parte y en parte comprimidas.

A cerca de esto, dice Saint-Venant:

«Extraña ver que un gran geómetra, autor de la primera teoría de las curvas elásticas, Santiago Bernoulli, á pesar de admitir la existencia de las compresiones, y afirmando ser el primero que las ha tenido en cuenta, cometa, en otra forma, precisamente el mismo error de lo sencillo á lo doble en que había incurrido Mariotte al valuar el momento de las resistencias, lo cual le conduce á afirmar que la posición asignada al eje de rotación es enteramente indiferente.»

El autor se propone luego la solución del siguiente problema:

«Hallar el aumento de fuerza necesario para romper una viga directamente, es decir, tirando de ella según su longitud, respecto á la necesaria para romperla por un esfuerzo transversal.»

La solución se funda en el 4.º lema, y por lo tanto, no es exacta.

La parte verdaderamente importante de esta memoria es el estudio de la deformación de la lámina elástica, propuesto aquí por Bernoulli por vez primera. El autor enuncia el problema en estos términos:

Hallar la curvatura de la línea elástica, es decir, la de las láminas de resorte cuando se encorvan.

Es conveniente recordar brevemente la parte fundamental de la solución de este problema, tan importante en el estudio que nos ocupa, empleando las notaciones usadas en la actualidad.

La ecuación diferencial del problema no es otra que la expresión de la igualdad del momento de las fuerzas elásticas en función del radio de curvatura de la curva elástica y del momento flector producido por las fuerzas exteriores, es decir, la conocida fórmula

$$\frac{E\,I}{\rho} = M$$

en la cual, E es el coeficiente de elasticidad, I el momento de inercia de la sección respecto al eje de flexión, ρ el radio de curvatura de eje neutro deformado, que es lo que se llama *curva elástica,* y M el momento flector.

Es sabido que, cuando se trata de la flexión de las vigas, como las deformaciones que se consideran son siempre muy pequeñas, es posible simplificar esta ecuación.

El valor de ρ es

$$\rho = \frac{\left(1 + \frac{d\,y^2}{d\,x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2\,y}{d\,x^2}}$$

Siendo muy pequeño $\frac{dy}{dx}$, puede despreciarse en comparación con la unidad el cuadrado de esta derivada, y la ecuación diferencial se convierte entonces en

$$E\,I\,\frac{d^2\,y}{d\,x^2} = M\,,$$

que es la que se usa generalmente en los problemas de resistencia de materiales. El problema de análisis se simplifica así extraordinariamente, porque en la mayor parte de los casos se pueden separar las variables, y todo queda reducido á la resolución de dos cuadraturas sucesivas.

Los problemas relativos á la deformación y á las vibraciones de láminas y alambres son, en esencia, idénticos á los que se presentan en la resistencia de materiales al tratar de averiguar la forma que afectan los prismas deformados bajo la acción de fuerzas determinadas; pero la resolución de la ecuación diferencial se complica mucho, porque, en estos casos, las deformaciones son mucho mayores, y no se puede admitir la simplificación que acabamos de recordar.

Vamos á dar una idea de este problema (fig. 3.ª) Sea $O\,O'$ la lámina fijada en O', y sometida á una fuerza P aplicada en O perpendicularmente á la posición inicial, y sea $A\,M\,O'$ la curva que afecta la lámina deformada. Tomemos como eje de las x la recta $O\,O'$ y por eje de las y la línea de acción de la fuerza P. Sea M un punto de la curva, cuyas coordenadas son $O\,N = x$, $M\,N = y$.

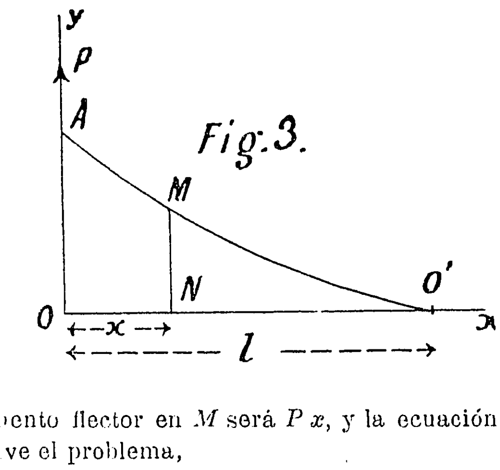

Fig. 3.

El momento flector en M será $P\,x$, y la ecuación diferencial que resuelve el problema,

$$\frac{E\,I}{\rho} = E\,I\,\frac{\frac{d^2\,y}{d\,x^2}}{\left(1 + \frac{d\,y^2}{d\,x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = P\,x\,.$$

Haciendo $\frac{d\,y}{d\,x} = p$, y multiplicando los dos miembros por $d\,x$, esta ecuación se convierte en

$$EI\,\frac{dp}{\left(1 + p^2\right)^{\frac{3}{2}}} = Px\,dx\,.$$

Integrando ambos miembros, se obtendrá

$$EI\,\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{Px^2}{2} + C\,.$$

La constante se determina observando que para

$$x = l\,,\ \ \frac{dy}{dx} = p = 0\,;$$

de donde resulta

$$C = -\frac{Pl^2}{2}\,;$$

luego

$$EI\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{P}{2}(x^2 - l^2)\,.$$

Despejando p en esta ecuación, tendremos

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{P}{2}\,\frac{x^2 - l^2}{\sqrt{E^2 I^2 - \frac{P^2}{4}(x^2 - l^2)^2}} =$$

$$\frac{P}{2\,EI}\,\frac{x^2 - l^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{P}{2\,EI}\right)^2 (x^2 - l^2)^2}}\,.$$

Integrando nuevamente, se llega á la expresión

$$y = \frac{P}{2\,EI}\int_0^l \frac{(x^2 - l^2)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{P}{2\,EI}\right)^2 (x^2 - l^2)^2}}\,.$$

Figura debajo del radical un polinomio de cuarto grado, y por lo tanto no se puede resolver esta cuadratura por los métodos elementales del Cálculo integral, sino que depende su resolución de la teoría de las funciones elípticas, y exigiría largas y complicadas transformaciones.

Todhunter dedica pocas líneas á comentar esta segunda parte de la memoria de Bernoulli.

El procedimiento es más trabajoso de lo necesario, porque no se admite en el caso general que el alargamiento ó acortamiento de una fibra sea proporcional al esfuerzo de tensión ó compresión; pero en el caso en que se adopta esta ley, Bernoulli obtiene fácilmente una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b\,x^2}{\sqrt{c^6 - b^2 x^4}}\,.$$

El autor citado considera la solución de Bernoulli como incompleta, pues sólo tiene en cuenta una ecuación, la de los momentos, siendo así que son necesarias tres ecuaciones para definir el equilibrio de un sistema de fuerzas situadas en un plano.

Sin embargo, el método de Santiago Bernoulli ha sido adoptado por la generalidad de los autores que han estudiado este problema, con ligeras variaciones y perfeccionamientos que no afectan á lo esencial del método empleado por aquel ilustre matemático.

IV

Newton, Parent, Bélidor, Rèamur, Bèuffon, Peronet, Musschenbroek, Mazière, Bülfinger y *Riccati.*—Aunque las obras de estos autores no tienen por objeto inmediato la teoría de la resistencia de materiales, es imposible dejar de mencionarlas aquí; pero no nos detendremos á analizarlas.

Unas se refieren á otras ramas de la ciencia pura, más ó menos directamente relacionadas con el objeto de nuestro estudio; otras son de carácter filosófico, y muchas tienen por objeto el estudio de experimentos que contribuyeron en mayor ó menor escala al perfeccionamiento de la teoría.

Entre las primeras debemos citar el célebre tratado de Optica de Newton, el cual contiene gran número de consideraciones acerca de la naturaleza de la elasticidad y de la constitución íntima de los cuerpos, utilizadas por muchos de los autores que escribieron posteriormente acerca de la elasticidad y de la resistencia de materiales. La primera edición de esta obra se publicó en 1704.

De las obras filosóficas, es digna de mención la del P. Mazierè, publicada en París el año 1727. Su título es: *Les lois du choc des corps à ressort parfait ou imparfait, déduites d'une explication probable de la cause physique du ressort.* No nos detendremos en su examen, pues no es de las obras que ejercieron influencia en las ideas de los matemáticos que crearon y perfeccionaron la teoría de la resistencia de materiales. Pearson manifiesta su extrañeza de que fuera premiada por la Academia de Ciencias francesa una obra de este género, casi en la época de Euler y de los Bernoulli, y la considera muy propia para justificar las censuras de Riccati á los matemáticos aficionados á hipótesis metafísicas, que tanto abundaron en aquella época.

Del mismo género son: la obra de Bülfinger *De solidorum resistentia specimen*, publicada en 1729; la Memoria de Désaguliers, *Thoughts and conceptions concerning the cause of elasticity*, 1736; y la de Belgrado, *De corporibus elasticis disquisitio Physico-matematica*, publicada en Parma el año 1748.

Más importantes para nuestro objeto son los trabajos experimentales efectuados por diversos físicos ó ingenieros; pero nos limitaremos á mencionarlos, pues sólo indirectamente contribuyeron al adelanto de la ciencia que nos ocupa.

He aquí los principales:

Parent.—«Expériences pour connoitre la résistance des bois de chêne et de sapin.»—Academia de París, 1707.

«Les résistances des poutres par rapport à leurs longueurs ou portées et des poutres de plus grande résistance.»—Academia de París, 1708.

Bélidor.—«La science des Ingénieurs dans la conduite des travaux de fortification et d'architecture civile.»—La Haya, 1729.

Rèamur.—«Expériences pour connaitre si la force des cordes surpasse la somme des forces des fils qui composent ces mêmes cordes.»—París, 1711.

«Expériences et réflexions sus la prodigieuse ductilité de diverses matières.»—París, 1713.

Buffon.—«Moyen facile d'augmenter la solidité, la force et la durée du bois.»—Academia de París, 1738.

«Expériences sur la force du bois.»—Academia de París, 1740 y 1741.

«Œuvres complètes», tomo VII. París; en él se da cuenta de unos experimentos sobre barras de hierro, los primeros después de los de Musschenbroek.

Perronet.—«Œuvres complètes.—Sur les pieux et pilotis», tomo I.

Girard publicó en 1798 los resultados de una notable serie de experimentos realizados en el Havre.

Es muy importante la Memoria de Musschenbroek, intitulada: *Introductio ad coherentiam corporum firmorum*, y publicada en 1729. Participa de los caracteres de los dos últimos grupos de obras estudiados en este artículo. En la primera parte examina las diversas hipótesis filosóficas corrientes en aquella época, especialmente las de Bacón, y las censura acerbamente. Atribuye el autor la elasticidad de los cuerpos á cierta *vis interna attrahens*, y Pearson cree que esta teoría está tomada del tratado de Optica de Newton.

(Se continuará.)

CONSIDERACIONES

SOBRE LOS AFIRMADOS DE MADRID

La descripción hecha en mi artículo anterior de los afirmados Mac-Adam en las calles de Madrid, me ha sugerido la idea de describir con algún detenimiento su construcción y conservación y de hacer algunas consideraciones. Muchas de ellas perfecta-