

La constante se determina observando que para

$$x = l, \quad \frac{dy}{dx} = p = 0;$$

de donde resulta

$$C = -\frac{Pl^2}{2};$$

luego

$$EI \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{P}{2}(x^2 - l^2).$$

Despejando  $p$  en esta ecuación, tendremos

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{P}{2} \sqrt{\frac{x^2 - l^2}{E^2 l^2 - \frac{P^2}{4}(x^2 - l^2)^2}} = \frac{P}{2EI} \sqrt{\frac{x^2 - l^2}{1 - \left(\frac{P}{2EI}\right)^2 (x^2 - l^2)^2}}.$$

Integrando nuevamente, se llega á la expresión

$$y = \frac{P}{2EI} \int_0^l \frac{(x^2 - l^2)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{P}{2EI}\right)^2 (x^2 - l^2)^2}} dx.$$

Figura debajo del radical un polinomio de cuarto grado, y por lo tanto no se puede resolver esta cuadratura por los métodos elementales del Cálculo integral, sino que depende su resolución de la teoría de las funciones elípticas, y exigiria largas y complicadas transformaciones.

Todhunter dedica pocas líneas á comentar esta segunda parte de la memoria de Bernoulli.

El procedimiento es más trabajoso de lo necesario, porque no se admite en el caso general que el alargamiento ó acortamiento de una fibra sea proporcional al esfuerzo de tensión ó compresión; pero en el caso en que se adopta esta ley, Bernoulli obtiene fácilmente una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = b x^2 \sqrt{a^2 - b^2 x^4}.$$

El autor citado considera la solución de Bernoulli como incompleta, pues sólo tiene en cuenta una ecuación, la de los momentos, siendo así que son necesarias tres ecuaciones para definir el equilibrio de un sistema de fuerzas situadas en un plano.

Sin embargo, el método de Santiago Bernoulli ha sido adoptado por la generalidad de los autores que han estudiado este problema, con ligeras variaciones y perfeccionamientos que no afectan á lo esencial del método empleado por aquel ilustre matemático.

#### IV

Newton, Parent, Bêlidor, Rêamur, Bêuffon, Peronet, Musschenbroek, Mazière, Bülfinger y Riccati.—Aunque las obras de estos autores no tienen por objeto inmediato la teoría de la resistencia de materiales, es imposible dejar de mencionarlas aquí; pero no nos detendremos á analizarlas.

Unas se refieren á otras ramas de la ciencia pura, más ó menos directamente relacionadas con el objeto de nuestro estudio; otras son de carácter filosófico, y muchas tienen por objeto el estudio de experimentos que contribuyeron en mayor ó menor escala al perfeccionamiento de la teoría.

Entre las primeras debemos citar el célebre tratado de Optica de Newton, el cual contiene gran número de consideraciones acerca de la naturaleza de la elasticidad y de la constitución íntima de los cuerpos, utilizadas por muchos de los autores que

escribieron posteriormente acerca de la elasticidad y de la resistencia de materiales. La primera edición de esta obra se publicó en 1704.

De las obras filosóficas, es digna de mención la del P. Mazière, publicada en París el año 1727. Su título es: *Les lois du choc des corps à ressort parfait ou imparfait, déduites d'une explication probable de la cause physique du ressort*. No nos detendremos en su examen, pues no es de las obras que ejercieron influencia en las ideas de los matemáticos que crearon y perfeccionaron la teoría de la resistencia de materiales. Pearson manifiesta su extrañeza de que fuera premiada por la Academia de Ciencias francesa una obra de este género, casi en la época de Euler y de los Bernoulli, y la considera muy propia para justificar las censuras de Riccati á los matemáticos aficionados á hipótesis metafísicas, que tanto abundaron en aquella época.

Del mismo género son: la obra de Bülfinger *De solidorum resistantia specimen*, publicada en 1729; la Memoria de Désaguliers, *Thoughts and conceptions concerning the cause of elasticity*, 1736; y la de Belgrado, *De corporibus elasticis disquisitio Physico-matemática*, publicada en Parma el año 1748.

Más importantes para nuestro objeto son los trabajos experimentales efectuados por diversos físicos ó ingenieros; pero nos limitaremos á mencionarlos, pues sólo indirectamente contribuyeron al adelanto de la ciencia que nos ocupa.

He aquí los principales:

Parent.—«Expériences pour connoitre la résistance des bois de chêne et de sapin.»—Academia de París, 1707.

«Les résistances des poutres par rapport à leurs longueurs ou portées et des poutres de plus grande résistance.»—Academia de París, 1708.

Bêlidor.—«La science des Ingénieurs dans la conduite des travaux de fortification et d'architecture civile.»—La Haya, 1729.

Rêamur.—«Expériences pour connoitre si la force des cordes surpasse la somme des forces des fils qui composent ces mêmes cordes.»—París, 1711.

«Expériences et réflexions sus la prodigieuse ductilité de diverses matières.»—París, 1713.

Buffon.—«Moyen facile d'augmenter la solidité, la force et la durée du bois.»—Academia de París, 1738.

«Expériences sur la force du bois.»—Academia de París, 1740 y 1741.

«Œuvres complètes», tomo VII, París; en él se da cuenta de unos experimentos sobre barras de hierro, los primeros después de los de Musschenbroek.

Peronet.—«Œuvres complètes.—Sur les pieux et pilotis», tomo I.

Girard publicó en 1798 los resultados de una notable serie de experimentos realizados en el Havre.

Es muy importante la Memoria de Musschenbroek, intitulada: *Introductio ad coherentiam corporum firmorum*, y publicada en 1729. Participa de los caracteres de los dos últimos grupos de obras estudiados en este artículo. En la primera parte examina las diversas hipótesis filosóficas corrientes en aquella época, especialmente las de Bacón, y las censura acerbamente. Atribuye el autor la elasticidad de los cuerpos á cierta *vis interna attrahens*, y Pearson cree que esta teoría está tomada del tratado de Optica de Newton.

(Se continuará.)



## CONSIDERACIONES

### SOBRE LOS AFIRMADOS DE MADRID

La descripción hecha en mi artículo anterior de los afirmados Mac-Adam en las calles de Madrid, me ha sugerido la idea de describir con algún detenimiento su construcción y conservación y de hacer algunas consideraciones. Muchas de ellas perfecta-

mente conocidas, pero que no creo esté de más el recordarlas, y otras que, por referirse á procedimientos poco usados en España, pueden prestar alguna utilidad.

Analizando la ejecución de los afirmados de piedra partida de las calles de Madrid, se ve claramente que hay cinco cosas á las que se concede gran importancia, y son el cimientado, el agua, el apisonado, el barrido y el recebo.

Que el cimientado tiene mucha importancia no es necesario decirlo; no en ésta, sino en todas las obras, el resultado depende en gran parte de que estén bien ó mal cimentadas. Pruébalo en el asunto de que me ocupo, que siempre que se establece un afirmado en una trinchera abierta en roca, se conserva éste en buenas condiciones. Bien sé que el ejecutarlo en la forma que se hace en las calles no es factible en la inmensa mayoría de los casos por falta de elementos y de recursos. Mucho menos permite el estado financiero de nuestro país fundar los afirmados con la solidez que en Francia se hace, según lo asegura M. Debauve, Ingeniero Jefe del departamento del Oise, en su notable librito titulado *Instrucción general para el servicio corriente*, publicado en 1894; pero sí puede remediarse bastante esta falta empleando los cilindros de vapor de que me ocuparé en seguida.

Estos cilindros, por su gran peso, consolidarían el terreno con más prontitud y más firmeza que el tránsito de carros y peatones, y su efecto, sería todavía más enérgico si se pudiera disponer de agua.

Haciendo uso de los rodillos de vapor se comprende que, preparado el terreno con ellos, se puedan echar dos capas de piedra partida de diferente calidad, como se hace en Madrid, porque estando el material perfectamente sujeto no es posible que se mezclen las dos capas, quedando la superior, ó sea la de mejor calidad, para superficie de rodadura, sin más pérdida que la natural por desgaste, y la inferior, ó sea la de peor calidad, para formar parte del cimientado. Esto desde luego se ve que significa dos importantes economías, una por permitir que la capa inferior, que ha de ser la más gruesa, sea de una clase no tan buena como la superior, y otra por no experimentar esta última (como queda dicho) más pérdida que la del desgaste y no estar sujeta al machaqueo que forzosamente tiene la piedra suelta por el paso de coches y carros.

Todos sabemos que el agua es el elemento que más contribuye á la buena construcción y conservación de los afirmados. La falta de riego origina la destrucción y disgregación del material empleado en las obras, por lo cual cuanto se haga para poderse proporcionar es poco.

Saber, por tanto, los casos en que económicamente conviene emplear el agua en los afirmados, lo considero digno de la mayor atención y estudio.

En Madrid disponemos de cuanto se necesita; por esto y por los resultados que se obtienen, se emplea en abundancia.

El apisonado es otro asunto á que en esta capital se concede gran importancia, y que en realidad la tiene. Los rodillos de piedra ó hierro que en otro tiempo se usaban en las calles, y que todavía se utilizan en la mayoría de las provincias de España, producen mediana utilidad. Su peso, por centímetro cuadrado, no llega á la tercera parte del de muchos carros que actúan en la misma superficie con 25 kilogramos y que por necesidad producen al pisar un hundimiento más ó menos atenuado por la trabazón que se haya podido conseguir; hundimiento que disgrega el material y hace que se levante el contiguo. Tienen, además, el inconveniente de que con ellos se pierde parte del trabajo porque el mismo motor lo descompone con los cascotes ó pezuñas durante las primeras pasadas.

Los cilindros de vapor apisonan con mayor intensidad (próximamente 13 kilogramos por centímetro cuadrado), quedando el afirmado, siempre que se haga por tongadas, con un enlace capaz de resistir cualquier peso, sin que padezca lo más mínimo el material. Además, nunca destruyen su propia obra, como lo hacen los caballos y bueyes.

Por estas razones, y las anteriormente expuestas, se impo-

nen los cilindros de vapor, que reúnen grandes ventajas, y entre otras, el que su rapidez es bastante más grande.

Es tan importante esta cuestión, y son tan pocos los cilindros de esta clase que existen en España (tal vez no lleguen á una docena), que considero conveniente hacer públicos los resultados obtenidos durante diez y seis años con los dos modelos que posee el Ayuntamiento de Madrid, sus precios y gastos que ocasionan, con algunos otros datos que conozco y á este asunto se refieren.

Los rodillos de vapor pertenecientes al Municipio son cuatro, comprados á la casa inglesa Aveline y Porter; tres de ellos de 20 toneladas, y uno, propiedad del ensanche, de 15 toneladas. El modelo grande es superior al pequeño, pues con un gasto de combustible próximamente igual apisona, por ser más ancho, mayor superficie y deja la obra mucho mejor concluida.

La casa tiene también modelos de 6, 8 y 10 toneladas, que exceptuando las poblaciones de vías anchas, serían los más prácticos, porque los modelos grandes obstruirían la mayoría de las carreteras, y su gran peso les dificultaría el tránsito por algunos puentes. Tal vez el modelo de 15 toneladas tuviera buena aplicación, pero desde luego puede afirmarse que el más útil sería el de 10 toneladas, que es el tipo que, por lo que dice Debauve, se usa en Francia.

Pueden subir pendientes de 9 y 10 por 100, pero para ello es preciso, siempre que la piedra esté suelta, echar una pequeña capa de recebo, pues de lo contrario patinan, y desde luego anuncio que si la piedra no se echa por lo menos en dos tongadas, el rodillo se entierra y empieza á patinar, por muy insignificante que sea la pendiente.

Para hacer uso de ellos, habiendo regado previamente, es necesario tener en cuenta la superficie sobre que se va á marchar. Si la naturaleza de ésta hace que se adapte á los rodillos, se espera á que se orce la superficie ó se echa una capa de recebo ú otra sustancia que no se una al cilindro.

Como regla general, puede decirse que el recebo facilita siempre la marcha de estas máquinas.

He de repetir aquí lo que he dicho al ocuparme de los pavimentos, esto es, que la piedra siempre se machaca algo al pasar el rodillo, cuando menos con los modelos grandes, por lo cual, en mi concepto, debe de admitirse un poco mayor que la que se usa hoy en día.

Puede calcularse un andar de seis kilómetros por hora, pero hay ocasiones en que llegan á duplicar la marcha.

Los gastos que por reparaciones han proporcionado las cuatro máquinas citadas durante los diez y seis años que llevan funcionando, se pueden fijar en 4.000 pesetas cada una, correspondiendo principalmente á los últimos años; en ellos se incluye la renovación de los cilindros por desgaste. La duración de éstos será aproximadamente de ocho años, trabajando doscientos días al año y unas nueve horas diarias.

Consumen, en estas horas, unos 350 kilogramos de carbón.

El modelo de 20 toneladas cuesta en Inglaterra 500 libras esterlinas, el de 15 toneladas 450 y el de 10 toneladas 450.

El alto precio que alcanzan estas máquinas puede ser una dificultad para su rápido desarrollo, pero podría salvarse, bien haciendo que el apisonado corriera á cargo de un contratista, bien alquilando estas máquinas á particulares. Esto último tengo entendido que es lo que se hace en algunos departamentos franceses.

Mr. Debauve deduce de sus cálculos que en el del Oise el cilindrado con máquina de 10 toneladas, es decir, con máquina pequeña, ha salido 90 céntimos más barato que con los de caballos.

En Madrid se pensó en algún tiempo en una mejora que por fin no se llevó á efecto, y consistía en hacer que la misma máquina transportase el carbón que necesitara. Con este objeto tengo entendido que la misma fábrica construye unos vagones, y no dudo en afirmar que esta mejora había de ser sumamente beneficiosa, porque el Ayuntamiento gasta mucho más de lo que representa el interés del capital que empleara con este propósito

en transportar el carbón desde los depósitos al sitio en que se encuentran las máquinas.

En las carreteras sería, según presumo, igualmente práctico el transportar el carbón valiéndose de la misma máquina.

También se construyen vagones con objeto de llevar el agua necesaria para el alimento de la caldera, pero esto en las calles de Madrid no tiene verdadera aplicación.

En las provincias pueden ser útiles por las dificultades que á veces existen para obtenerla, y por no ser á propósito muchas aguas para aquel fin.

A la extracción del polvo y del barro también se le concede en las calles importancia. Tal vez aquí se atiende más á lo molesto y sucio que es á peatones y coches que á su verdadera utilidad, pero en rigor se presta de este modo mayor duración á los afirmados, porque se les quita los detritus que tanto perjudican á los pavimentos.

La extracción de estos residuos alcanza mayor importancia en los afirmados de poca latitud, puesto que en ellos insisten los vehículos en una faja bastante estrecha, y si existe polvo ó barro se forma una falsa rodada que con la tendencia que tienen los animales á seguir las huellas de los que les precedieron, concluye por ser una verdadera rodada. En los afirmados que se encuentran en estas condiciones, se ve que en los puntos en que azota bastante el viento, aquellos se hallan en mejor estado de conservación, lo cual indica que la misma naturaleza nos señala lo que se debe hacer.

No he de insistir más sobre este particular; sin embargo, como sé que algunos Ingenieros se preocupan con esta cuestión, me parece pertinente, no sólo decir los precios que tienen las escobas en Madrid, sino también la manera de construirlas.

La escoba se hace con las ramas de un arbusto espinoso que se cria en la orilla de los rios y se conoce con el nombre de *tamujo*. En Madrid se vende en haces, y de cada haz se podrán sacar próximamente 8 escobas. Estas ramas se meten en agua y allí se las tiene por espacio de dos días, hasta que estén bien blandas y se puedan trabajar con facilidad. Se quitan á continuación los troncos mayores y las ramitas que son impropias para formar la escoba, procurando que todas las que se conserven sean iguales, se limpia la parte que ha de servir para el atado y no queda más operación que unir las entre sí ó á un palo con una lía delgada.

Todo esto lo hacen aquí algunos camineros prácticos en su construcción, y puede calcularse que tratándose de un jornalero trabajador durarán dos meses.

Su precio comprándolas es de 0,27 pesetas, y próximamente costarán lo mismo haciéndolas.

Para el recebo se dispone en Madrid de arena llamada de *miga*, que contiene sílice y algo de arena, y no da malos resultados. Procede de los desmontes que se ejecutan en el mismo ensanche, pero es seguro que si no se tuviera con tanta facilidad se procuraría traer un recebo que llenara este vacío en condiciones aceptables.

Esta facilidad para adquirir buen recebo no en todas partes existe, y dada su importancia, y que después de todo es un material como otro cualquiera de los que se han de emplear en la construcción y conservación de un afirmado, creo que sería cosa de pensar si sería conveniente el tenerlo depositado al pie de obra, como se hace con la piedra partida, imitando en esto lo que según mis noticias se lleva á cabo ó cuando menos se ha llevado en alguna provincia.

De nada serviría que todos los elementos de que se dispone en esta capital fueran buenos, si el personal encargado de emplearlos no estuviera á la altura de su misión. Afortunadamente no es así, pues el ensanche cuenta con camineros inteligentes, que no sólo intervienen en la conservación de sus trozos respectivos, sino que también lo hace muchas veces en la construcción.

Bachean preparando la caja como es preciso, estándoles prohibido el arrojar la piedra sobre los baches sin más preparación. A este sistema, y en general al de hacer que el tránsito llegue á

consolidar el firme lo llama Debaue en el prólogo de su obra *«viejo y bárbaro»*.

La vigilancia para que permanezcan en sus puestos atentos á su obligación es grande, porque los observan sus Jefes superiores y á diario los Sobrestantes y Cabos.

Su número será aproximadamente 200, asignándoseles superficies variables, lo cual es sumamente racional, puesto que no es el mismo el trabajo que proporciona, ni es el mismo el cuidado que exige una vía muy frecuentada que otra que no lo sea tanto; pero á pesar de su gran número y de su buena distribución, no puede evitarse que en algunas ocasiones sea necesario destinar brigadas de trabajadores eventuales que les ayudan á limpiar los trozos. Se deduce de ésto que en las calles se emplea un método que podremos llamar *mixto*.

No sé lo que se pensaría en el caso de que no se pudiera disponer de peones auxiliares; pero desde luego me inclino á creer que lo más conveniente sería reunir los peones camineros en determinadas épocas del año para que limpiaran las calles que lo necesitaran, volviendo, concluido este trabajo, á sus puestos respectivos.

Este sistema encuentro que, entre otras ventajas, tendría la de que los obreros se vigilaran los unos á los otros, y la de que mutuamente se enseñarían; aquí la frecuencia con que los camineros se hallan trabajando juntos hace que aprendan pronto su fácil cometido; pero creo que siempre que no se apliquen estos procedimientos y en que por la manera de reclutarse el personal carezca de la instrucción adecuada, sería muy conveniente el que permanecieran como auxiliares al lado de camineros inteligentes y prácticos el tiempo que se considerara necesario para que aprendieran su obligación.

El construir y conservar los afirmados Mac-Adam del modo que se hallan en el ensanche de Madrid, exige gastos á no dudarlo, pero son gastos que evitan otros mayores, y es necesario que los Gobiernos, las Diputaciones y los Ayuntamientos comprendan, que si en alguna ocasión lo barato es caro, esta es una de ellas.

El día en que arraiguen en el espíritu del país estas ideas, el progreso rápido de los afirmados me parece que será un hecho.

MARIANO DE CASTRO GUERRERO.

## REVISTA EXTRANJERA

### Variaciones de volumen de los morteros de portland, á consecuencia del fraguado y del estado higrométrico.

La siguiente nota es un extracto de la de Mr. Considère, leída en la sesión de 18 de Septiembre último en la Academia de Ciencias de París.

De 1886 á 1889—dice Mr. Considère,—las variaciones de volumen de los morteros han sido objeto de experimentos hechos con la mayor precisión en la Escuela de «Ponts et Chaussées» durante tres años consecutivos. Por otra parte, en el tratado que acaban de publicar en Alemania F. W. Busing y C. Schuman, han dado á conocer los resultados de las investigaciones de Meier y Shuman sobre esta materia. Pero no se han estudiado, que yo sepa, los efectos que producen estas variaciones de volumen en las mamposterías armadas, donde se encuentran contrariadas por las piezas metálicas, y donde desarrollan fuerzas interiores.

Para estudiar esta cuestión, á la cual dan gran interés los progresos de las construcciones de mampostería armada, he hecho simultáneamente, con los mismos morteros, prismas armados y prismas sin armadura, cuyas variaciones de longitud han sido observadas por medio de tornillos micrométricos que apreciaban centésimas de milímetro. Unos se han conservado en agua, otros se han tenido al aire libre.

*Prismas conservados en agua.*—Se fabricaron cuatro prismas que tenían todos una sección de 60 x 25 mm. y una longitud de 600 mm. Dos de estos prismas eran de cemento puro; los otros dos estaban hechos con mortero compuesto de 600 kg. de cemento por metro cúbico de