sus necesidades requerían, el embalse disminuía por cantidades que en ningún caso eran menores de 90 millones de litros al día.

No es más exacto el dato referente al consumo en Madrid; por desgracia, para buscar los consumos de 30 litros por habitante, habría que remontarse á los primeros años de la traída del agua del Lozoya á Madrid, cuando la red de distribución aún no había alcanzado todo el desarrollo que en la actualidad tiene, cuando miles de casas carecían de agua, y cuando, en fin, ni los particulares ni el Municipio habían adquirido el hábito de gastar el agua abundante, llegando y excediendo en muchos casos los límites donde empieza el derroche. En los días en que fué menor el consumo en Madrid en el verano último, después de haberse introducido notables restricciones tanto en el servicio público como en el doméstico, se elevó á la cifra de 110 millones de litros, que aplicada á la población que antes se indica, corresponde á 234 litros por persona al día, que, como se ve, difiere bastante de la que se suponía; por razones que tampoco nos es dado alcanzar, como no sea que el dato se haya deducido del que, tomándolo del antiguo manual del Clandel, va corriendo de antiguo por libros y revistas, y, según el cual, Madrid tiene tan sólo 15 litros por día y habitante, lo que, sin duda, se refiere á la época en que sólo se contaba con el agua de los antiguos viajes.

Nos parece que es llegada la hora de que abandonemos nuestros antiguos y desacreditados procedimientos, que desprestigiándonos á los ojos del mundo, no tienen virtualidad para conseguir enmienda eficaz en los yerros de nuestra Administración; si la opinión pública ha de tener influencia decisiva en la gobernación del país, aun tratándose de materias técnicas, que en muchos casos está muy distante de poder abarcar y comprender, preciso será que la prensa, á imitación de la inglesa y norteamericana, se encargue de ilustrarla con datos fehacientes y juicios autorizados, pues de otra suerte se corre el riesgo de que ó no puedan ser atendidas sus demandas, ó, caso de serlo, en vez de aportar soluciones acertadas á los problemas que ante ella se planteen, ofrezca tan sólo caminos que conduzcan al descrédito y á la ruina.

APUNTES HISTÓRICOS

SOBRE EL ORIGEN Y DESARROLLO DE LA TEORÍA DE LA RESISTENCIA DE MATERIALES

POR

DON LUIS GAZTELU

INGENIERO DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

(Continuación.)

En la parte experimental da cuenta de una ley descubierta por él, y que más tarde fué demostrada por Euler, valiéndose del cálculo. Su enunciado es el siguiente:

Las resistencias de las vigas comprimidas por fuerzas paralelas á sus longitudes están, á igualdad de las demás condiciones, en razón inversa de los cuadrados de dichas longitudes.

Terminaremos este artículo con un ligero examen de los trabajos de J. Riccati, dos memorias escritas una en latín y otra en italiano.

La primera, intitulada *Veræ elasticarum virium leges ex phœnomenis demonstrata*, fué publicada en Bolonia, en 1747. Es de verdadero interés este trabajo, pues da cuenta de las primeras tentativas hechas después de Hooke para averiguar experimentalmente las leyes de la elasticidad de los cuerpos. En ella se pone de manifiesto con toda claridad el estado de las investigaciones físicas acerca de la elasticidad en tiempo de Riccati.

Es de notar, sin embargo, que este autor no tenía un concepto claro de la ley de Hooke. De ciertas consideraciones sobre las vibraciones sonoras de los cuerpos deduce que si se designa por u la tensión que actúa sobre un alambre cuya longitud es x y se atribuye á u un incremento δu correspondiente al incremento δx dado á x, la ecuación diferencial de la relación entre estas dos variables es

$$\frac{\delta u}{u} = a\,\frac{\delta x}{x^2}.$$

siendo a una constante, resultado visiblemente en contradicción con la ley de Hooke. Para el caso de la compresión, admite la misma ley cambiando el signo de x.

La integral general de esta ecuación diferencial es

$$u = C\,e^{-\frac{1}{x}}$$

como se ve fácilmente.

Riccati indica que Taylor y Varignon hallaron esta misma ecuación al tratar de determinar la densidad de un fluido elástico sometido á su propio peso.

La segunda memoria, en italiano, es la titulada *Sistema dell' Universo*, publicada en Luca, en 1761. Los capítulos 3.º y 4.º de la primera parte del libro 2.º tratan de las fuerzas elásticas y de los principios de que se derivan; en ellos manifiesta su tendencia opuesta á las hipótesis metafísicas, y se esfuerza por descubrir una teoría puramente dinámica para explicar los fenómenos físicos.

La importancia de las investigaciones de Riccati, no consiste en resultados concretos verdaderamente prácticos, según indica Pearson, sino en el método empleado y en sus tentativas para reemplazar por una teoría dinámica las hipótesis semi-metafísicas.

V

Daniel Bernoulli.—Euler.—Daniel Bernoulli, sobrino del autor de la primera solución del problema de la lámina elástica, sostuvo por los años 1730 á 1745 una larga correspondencia con Euler, siendo quizás causa de que este eminente matemático fijara su atención en los problemas de la elasticidad y de la resistencia de los cuerpos sólidos.

Pero contribuyó también directamente al progreso de estas ciencias con varios trabajos importantes. Daniel Bernoulli fué el primero que obtuvo la verdadera ecuación diferencial del problema de las vibraciones transversales de una barra elástica. La memoria en que dió cuenta de estos trabajos se intitula *De vibrationibus et sono laminarum elasticarum commentationes physico-geometricæ*, y fué publicada en 1751.

Otra memoria del mismo autor lleva por título *De sonis multifariis quos laminæ elasticæ diversimode edunt disquisitiones mechanico-geometricæ, experimentis acusticis illustratæ et confirmatæ*. En ella considera Bernoulli cuatro modos de vibración de una lámina elástica, los mismos que formuló más tarde Euler. Estudia varias soluciones de la ecuación diferencial general correspondientes á estos cuatro casos, y discute ampliamente los períodos de las vibraciones y la posición de los nodos, citando varios experimentos que confirman los resultados obtenidos teóricamente.

Son innumerables los trabajos de Euler acerca de las vibraciones de los cuerpos elásticos; pero dada la gran importancia de los que se refieren de un modo directo al objeto de nuestro estudio, como son los relativos á la flexión de los prismas sometidos á esfuerzos dirigidos según su eje, nos limitaremos al examen de estos últimos.

La primera de las memorias de Euler acerca de este asunto se publicó en 1759 en la colección de la Academia de Berlín, y su título es *Sur la force des colonnes*. Antes de examinarla, recordaremos brevemente esta teoría, tal como hoy se suele exponer en los tratados elementales.

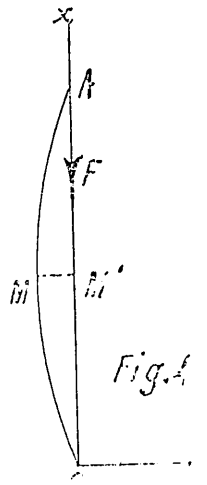


Fig. 4

Sea AO (fig. 4.ª) el eje de una columna poste sometido al esfuerzo F aplicado según dicho eje al extremo superior y teniendo fijo el extremo inferior O; se admite que el punto A permanece, al deformarse el prisma, en la vertical del punto O.

Tomemos por eje de las x el eje neutro de la columna y por eje de las y la perpendicular levantada al de las x por el punto O en el plano de la elástica. Sea AMO esta curva. Antes de la deformación, la fuerza F, que va dirigida según el eje, sólo produce una compresión que se reparte uniformemente en la sección del prisma, y el momento flector es nulo en el punto M'. Mas cuando la fibra neutra se ha deformado según la curva AMO, en el punto M actuará el momento flector $-Fy$. La ecuación diferencial de la elástica será

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=-Fy$$

ó bien

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}+Fy=0 .$$

Es una ecuación lineal, sin segundo miembro y con coeficientes constantes. Puede resolverse por procedimientos particulares muy elementales, pero vamos á aplicar el método general, que conduce rápidamente al resultado.

Sustituyendo en la ecuación la función exponencial $y=e^{rx}$ en la que r es constante, obtendremos

$$e^{rx}(EIr^2+F)=0,$$

ecuación que queda satisfecha por las dos raíces de la ecuación algebráica

$$EIr^2+F=0 .$$

Podemos escribir éstas bajo la forma

$$r=\pm\sqrt{\frac{F}{EI}}=\pm m\sqrt{1},$$

representando por m el valor absoluto de

$$\sqrt{\frac{F}{EI}} .$$

Luego

$$y=e^{mx\sqrt{-1}};\quad y=e^{-mx\sqrt{-1}}$$

son integrales particulares de la ecuación propuesta, y la integral general será

$$y=c\,e^{mx\sqrt{-1}}+c'\,e^{-mx\sqrt{-1}} .$$

Transformando las exponenciales en expresiones trigonométricas por medio de la fórmula conocida de Euler, tendremos

$$y=C(\cos mx+\sqrt{-1}\operatorname{sen} mx)+$$
$$C'(\cos mx-\sqrt{-1}\operatorname{sen} mx)=$$
$$(C+C')\cos mx+(C-C')\sqrt{-1}\operatorname{sen} mx$$

y haciendo

$$C+C'=A;\quad (C-C')\sqrt{-1}=B;$$
$$y=A\cos mx+B\operatorname{sen} mx,$$

que es la integral general, en la cual A y B son las constantes arbitrarias.

Para determinarlas observaremos que para $x=0$; $y=0$; luego

$$A=0.$$

La ecuación de la curva elástica queda reducida á

$$y=B\operatorname{sen} mx.$$

Puesto que suponemos que el extremo superior se mueve á lo largo del eje de las x, debemos tener también, para

$$x=a;\quad y=0;$$

siendo a la longitud del prisma.

Puede verificarse esto de dos maneras: La primera siendo $B=0$; entonces $y=0$ para cualquier valor de x, luego el eje permanece rectilíneo y no hay flexión.

La segunda, haciendo

$$\operatorname{sen} ma=0$$

para lo cual basta que

$$ma=a\sqrt{\frac{F}{EI}}=k\pi,$$

siendo k un número entero.

De esta ecuación se deduce

$$F=EI\frac{\pi^2k^2}{a^2},$$

y el menor valor de F capaz de producir flexión en el prisma será

$$F=EI\frac{\pi^2}{a^2},$$

correspondiente á $k=1$.

Con esto se facilitará el examen de la memoria de Euler, en la cual se obtienen estos mismos resultados, pero siguiendo un método algo más complicado y empleando distintas notaciones.

Euler halla que la fuerza menor capaz de producir la flexión del prisma es

$$\pi^2\frac{Ek^2}{a^2}$$

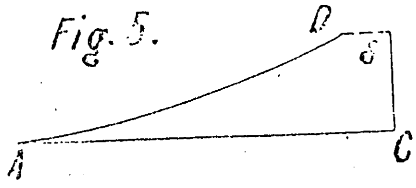
y llama *momento de resorte* ó *momento de rigidez* á la expresión Ek^2, cuyo valor se deduce fácilmente de la comparación de esta expresión con la que acabamos de hallar, y no es otra cosa que el producto EI del coeficiente de elasticidad por el momento de inercia de la sección considerada con relación al eje de flexión.

Admite que el momento flector (Pf con las notaciones que adopta), es igual al momento de rigidez multiplicado por la curvatura de la elástica en el punto considerado, es decir,

$$\frac{EI}{\rho}=Pf;$$

la cual, simplificando el valor de ρ, como se dijo al tratar de problema de la flexión de la lámina elástica, coincide con la ecuación diferencial de que hemos hecho uso para la resolución del problema.

Fig. 5.



Considerando una fuerza F perpendicular al eje de la viga ó de la lámina elástica AC (fig. 5), supongamos que dicho eje se deforma según la curva AD, siendo fijo el punto A, y llamemos δ á la proyección sobre el eje del camino recorrido por el extremo C; se supone δ muy pequeño. Euler encuentra la fórmula

$$D\,\delta = \frac{F}{3}\,\frac{a^3}{E\,k^2}$$

Esta ecuación le conduce á un método para determinar el momento de rigidez Ek^2, y propone otras varias investigaciones experimentales fundadas en la misma relación.

Hace luego una interesante comparación entre las fuerzas necesarias para producir una flexión dada en una viga empotrada por un extremo y libre por el otro, según se apliquen normal ó paralelamente al eje neutro. En el primer caso, cualquier fuerza, por pequeña que sea, produce una flexión, mientras que, en el segundo, no se produce flexión sino cuando la fuerza excede de cierto límite, y se demues ra además que la menor fuerza capaz de producir flexión en la viga si se aplica según su eje, produciría, aplicada normalmente, una deformación enorme.

Euler deduce más adelante la ecuación del eje deformado de un prisma articulado por un extremo y sujeto á un esfuerzo P, según su eje (fig. 6); siendo $x = AM$, $y = MR$ y 0 el ángulo RCM, halla la ecuación

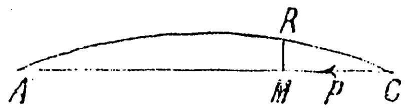


Fig. 6.

$$\frac{y}{0}\sqrt{\frac{P}{E\,k^2}} = \text{sen}\left(x\sqrt{\frac{P}{E\,k^2}}\right).$$

Para $x = a$, $y = o$;
de donde resulta

$$a\sqrt{\frac{P}{E\,k^2}} = \pi\,,$$

y de esta ecuación deduce que el menor valor de P capaz de producir flexión es

$$P = \pi^2\,\frac{E\,k^2}{a^2}\,.$$

Tal es, en sustancia, la doctrina contenida en esta primera memoria de Euler, importantísima para el estudio que nos hemos propuesto.

VI

Euler (continuación), Fuss, Lexell.—Euler escribió otras tres memorias acerca del problema de las columnas, ó, más en general, de las piezas prismáticas oprimidas por sus extremos; estas memorias fueron publicadas en San Petersburgo el año 1780. Sus títulos son:

1.ª *Determinatio onerum quæ columnæ gestare valent.*

2.ª *Examen insignis paradoxi in theoria columnarum occurrentis.*

3.ª *De altitudine columnarum sub proprio pondere corruentium.*

En la primera de estas memorias, insiste sobre los resultados obtenidos anteriormente y consignados en la del año 1757, afirmando que las columnas no se rompen por simple aplastamiento, sino que precede siempre á la rotura la flexión ó encorvamiento del eje neutro.

Aquí propone Euler, por vez primera, un importante problema de aplicación práctica, que consiste en determinar las dimensiones de la sección del prisma en función del momento de rigidez Ek^2.

Tomando por eje de las x la intersección del plano de la sección con el plano de flexión y por eje de las y la perpendicular al eje de las x trazada por el punto de intersección con el eje neutro y contenida en el plano de la sección considerada, obtiene la relación:

$$E\,k^2 = h\int x^2\,y\,dx$$

en la cual h representa lo que hoy llamamos coeficiente de elasticidad.

Euler supone la fibra neutra situada en la cara cóncava del prisma deformado, incurriendo en el mismo error que Bernoulli y otros muchos matemáticos del siglo XVIII.

Obtiene así, para un prisma de sección rectangular cuyas dimensiones son b y c, siendo esta última la perpendicular al plano de flexión,

$$E\,k^2 = \frac{1}{3}\,b^3\,ch\,.$$

Fácilmente se aplica también la fórmula general al caso de una sección circular.

Compáranse á continuación los resultados teóricos con los obtenidos por Musschenbroek en sus experimentos ya citados anteriormente, y Euler halla que hay conformidad entre unos y otros. Con el auxilio de estos datos experimentales determina el valor del coeficiente de elasticidad.

Es muy curiosa é interesante, desde el punto de vista histórico, la investigación que se encuentra al final de esta memoria de Euler.

(Se continuará.)

SANEAMIENTO DE POBLACIONES

(CONTINUACIÓN)

Y aun diremos más: no en todos los casos se sanea la urbe en condiciones especiales, en las ciudades situadas á la orilla de las corrientes, en que se sienten los efectos del flujo y reflujo de las mareas, como Londres, por ejemplo, ni aun arrojando lejos las aguas negras se consigue desprenderse de ellas; los productos putrescibles vuelven á ellas, y el río, inficionado aguas abajo, se inficiona aguas arriba.

El supuesto de que la corriente basta para depurar las impurezas que recibe es completamente erróneo. Verdad es que á la infección la combaten un cierto número de acciones naturales que tienden á modificar continuamente la composición de las aguas impuras, unas, entre ellas, la oxidación puramente química, otras, como la dilución y el depósito, mecánicas ó físicas; pero su efecto es lento é incompleto.

La oxidación de las materias orgánicas en suspensión en el agua está probada por la disminución del oxígeno y la producción de gases carburados, efecto de las reacciones correspondientes.

Otras reacciones químicas, por efecto del contacto de residuos diversos, dan lugar á precipitados que limpian al agua de alguna de sus impurezas.

El trabajo de los organismos vegetales y animales que se nutren á expensas de las materias en suspensión contribuyen también á modificar su composición.

Los depósitos que no tarden en producirse en el fondo y en las orillas aclaran las aguas, pero sobre todo la dilución es la que desempeña el principal papel en la purificación aparente que se observa á alguna distancia del punto de infección, porque las impurezas diseminadas en una masa considerable se encuentran