Art. 3.° Precederá al decreto de constitución de las servidumbres de corriente eléctrica la instrucción de un expediente, de que formará parte la Memoria descriptiva y el proyecto de la instalación que se solicita. Las solicitudes, acompañadas de estos documentos, se dirigirán al gobernador de la provincia, quien los pasará á informe del Ingeniero Jefe de Obras públicas. Este informe deberá emitirse en un plazo que no exceda de quince días. En otro plazo que no exceda de diez días, el Gobernador de la provincia decretará la servidumbre de corriente eléctrica, si el informe de la Jefatura de Obras públicas es favorable. Si fuere contrario, será negada la servidumbre. Podrá interponerse recurso de alzada contra las resoluciones del Gobernador ante el Ministerio de Fomento.

Art. 4.° El dueño del terreno sobre que trate de imponerse la servidumbre forzosa de corriente eléctrica tendrá derecho á oponerse por alguna de las causas siguientes:

1.ª Por no ser el que la solicite dueño ó concesionario del salto de agua que ha de dar origen á la energía eléctrica.

2.ª Por poderse establecer la línea conductora de la corriente por otros predios con iguales ventajas para el que pretenda imponerla y menores inconvenientes para el que haya de sufrirla.

Este género de reclamaciones habrá de presentarse ante la Jefatura de Obras públicas dentro del plazo de quince días á que el artículo anterior se refiere, y resuelto por el Gobernador civil de la provincia en el de diez días, sin ulterior recurso.

Art, 5.° No puede imponerse la servidumbre forzosa de corriente eléctrica sobre edificios, ni sobre jardines, ni huertas que existan al tiempo de hacerse la solicitud.

Art. 6.° No se abonará cantidad alguna al dueño del terreno por donde cruce la línea conductora de la corriente eléctrica, ni en concepto de expropiación ni en concepto de daños y perjuicios.

Art. 7.° El Ministerio de Fomento determinará las prescripciones reglamentarias á que hayan de someterse las conducciones de corrientes eléctricas al aprovechar ó cruzar las carreteras del Estado ó las vías férreas, ó en el caso en que afecten directa ó indirectamente á cualquier obra pública.

Art. 8.° Las Diputaciones provinciales y los Ayuntamientos determinarán las prescripciones á que hayan de someterse las conducciones de corriente eléctrica que influyan en las obras provinciales ó municipales.

Art. 9.° La servidumbre de corriente eléctrica se regirá en el interior de las poblaciones por las Ordenanzas generales y locales de policía urbana.

Art. 10. Puede imponerse la servidumbre forzosa de acueducto para el establecimiento de fábricas de energía eléctrica. Esta servidumbre estará sujeta á las prescripciones de ley de aguas de 13 de Junio de 1879.

APUNTES HISTÓRICOS

SOBRE EL ORIGEN Y DESARROLLO DE LA TEORÍA DE LA RESISTENCIA DE MATERIALES

POR

DON LUIS GAZTELU

INGENIERO DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

(Continuación.)

Propónese el autor determinar la flexión de una columna bajo la acción de su propio peso, y halla la ecuación diferencial.

$$E\,k^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + b^2 \int_0^y x\,dy = 0\,,$$

en la cual, b representa el lado de la sección, que se supone cuadrada; toma por unidad el peso específico del material que constituye la columna.

Euler integra esta ecuación diferencial por medio de una serie, cuyos términos contienen las potencias sucesivas de x^3. Representando por a la altura de la columna, y haciendo

$$\frac{E\,k^2}{b^2} = m\,,$$

llega á la ecuación

$$1 - \frac{1\,.\,a^3}{4\,!\;m} + \frac{1\,.\,4\,.\,a^6}{7\,!\;m^2} - \frac{1\,.\,4\,.\,7\,a^9}{10\,!\;m^3} + \frac{1\,.\,4\,.\,7\,.\,10\,a^{12}}{13\,!\;m^4} - \ldots\ldots = 0\,.$$

Demuestra que la mínima altura necesaria para que la columna sufra flexión por su propio peso, es la menor raíz real de la ecuación precedente; mas, como del examen de dicha ecuación resulta que no tiene ninguna raíz real, síguese como consecuencia que una columna no puede sufrir flexión por efecto de su propio peso, por muy grande que sea su altura.

En esto consiste la célebre paradoja de Euler, cuya explicación persiguió aquel sabio matemático con gran insistencia.

No tiene otro objeto que explicar esta paradoja la segunda de las tres memorias citadas más arriba, como lo indica su mismo título.

Pero en ésta llega á una conclusión diametralmente opuesta, y encuentra que existe para la altura de la columna un límite variable proporcionalmente á $b^{\frac{3}{2}}$, siendo b el lado del cuadrado de la sección.

Hé aquí el enunciado original de esta proposición, á la cual llama su autor *Theorema maxime memorabile:*

Maxima altitudo, qua columnæ ex eadem materia confectæ, proprium pondus etiamnunc sustinere valent, tenet rationem subtriplicatam amplitudinis.

Los resultados obtenidos en estas dos memorias no parece que dejaron satisfecho á Euler, pues insiste nuevamente sobre el mismo asunto en la tercera memoria citada.

En ella trata el problema bajo otro aspecto, empezando por reconocer la necesidad de aplicar al extremo superior de la columna una fuerza horizontal, para que se realice la hipótesis admitida, á saber: que el extremo superior del eje neutro se mueve á lo largo de la vertical que pasa por su extremo inferior.

Para determinar esta fuerza, escribe la ecuación de los momentos con relación al extremo inferior del eje neutro.

Sea h (fig. 7.ª) la altura de la columa, G el centro de gravedad de la columna deformada y M el peso; siendo AB el eje de las x y B el origen de coordenadas, la ecuación de los momentos será

$$F\,h = M \times O\,G = \frac{M}{h}\int_0^x y\,dx.$$

Escribiendo, para abreviar,

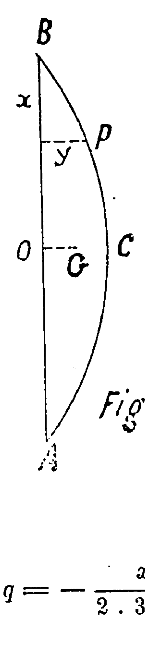

Fig. 7.

$$g = \frac{1}{h}\int^h y\,dx\,; \quad m = E\,k^2 \frac{h}{M}\,;$$

se llega á la ecuación diferencial

$$g x + \int_0^x x\,dy + m\,\frac{d^2 y}{dx^2} = 0\,.$$

Euler resuelve esta ecuación por medio de dos series. La integral general es

$$y = \alpha\,p + g\,q$$

en que α es una constante; p y q representan las series

$$p = x - \frac{x^4}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,m} + \frac{1\,.\,4\,.\,x^7}{2\,.\,3\,.\ldots.\,7\,.\,m^2} - \frac{1\,.\,4\,.\,7\,.\,x^{10}}{2\,.\,3\,.\ldots.\,10\,m^3} + \ldots.$$

$$q = -\frac{x^3}{2\,.\,3\,.\,m} + \frac{1\,.\,3\,.\,x^6}{2\,.\,3\ldots6\,.\,m^2} - \frac{1\,.\,3\,.\,6\,.\,x^9}{2\,.\,3\ldots.\,9\,.\,m^3} + \ldots.$$

En la base de la columna, tendremos

$$x = h, \quad y = o,$$

de donde resulta, para

$$x = h, \quad \alpha p + g q = o;$$

además

$$g h = \int_0^h y \, dx = \alpha \int_0^h p \, dx + g \int_0^h q \, dx$$

luego

$$p \left(h - \int_0^h q \, dx \right) + q \int_0^h p \, dx = o \, ,$$

ecuación que determina la altura máxima que podrá alcanzar la columna sin romperse bajo su propio peso, *in qua se tantum non sustinere valebit*, como dice el autor.

Euler resuelve esta ecuación trascendente, y encuentra para h un valor aproximado igual á

$$\sqrt[3]{200 \, m} \, .$$

De aquí deduce la siguiente consecuencia:

Sea b^2 el área de la sección del prisma; el peso M será

$$M = b^2 h$$

y el valor de m

$$m = E \, k^2 \frac{h}{M} = \frac{E \, k^2}{b^2} \, .$$

Llamemos P al menor peso que, colocado sobre la columna, es capaz de producir su flexión; supongámoslo del mismo material que la columna y reducido á un prisma de altura a y de sección d^2. Tendremos entonces

$$P = \frac{\mathrm{E} \, k'^2 \, \pi^2}{a^2}$$

y

$$m = \frac{P \, a^2}{\pi^2 \, b^2} \times \frac{k^2}{k'^2}$$

Sea λ la razón del peso P (que se debe determinar por la experiencia) al de la columna. Resultará que

$$P = \lambda \, a d^2$$

y

$$\frac{k^2}{k'^2} = \frac{b^4}{d^4} \, .$$

De aquí se deduce

$$h = 2{,}7263 \sqrt[3]{\frac{\lambda \, b^2}{d^2}} \text{ (1)}.$$

Este es el último resultado obtenido por Euler acerca de esta cuestión.

A pesar del gran interés histórico que ofrecen las tres memorias que acabamos de examinar, hay que reconocer que su autor no trató la cuestión de un modo completo y satisfactorio.

Otros muchos trabajos menos directamente relacionados con el objeto principal de nuestro estudio publicó Euler. No sería oportuno estudiarlos aquí; pero citaremos sus títulos y haremos ligeras indicaciones respecto á los más importantes.

(1) Hemos traducido literalmente este párrafo del extracto de Pearson para dar á conocer el resultado definitivo de Euler; pero es indudable que hay algún error en la interpretación de las notaciones de la memoria original.

En 1740 dió á conocer su primera memoria que trata de estudios sobre la elasticidad, cuyo título es: *De minimis oscillationibus corporum, tam rigidorum quam flexibilium.*

La memoria publicada en 1744, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, trata de problemas análogos á los que hoy constituyen el cálculo de variaciones, y lleva un apéndice intitulado *De curvis elasticis.*

Merece que consignemos respecto á ella algunas breves observaciones. Es interesante la afirmación del principio de la menor acción interpretada en sentido amplio y con carácter filosófico, siguiendo en estos razonamientos las ideas tan generalizadas entonces entre los sabios, aun entre los físicos y los matemáticos. Admite que el universo es lo más perfecto que se puede concebir, y de aquí deduce que en sus procesos no hay pérdidas ni prodigalidades, que su *acción* es siempre la menor necesaria para producir un efecto dado. Hace notar Pearson, muy acertadamente, que los resultados de tales teorías deben ser muy diferentes, según las definiciones y las convenciones que se adopten para medir esas *acciones*, observación que parece haber pasado inadvertida para los matemáticos de aquella época. Reconoce, sin embargo, que aquellas ideas pudieron contribuir á guiar á los físicos hacia el descubrimiento del moderno principio de la menor acción, interpretado de un modo racional y científico, y quizás también al de la conservación de la energía.

Afirma Euler que Daniel Bernoulli descubrió que la fuerza potencial (*vis potentialis*), representada por la expresión $\int \frac{ds}{\rho}$ es un mínimo en la curva elástica, y se propone resolver el problema inverso.

Consiste éste en determinar una curva que cumpla con las siguientes condiciones: debe tener una longitud dada entre dos puntos dados, tangentes dadas en ellos, y la integral $\int \frac{ds}{\rho}$ debe ser un mínimo.

No intenta Euler demostrar que esta integral debe ser un mínimo en el caso de la curva elástica. El autor admite siempre, sin demostración, que el momento de las fuerzas elásticas es, en cada punto de la curva elástica, inversamente proporcional al radio de curvatura, y escribe su ecuación diferencial partiendo de esta hipótesis, sin entrar en consideraciones que le sirvan de fundamento.

Examínase en esta memoria el caso en que obren fuerzas exteriores en todos los puntos de la curva.

Los casos estudiados por Euler son, en resumen, los cuatro siguientes:

1.° Viga empotrada por un extremo y libre por el otro.
2.° Viga libre en sus dos extremos.
3.° Viga simplemente apoyada por sus dos extremos.
4.° Viga empotrada en sus dos extremos.

Mencionaremos, además, las siguientes memorias de Euler:

De motu vibratorio fili flexibilis, corpusculis quot cumque onusti, 1764.

De motu vibratorio cordarum inequaliter crassarum, 1764. En esta memoria estudia el autor, por vez primera, las vibraciones de cuerdas de sección variable.

Genuina principia doctrinæ de statu æquilibrii et motu corporum tam perfecte flexibilium quam elasticorum, 1771.

Investigatio motuum quibus laminæ et virgæ elasticæ contremiscunt, 1782.

De propagatione pulsuum per medium elasticum, 1750.

Lettre à M. de Lagrange contenant des recherches sur la propagation des ébranlements dans un milieu élastique, 1750.

De figuræ curvæ elasticæ contra objectiones quasdam, 1779. En esta memoria contesta el autor á varias objeciones suscitadas por d'Alembert, contra la solución del problema de Galileo dada por Santiago Bernoulli.

Contribuyeron también al progreso de la ciencia que nos ocupa dos discípulos de Euler: Fuss, autor de una memoria intitulada *Varia problemata circa statum æquilibrii trabium compactilium oneratarum, earumque vires et pressionem contra anterides*; publicada en San Petersburgo en 1780, y Lexell, que publicó en 1781 sus *Meditationes de formula qua motus laminarum elasticarum in annulos circulares incurvatarum exprimitur*.

VII

Lagrange.—Este insigne matemático continuó los estudios sobre las columnas iniciados por Euler, completándolos y obteniendo nuevos resultados que hoy figuran en todos los textos y programas de enseñanza.

Es, pues, muy interesante su memoria *Sur la figure des colonnes*, que contiene estos desarrollos, y fué publicada en el tomo V de la colección de la Real Sociedad de Turín, correspondiente á los años 1770 á 1773.

«Hay la costumbre, dice Lagrange, de dar á las columnas la figura de un *conoide*, que tiene su mayor ancho hacia el tercio de su altura y va disminuyendo desde este punto hasta sus dos extremos; de donde resulta lo que se llama vulgarmente el ensanchamiento y la disminución de las columnas.»

La mayor parte de los autores aducían como argumento en favor de esta forma la general del cuerpo humano; pero Lagrange opina que la naturaleza ofrece un ejemplo más adecuado para derivar de él esta forma de las columnas. y es el tronco de un árbol.

Lagrange cita la memoria de Euler publicada en 1757, y justifica en estos términos su propósito de volver á estudiar el mismo asunto:

«Como el punto de vista desde el cual ha discutido este ilustre autor la misma materia es diferente del que nos proponemos adoptar, creemos agradar á los geómetras al darles á conocer las investigaciones que hemos llevado á cabo sobre una cuestión que interesa por igual á la mecánica y al análisis.»

Lagrange empieza por obtener, siguiendo el mismo procediminnto que Euler, la ecuación

$$y = f \operatorname{sen}\left(x\sqrt{\frac{P}{k}}\right),$$

en la cual f es una constante y k representa el momento de rigidez, que Euler designaba por Ek^2.

Siendo a la altura de la columna, tendremos

$$\text{para } x = a,\ y = o.$$

de donde se deduce

$$a\sqrt{\frac{P}{k}} = m\,\pi;$$

siendo m un número entero.

Despejando P, se obtiene

$$P = m^2\,\pi^2\,\frac{k}{a^2},$$

y sustituyendo en el valor de y,

$$y = f \operatorname{sen}\left(\frac{m\,\pi}{a}\,x\right).$$

Vemos que la constante f es el máximo de y.

Hace observar Pearson que el método de Lagrange es, en esta parte, superior al empleado por Euler.

Conviene citar íntegros los siguientes párrafos que contienen algunas consecuencias que no figuraban en la memoria de Euler:

«Si se hace $m = 1$, se tendrá

$$y = f \operatorname{sen}\left(\pi\,\frac{x}{a}\right)$$

y se ve (fig. 8) que la curva A, N, B, corta al eje solamente en

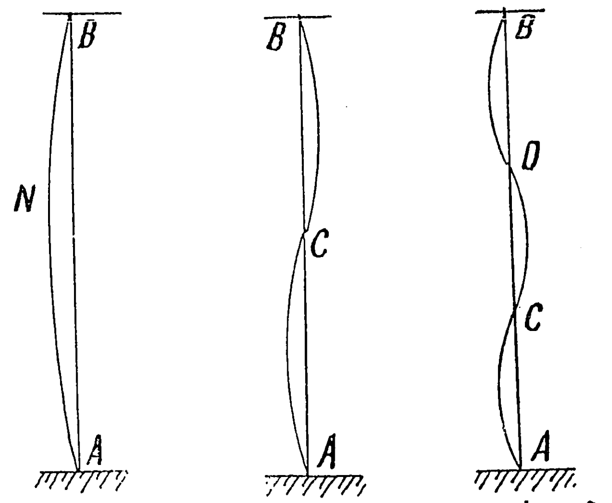

Fig. 8. *Fig. 9.* *Fig. 10.*

sus extremos A y B; el peso necesario para dar esta forma á la columna será

$$\pi^2\,\frac{k}{a^2}.$$

Si $m = 2$, tendremos

$$y = f \operatorname{sen}\left(2\,\pi\,\frac{x}{a}\right);$$

la curva cortará al eje en el punto en que

$$x = \frac{a}{2},$$

es decir, en el punto medio C, de suerte que la columna tomará la forma de la fig. 9; mas, para ello, será necesario un peso

$$P = 4\,\pi^2\,\frac{k}{a^2},$$

es decir, cuádruplo del precedente.

Si se hiciera $m = 3$, se tendría

$$y = f\left(\operatorname{sen} 3\,\pi\,\frac{x}{a}\right),$$

de modo que la curva cortaría al eje en los puntos correspondientes á

$$x = \frac{a}{3}, \quad x = \frac{2\,a}{3},$$

y sería tal como la representada en la fig. 10; para que la columna se encorve de este modo, será preciso que obre sobre ella un peso igual á

$$9\,\pi^2\,\frac{k}{a^2},$$

es decir, nueve veces mayor que en el primer caso, y así sucesivamente.»

Lagrange estudia á continuación el caso en que la fuerza P no es igual á ninguno de los valores que puede tomar la expresión

$$m^2\,\pi^2\,\frac{k}{a^2};$$

supone después que la columna es un sólido de revolución cualquiera, aplicando los resultados á varios casos particulares.

Para determinar la forma de la columna de máximo rendimiento, es decir, la capaz de resistir el mayor peso posible con una altura y un volumen determinados, el autor hace uso de la teoria de los máximos y mínimos relativos.

He aquí, en resumen, las principales consecuencias que deduce de este estudio:

Primer caso. La columna es de forma de cono recto. En este caso se obtiene la columna de máximo rendimiento cuando el cono degenera en cilindro.

Segundo caso. La columna tiene por generatriz una parábola. También se obtiene la columna de máximo rendimiento cuando la superficie de revolución se convierte en cilíndrica recta.

Tercer caso. Considérase la ecuación general de una cónica

$$z^2 = \alpha + Bx + \gamma x^2 .$$

El máximo rendimiento se obtiene cuando la cónica se convierte en una recta, es decir, que se recae en el caso primero.

Pasando luego al estudio del problema en toda su generatidad, Lagrange lo enuncia en estos términos:

«Se trata de hallar una ecuación entre las ordenadas z, y las abscisas x, tal que la cantidad $\frac{P}{S^2}$ sea lo mayor posible, siendo S la integral $\pi \int z^2\, dx$ tomada entre los límites $x = O$ y $x = a$, y P una constante que debe ser determinada con esta condición, á saber: que la integral $\int \frac{dx}{u}$ tomada de modo que se anule para $x = O$, adquiera el valor π para $x = a$, suponiendo que la cantidad u esté dada por la ecuación diferencial

$$4\, P\, u^2 + X \left[2\, u \frac{d^2 u}{d x^2} - \left(\frac{du}{dx}\right)^2 - 4 \right] = O .$$

en la cual X es una función dada de z, que hemos supuesto más arriba $= Kz^4$.»

Es importante esta parte de la memoria de Lagrange, por ser una de las primeras aplicaciones del cálculo de variaciones. La conclusión consiste en que un cilindro recto es *una* solución, pero no la única. Es la única solución, si se impone como condición que la curva pase por cuatro puntos equidistantes del eje, ó bien que las secciones extremas de la columna sean iguales, y que las tangentes á la generatriz en los extremos sean paralelas al eje.

Para terminar, estudia el caso práctico en que se admite una ligera variación respecto á la forma cilíndrica. Lagrange concluye que «la figura cilíndrica es la que da el *máximum maximorum* de la fuerza», es decir, del rendimiento.

(*Se continuará.*)

SANEAMIENTO DE POBLACIONES

(Continuación.)

Procedimientos industriales.

En éstos se trata generalmente por separado la materia sólida y la líquida, para sacar de esta última, que es la más rica, amoniaco y sulfato de aluminio, y de los residuos fosfato de cal y abonos artificiales, utilizando las materias sólidas, principalmente en la fabricación de *poudrette*.

Obligan todos á manipulaciones peligrosas ó incómodas con las materias de las alcantarillas, á recibirlas en grandes depósitos de decantación, de los que las célebres *voiries* de París son ejemplo, como peligro constante para la salud pública. Esto sucedió en París, donde, conforme dice Calin, estos establecimientos constituían alrededor de la ciudad una corona cuyas emanaciones eran llevadas por los vientos al centro, y cuyos procedimientos de fabricación destilando las deyecciones líquidas sin cuidarse de quemar los gases que quedaban en libertad y dejando secar las materias pastosas en grandes depósitos al aire libre, inficionaban la atmósfera del modo más peligroso.

Freycinet, en su obra *Emploi des eaux d'egout*, resume todos estos sistemas, diciendo:

«Que podrá quizá encontrarse alguna sustancia hasta hoy desconocida, que permita resolver el problema de un modo satisfactorio y que en este concepto queda, ancho campo para continuar los experimentos; pero que hay que reconocer que un conjunto de resultados tan grandes y todos negativos, constituye una poderosa prevención contra esta clase de procedimientos, y la prudencia aconseja no esperar el éxito allí donde tantas tentativas han resultado infructuosas.»

Otros procedimientos.

En Turín se ha propuesto un sistema de desinfección completa, que consiste en quemar las materias sólidas y vaporizar por una ebullición prolongada los líquidos, cuidando de quemar los gases que se producen en la anterior operación; pero no se ha llevado á la práctica por ser costoso, y además no aprovecha la gran riqueza que encierran las aguas de las alcantarillas.

Ultimamente se ha ideado, dice el Sr. Uhagón, un procedimiento por Mr. William Webster que aplica como ensayo en el desagüe del gran colector de la margen derecha de Londres en Crossness, que describe así:

Consiste en la electrolisis de las materias entre electrodos de hierro. Las reacciones químicas que ocurren no están aún bien estudiadias, observándose, sin embargo, que la clorina y el oxígeno van al electrodo positivo, probablemente formando ácido hipocloroso, cuyo enorme poder desinfectante oxida rápidamente la materia orgánica.

El hierro de los electrodos se disuelve formando hipocloritos que, combinándose con las materias en suspensión, las coagula en forma de copos, y que arrastrados por las burbujas de hidrógeno, aparecen en la superficie, dejando abajo un líquido completamente clarificado.

En las obras establecidas por Mr. Webster para tratar el alcantarillado en Crossness, las aguas de éste, tal como vienen del colector, son elevadas á un estanque desde el cual corren por una canal inclinada hasta un gran depósito de sedimentación. En este canal hay colocadas placas de hierro paralelas entre sí y á los costados del canal. El agua sucia corre por entre las placas en filetes de unos 3 centímetros de ancho y de una altura igual á la profundidad del canal.

Las placas de hierro arregladas por grupos son alternativamente positivas y negativas, y tienen 2,5 volts de diferencia potencial.

La dínamo suministra una corriente de 20 volts, estando seis grupos de placas arreglados en serie.

El tiempo que el agua sucia emplea en recorrer la canal varía desde dos á diez minutos, según el grado de polución que presente.

Desde la canal el agua vierte al depósito de decartación, donde se clarifica siguiéndose luego los procedimientos ordinarios para extraer los productos químicos que contiene.

Este sistema, empezado á ensayar desde 1889, no está aún bastante estudiado, ni desde el punto de visto higiénico, ni desde el económico, para poder formar juicio exacto acerca de él: creemos, sin embargo, que lo que se consigue únicamente es clarificar el agua precipitando las materias minerales y orgánicas en suspensión, y esto lo confirma el siguiente estado, término medio