Año XLVII. Madrid 5 de Julio de 1900. Núm. 1293

REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS

FUNDADA Y SOSTENIDA POR EL CUERPO NACIONAL DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

Redactor-Presidente.... Excmo. é Ilmo. Sr. D. Leonardo de Tejada, Inspector general del Cuerpo
Redactores................ Los Sres. Presidentes de las Comisiones regionales de Ingenieros.
D. Antonio Sonier, Profesor de la Escuela de Caminos.
D. Manuel Maluquer, Ingeniero del mismo Cuerpo, *Secretario*.
Colaboradores.............. Todos los Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.

SE PUBLICA LOS JUEVES **Redacción y Administración: Puerta del Sol, 9 pral.**

ENSEÑANZA UNIVERSITARIA

El Sr. D. Luis Octavio de Toledo, dignísimo catedrático de primer curso de Análisis matemático de la Universidad Central, se ha sentido molestado por las apreciaciones que hice en mi artículo *El ingreso en la Escuela de Caminos* acerca del carácter de la enseñanza de las matemáticas en las Facultades de ciencias de nuestras Universidades, y muy especialmente por la crítica que, según dice, he hecho de su programa.

No fué mi ánimo hacer semejante crítica, ni pensé al escribir mi artículo, más que en demostrar, sin ofender á nadie, que son esencialmente distintos los estudios de matemáticas que se exigen en nuestras Escuelas especiales de Ingenieros y los que comprenden los programas de las Facultades de ciencias, por lo que nunca pude esperar que mis juicios mesurados, pudieran merecer del Sr. Octavio de Toledo una réplica de tonos tan vivos; y como siempre que se pierde la calma, se nubla la razón, eso le ha ocurrido al claro talento del catedrático de la Universidad Central, obligándome á rectificar los errores en que, involuntariamente, ha incurrido.

Empiezo por insistir en mi afirmación de que los alumnos de las facultades aprueban con *relativa* facilidad las asignaturas, lo cual es una verdad que se puede demostrar matemáticamente con los datos mismos que me ha proporcionado el Sr. Octavio de Toledo. La idea de *relación* envuelve la de comparación, y al hablar de facilidad *relativa* en la aprobación de asignaturas en la Universidad, claro es que era comparada con la que existe en las Escuelas de Ingenieros, y muy especialmente en la de Caminos, por ser sus enseñanzas las que en mi artículo se ponían en parangón. Ya dije en él que este año, de 60 alumnos examinados en la Escuela de Caminos en el grupo de Aritmética y Algebra, habían salido bien 9, y según nos dice el Sr. Octavio de Toledo, en la asignatura de primer curso de Análisis matemático, que comprende, además de las dos citadas asignaturas, la de Trigonometría, han aprobado 22 alumnos, siendo 93 el total de matriculados; por consiguiente, el *coeficiente de rigor*, ó sea la relación entre el número de suspensos y el número total de alumnos es de $\frac{51}{60} = 0{,}85$ para la Escuela de Caminos, y de $\frac{71}{93} = 0{,}76$ para la Universidad, con lo que queda demostrada mi proposición; mas dada la severidad que exigen en sus demostraciones los matemáticos, cualquiera de éstos que me lea, dirá que, en buena lógica, los resultados obtenidos no son en manera alguna comparables. Aun así, el coeficiente de rigor obtenido para la Escuela de Caminos, es muy superior al de la Universidad; pero lo sería incomparablemente más, deduciendo los coeficientes en condiciones homogéneas, es decir, tomando, no el número de alumnos *matriculados* en la Universidad, sino el de examinados real y efectivamente, como se he hecho para la Escuela de Caminos. En estas condiciones el coeficiente de rigor para la Escuela, sigue siendo 0,85, y en cambio para la Universidad, según los datos que me ha proporcionado un alumno de la misma, es de $\frac{14}{36} = 0{,}39$; puesto que de los 93 matriculados, sólo se han examinado 36, y de ellos fueron suspendidos 14.

Consignados estos resultados, ¿hay injuria en sostener, como con pasión sobrada ha escrito el Sr. Octavio de Toledo, que en nuestras Facultades de ciencias se aprueba con *relativa* facilidad?

Tampoco estoy conforme con la afirmación de que en nuestras Universidades se atiende muy preferentemente á la parte puramente práctica de las asignaturas; porque los profesores no tienen tiempo material de dedicarse en clase á estos ejercicios, y los que más se preocupan de ellos, entre los que se encuentra en primer término el Sr. Octavio de Toledo, se limitan á dictar al final de la clase un ejercicio, y dar de él la solución al empezar la del siguiente día. Esto, unido á las muchas teorías que se exigen inútiles para los Ingenieros, hace que sea tan perjudicial la preparación universitaria para las profesiones, que necesitan muchos conocimientos prácticos.

En prueba de ello, voy á recordar algunos hechos que ocurrieron al crearse la Escuela general preparatoria de Ingenieros y Arquitectos. Entre los vicios de origen de este centro docente, fué uno de ellos el admitir en su creación, además de los aprobados en todas las Escuelas especiales de Ingenieros y Arquitectos, los de las Universidades, desde Aritmética hasta Geometría analítica inclusive, y los primeros años corrían de boca en boca como chistes, los graciosos despropósitos de algunos alumnos procedentes de las Universidades. Hubo uno, que al decirle el profesor: quite usted denominadores, los borró con la bayeta; otro, que la representación general de una función f (x y z) la dividió por f; y, finalmente, en clase de cálculo, un alumno procedente de Universidad, aprobado, por consiguiente, en Geometría analítica, al ordenarle el profesor que dibujase en el encerado un arco de parábola, después de trazar un arco de cualquier cosa, se volvió para preguntarle: ¿la cierro? Mas para ver esta falta de práctica en los problemas elementales, no hay necesidad de descender á los alumnos, elevémonos á los mismos doctores en ciencias, que no podrán negar el siguiente hecho, que lo sé por referencia de un catedrático de los más conspicuos de la Universidad de Madrid. Entre los muchos ejercicios de Geometría elemental, hay uno notable por ser de los resueltos por Arquímedes, que consiste en hallar la relación del área y el volumen del cilindro y cono equilátero circunscritos á una esfera, con el área y el volumen de la esfera. La figura correspondiente á este problema, se grabó en la tumba del célebre matemático, sirviendo luego á Cicerón para descubrirla. Se celebraban el año actual oposiciones á una cátedra de Instituto en Madrid, y á uno de los opositores, doctor en Ciencias que goza fama, según dicen, merecida de matemático, le tocó resolver ese ejercicio, y contó al tribunal con gran lujo de detalles la parte histórica del asunto; pero ni Arquímedes ni Cicerón le inspiraron, y la relación de áreas y volúmenes no aparecía por ninguna parte, con lo que perdió la cátedra, que antes de las oposiciones nadie ponía en duda que sería para él. Por casualidad, este mismo año, entre los ejercicios prácticos propuestos en los exámenes de Geometría elemental de la Escuela de Caminos, ha figurado el mismo problema, y casi todos los alumnos lo han resuelto bien.

Con la narración de estos hechos, no pretendo molestar á los Doctores en ciencias matemáticas; porque ellos van por un camino y los Ingenieros por otro. En éste, como decía muy bien el señor Inchaurrandieta, hay virtualmente una declaración grabada que dice: que no pasa por él, quien no domine los problemas elementales sin preocupación ni fatiga; y en el de los doctores en ciencia: que no podrá seguirlo el que no tenga por lo menos noticia de la existencia de todas las teorías matemáticas. Por eso los programas de éstos, tienen mucha más extensión que los de aquéllos; pero lo que ganan en extensión, lo pierden en profundidad, por ley ineludible. Los Ingenieros deben estudiar los conocimientos matemáticos que les sean necesarios para aplicarlos en su profesión; los que si no son muchos, en cambio han querido con excelente criterio, que se sepan muy bien.

Para hacer resaltar esas diferencias, me fijé en el programa del Sr. Octavio de Toledo, del que no pensé hacer una crítica; aunque tal vez, contra mi voluntad, resultara ésta, al decir, que en un curso que se da á continuación del bachillerato, no se debe iniciar á los alumnos en teorías que no pueden entender. ¿Cómo se arregla, por ejemplo, el Sr. Octavio de Toledo, para explicar á sus alumnos las teorías de Cantor sobre *conjuntos* y *clases*? Si se limita á dar cuatro definiciones, que se las aprenden de memoria, nada consigue; pues hay como esta ciertas cuestiones matemáticas, que para que la inteligencia las asimile, es menester prepararla con estudios muy variados y profundos, porque suelen ser como el resumen de todos ellos, y aunque vengan á completar ideas tan primordiales como son en dicha ciencia las definiciones de los números, no pueden entenderse la primera vez que se estudia la Aritmética. Bien están esas teorías en la introducción del admirable curso de cálculo de Jordán, y en la menos notable Algebra superior de Weber; pero no en un programa de primer curso de Análisis matemático, con la preparación de los Institutos.

Respecto al símbolo n ♀, veo que el Sr. Octavio de Toledo se limita también á dar algunas definiciones, cuya utilidad me parece dudosa; pero al pedir su *explicación detallada*, nada de extraño tiene que yo creyese que se trataba de dar idea de las reglas de cálculo, de las cantidades equipolentes de M. Bellavitis y de la teoría de los cuaternios de Hamilton, que no es más que una extensión al espacio de las concepciones de M. Bellavitis, investigaciones todas muy propias de las Facultades de ciencias, aunque no en el sitio en que están incluídas.

Para terminar, diré al Sr. Octavio de Toledo, que el método de Horner para la resolución de ecuaciones numéricas se exige en la Escuela de Caminos, en los exámenes de Algebra superior, aunque con apellido latino; y en cuanto á la teoría de figuras recíprocas, pongo á su disposición los apuntes del Sr. Portuondo, profesor de Mecánica racional, donde la verá expuesta, y sobre ella se vuelve á insistir en los cursos de Resistencia de materiales y de Puentes; le diré también, que sabrá que en la Aritmética de Salinas y Benítez, se estudian algunas generalidades de la teoría de congruencias; pero no todo ni mucho menos de lo que se pide en el programa de primer curso de Análisis matemático de la Universidad de Madrid, que las notas de la Aritmética de Serret sobre teoría de números son incompletas, pues, por ejemplo, en el teorema de Wilson generalizado, tiene que cortarse la demostración y dejarla aplazada para el Algebra superior.

Yo no censuro que estas teorías las estudien los Doctores en ciencias, sino al contrario, lo que he sostenido es que su principal misión es cultivarlas, no asomándose al edificio, sino penetrando en sus más escondidos rincones, para contribuir al progreso de la ciencia pura; pero lo que sí me parece mal, es que se pretenda que los Ingenieros les sigan en tan sublimes investigaciones, cuando les falta tiempo para dedicarse á otros estudios más interesantes dentro de su profesión.

Esta ha sido la tesis de mi anterior artículo, que gracias á la intervención del Sr. Octavio de Toledo, me ha proporcionado además del honor de discutir con él, el medio de reforzar los argumentos en esta réplica, que no tenía pensamiento de escribir.

VICENTE MACHIMBARRENA.

FUNCIONES ELÍPTICAS [1]

VI

Teorema de Abel.

El problema resuelto en el capítulo anterior, no es sino un caso particular que resulta de la aplicación, al caso de la suma de dos funciones elípticas, de la fórmula general que vamos á determinar y que se conoce con el nombre de teorema de Abel.

El teorema de Abel se aplica no sólo á las funciones elípticas, sino también á las hiper elípticas; en general, á un número cualquiera de funciones abelianas. Resuelve de un modo general el problema planteado en el capítulo anterior, y resuelto en él, en un caso particular. Dicho problema se expuso, en términos generales, diciendo: *Dada una transcendente, hallar trozos de esta transcendente, cuya relación pueda expresarse por transcendentes más sencillas.*

Expondremos el teorema de Abel, que resuelve este problema, sirviéndonos de una interpretación geométrica ideada por Clebsch y que da una forma muy elegante al teorema; pero antes debemos recordar otro teorema de Algebra que es tema indispensable para la demostración del que nos ocupa.

*
* *

Sea la fracción $\frac{\theta(x)}{\psi(x)}$ en la cual los dos términos son polinomios algebráicos, y el grado de $\theta(x)$ es inferior en más de dos unidades al grado de $\psi(x)$; supongamos, además, que $\psi(x)$ sólo tiene raíces desiguales. Descompongamos la fracciónn $\frac{\theta(x)}{\psi(x)}$ en fracciones sencillas

$$\frac{\theta(x)}{\psi(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \frac{A_3}{x - x_3} + \dots + \frac{A_m}{x - x_m}, \qquad (1)$$

quitando denominadores y ordenando con relación á x,

$$\theta(x) = x^{m-1}(A_1 + A_2 + \text{---} + A_m) + \dots$$

lo cual nos indica que

$$A_1 + A_2 + \text{---} + A_m = 0 \qquad (2).$$

Ahora bien, de la (1) se deduce

$$\theta(x)\frac{x - x_1}{\psi(x)} = A_1 + (x - x_1)\left[\frac{A_2}{x - x_2} + \dots\dots + \frac{A_m}{x - x_m}\right]$$

y haciendo $x = x_1$, queda

$$A_1 = \frac{\theta(x_1)}{\psi'(x_1)},$$

luego la condición (2) está representada por

$$\frac{\theta(x_1)}{\psi'(x_1)} + \frac{\theta(x_2)}{\psi'(x_2)} + \dots\dots + \frac{\theta(x_m)}{\psi'(x_m)} = 0 \qquad (3).$$

Pasemos á la demostración del teorema de Abel.

Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y^2 = (1 - x^2)(1 - K^2 x^2) = \Delta^2 x & (4) \\ f(x, y) = 0 & (5) \end{cases}$$

(1) Véase el núm. 1285.