Año XLVIII. Madrid 6 de Junio de 1901 Núm. 1341

REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS

FUNDADA Y SOSTENIDA POR EL CUERPO NACIONAL DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

Redactor-Presidente.... Excmo. Sr. D. Eduardo López Navarro, Inspector general del Cuerpo
Redactores............... Los Sres. Presidentes de las Comisiones regionales de Ingenieros.
D. Antonio Sonier, Profesor de la Escuela de Caminos.
D. Manuel Maluquer, Ingeniero del mismo Cuerpo, *Secretario.*
Colaboradores............. Todos los Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.

SE PUBLICA LOS JUEVES **Redacción y Administración: Puerta del Sol, 9, pral.**

MÁQUINAS ALGÉBRICAS

POR

DON LEONARDO DE TORRES Y QUEVEDO

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos (1).

(CONCLUSIÓN)

A cada variable real corresponderá en la máquina un móvil, guiado de manera que cada uno de sus puntos se mueva siempre sobre una línea determinada, trayectoria del punto.

Esta clase de movimientos son precisamente los más usuales en toda clase de máquinas: en las de vapor, por ejemplo, todos los puntos del émbolo describen constantemente, en su movimiento de vaivén, trayectorias rectilíneas, mientras los puntos del volante describen trayectorias circulares. Y adviértase que ninguna influencia tiene en la determinación de estas trayectorias la conexión establecida entre ambos móviles por medio de la transmisión de biela y manivela: si estos órganos desaparecieran, serían los dos movimientos independientes uno de otro, pero el émbolo sólo podría marchar en línea recta, deslizándose á lo largo del cuerpo de bomba, y el volante sólo podría girar alrededor de su árbol. Pues lo mismo ha de suceder con la máquina algébrica que vamos imaginando: cada uno de los móviles, destinados á representar las variables, estará ligado á los cuerpos fijos por conexiones que le obliguen á marchar siempre según una trayectoria determinada. Una escala en correspondencia con cada uno de estos móviles permitirá apreciar por una simple lectura el valor de su desplazamiento, y entre la escala y el móvil constituirán un aparato propio para representar una cantidad real cualquiera, positiva ó negativa.

Estos aparatos—que por indicación de D. Eduardo Saavedra he designado con el nombre de *aritmóforos*,—pueden ofrecer muy variadas disposiciones, que no es del caso examinar aquí; bastará á mi propósito indicar, en forma esquemática, la manera de realizar mecánicamente, en la representación de variables, los procedimientos usuales de la Geometría. Un botón, sujeto por un movimiento de corredera á moverse á lo largo de una ranura rectilínea, será el equivalente mecánico de un punto que se mueve á lo largo de una recta. Marcaremos al lado de la ranura un punto fijo, que será el cero; trazaremos, á partir de él, la escala de las cantidades positivas en un sentido, y la de las negativas en sentido contrario; y podremos representar una cantidad real cualquiera corriendo el botón á lo largo de la escala, hasta colocarlo frente á la división que corresponda á esta cantidad.

También una cantidad imaginaria puede representarse por medio de un móvil, guiándole de manera que cada uno de sus puntos haya de moverse siempre sobre una superficie determinada. Imaginemos, para seguir copiando el procedimiento geométrico, un plano material; una regla sujeta á él por medio de un eje, alrededor del cual gira moviéndose siempre sobre el plano; en esta regla una ranura rectilínea, y en la ranura un botón que corre á lo largo de ella; tracemos al lado de la ranura una escala cuyo cero coincidirá con el eje de giro, y en el plano un círculo graduado; y ya tenemos un aparato que permite representar cualquier cantidad imaginaria: su *módulo* estará dado por la posición del botón sobre la escala, y su *argumento* por la posición de la regla sobre el círculo graduado.

En suma: un aritmóforo se compone de un móvil, cuyo desplazamiento representa la variable, y de una ó dos escalas—según que se trate de cantidades reales ó imaginarias—para medir este desplazamiento.

Decir que hacemos variar una cantidad, ó que le damos un valor determinado, valdrá tanto como decir que hacemos marchar el móvil correspondiente ó que le fijamos en una posición determinada.

Tenemos ya la armazón, la parte inmóvil de la máquina; tenemos también varios aritmóforos correspondientes á otras tantas variables; pero como los móviles de estos aritmóforos son aún todos independientes unos de otros, sin ninguna relación necesaria entre sus posiciones simultáneas, no existe aún ninguna dependencia entre las variables representadas.

Establezcamos ahora conexiones entre estos móviles por medio de mecanismos que impongan cierta solidaridad entre ellos.

Habrán de verificarse entonces sus movimientos con arreglo á ciertas leyes, y éstas se formularán en un sistema de *ecuaciones de condición*, relativas á los desplazamientos de los móviles; es decir, á las variables representadas en los aritmóforos. Diremos propiamente que las *ecuaciones de condición quedan construídas en la máquina*, y el problema consiste en averiguar si pueden construirse, cualesquiera que ellas sean.

IV

Empezando por el caso más sencillo, ¿podremos construir una función explícita cualquiera? ¿Podremos hacer que un movimiento dependa de otros varios, según ciertas leyes indicadas explícitamente en una fórmula analítica?

Teóricamente sí. No es posible, ni hace falta tampoco, demostrarlo aquí con todo rigor; pero es fácil señalar el camino que en tal construcción ha de seguirse.

El problema parece de gran complicación por la infinita variedad de funciones que en las fórmulas figuran; pero en los cálculos numéricos sólo es preciso ejecutar unas cuantas operaciones, siempre las mismas, combinándolas de diferentes maneras y repitiéndolas cuantas veces sea necesario: basta conocer las cuatro reglas y manejar un corto número de tablas para calcular una función explícita, por complicada que sea. No se obtiene su valor directamente por una sola operación de cálculo, sino que se ejecutan una por una todas las operaciones indicadas en

(1) Véase el núm. 1339 correspondiente al 23 de Mayo.

la fórmula. De los datos se deducen directamente ciertos valores, que á su vez sirven de argumentos para calcular otros nuevos, y así se continúa hasta llegar al valor final. En cada una de estas operaciones elementales se determina una cierta cantidad, en función de otra ó de otras dos conocidas de antemano.

Algo parecido puede observarse en cualquier máquina industrial. La herramienta no está directamente montada sobre el émbolo del motor, sino ligada á él por una cadena más ó menos larga de mecanismos que se transmiten el movimiento de unos á otros. Y lo mismo diremos, con mayor razón aún, de las máquinas algébricas: los móviles que representan variables independientes arrastrarán á los que están directamente enlazados con ellos, éstos á otros, y así sucesivamente hasta llegar al desplazamiento final. El sistema puede considerarse descompuesto en un cierto número de combinaciones elementales de mecanismos, y la operación mecánica, ejecutada por medio de una de estas combinaciones, consiste siempre en determinar el desplazamiento de un móvil en función de los desplazamientos de otro, ó de otros dos, cuya posición está ya determinada.

La analogía es patente, aunque la prioridad de unas operaciones con relación á otras, que existe realmente en los cálculos numéricos, es de un orden puramente lógico en los mecánicos: como que sólo responde á la idea de que hay ciertos movimientos que son causa de que se produzcan otros; pero, en realidad, todos se verifican al mismo tiempo,

Se reduce, pues, la dificultad á construir un número limitado de aparatos elementales: uno por cada una de las operaciones que se ejecutan en los cálculos numéricos: y, según en otras ocasiones he demostrado, esta construcción es posible (1). Repitiéndola cuantas veces sea preciso, y combinando luego los aparatos elementales con arreglo á las indicaciones de la fórmula que exprese el valor de una función, quedará ésta construída.

La concordancia entre la fórmula y la máquina será en pura teoría perfecta. Dispondremos con entera libertad de las variables independientes; cada uno de sus aritmóforos podría correr á cargo de un experimentador distinto, quien le haría marchar á su antojo, sin ocuparse de los demás para nada; pondríase así en movimiento la máquina toda; y el valor señalado por el aritmóforo de la función variaría con todos los demás y sería en cada caso el que á ésta correspondiera, dados los valores simultáneos de las variables independientes.

V

El cálculo de funciones implícitas, ó, dicho de otro modo, la resolución de ecuaciones—problema erizado de dificultades, que sólo en algunos casos muy sencillos puede vencer el Algebra,—no se plantea en la teoría de las máquinas algébricas.

Una ecuación expresa una cierta relación entre las variables, y resolverla es expresar esta misma relación en forma distinta para que la incógnita aparezca como función explícita de los datos; y esto es precisamente lo que no sabemos hacer. La máquina no expresa la relación, la construye; hace que exista realmente la condición impuesta; y, mientras los enlaces mecánicos que la establecen subsistan, ella se manifestará siempre en la forma necesaria y se impondrá á los movimientos de la máquina, cualesquiera que sean las circunstancias en que se verifiquen.

Supónese en este razonamiento que las transmisiones son todas reversibles; y así ha de suceder necesariamente en las máquinas ideales que ahora consideramos, no sujetas á rozamientos ni á resistencias pasivas de ninguna clase.

Sólo cuando la relación de velocidades entre dos móviles se haga infinita ó determinada, podrán presentarse puntos muertos; y éstos son casos excepcionales, que han de tratarse separadamente, como los puntos singulares de las curvas y los valores críticos de las funciones.

Aplicando este razonamiento á un caso particular, supongamos construída la función z:

$$z = f(a, b, c, \dots x).$$

Si disponemos de los aritmóforos a, b, c, ... x, haciendo variar arbitrariamente las cantidades en ellos representadas, los enlaces mecánicos obligarán á marchar al aritmóforo z en tal forma que la ecuación quede siempre satisfecha. Esta es la hipótesis. Pues la misma máquina sirve, como diré ahora, para calcular una variable cualquiera, x por ejemplo, en función de todas las otras variables a, b, c,... y de la función z.

Sean a_1, b_1, c_1,...z_1 los valores particulares de las cantidades conocidas; representemos en el aritmóforo de cada una de las variables a b, c el valor de ésta, y fijémosle en esa posición mientras dure el cálculo. Haciendo marchar ahora el aritmóforo x, el aritmóforo z marchará también, y, cada vez que leamos en este último el valor z_1, leeremos en el primero el valor correspondiente de la variable x.

Pero este método indirecto, y en cierto modo de tanteo, no es el único aplicable. Si imaginamos que varían de un modo continuo todas las cantidades conocidas, a, b, c... z, en cada momento corresponderá á los valores simultáneos de todas ellas un cierto valor de la incognita x, implícitamente determinado por la fórmula construída. Esta variación de todas las cantidades—datos é incógnita,—y cualquiera otra compatible con la fórmula, puede obtenerse en el aparato haciendo variar según sea necesario todas las variables independientes a, b, c... x, y dejando que la máquina determine el valor de la función z. ¿Podrá obtenerse también haciendo variar la función y todas las variables conocidas, y dejando que la máquina determine el valor de la incógnita x? Indudablemente sí; porque el movimiento que consideramos es el único compatible con los enlaces del sistema, y se producirá necesariamente—si las transmisiones son reversibles,—cualesquiera que sean los móviles á que se apliquen las fuerzas destinadas á provocarlo.

En resumen, hemos construído una ecuación entre la función y las variables, de quienes depende. No es preciso establecer diferencia ninguna entre aquélla y éstas; podemos considerar como incógnita la primera, ó una cualquiera de las últimas; y bastará, para calcular mecánicamente, dar en la máquina á todas las otras variables los valores particulares que queramos atribuirlas.

Los mismos razonamientos se aplican á un sistema de ecuaciones simultáneas. Cada una de ellas exigirá que se establezcan ciertos enlaces entre los móviles que representan las variables; y, estableciendo á la vez todos los enlaces correspondientes á todas las ecuaciones, quedarán éstas construídas.

No repetiré las consideraciones que acabo de exponer al tratar de una sola ecuación; pero bien veis que, cuando éstas son varias, podremos tomar como incógnitas las variables que convenga (en número igual al de ecuaciones construídas), y calcularlas mecánicamente, con sólo dar en la máquina á todas las otras los valores particulares que les correspondan.

VI

Las ecuaciones diferenciales se construyen también sin dificultad, utilizando para ello los mecanismos empleados en la construcción de los planímetros ó integradores.

Imaginemos dos rectas que se corten perpendicularmente y sirvan de ejes, la una á un disco, y la otra á una rodaja tangente á él: el disco está sujeto á girar alrededor de su eje, y no admite ningún otro movimiento; mientras que la rodaja puede girar alrededor de su eje y resbalar á lo largo del mismo, acercándose ó alejándose del punto de intersección de las dos rectas. Resbalará, al producirse este último movimiento, sobre el disco, mar-

(1) *Memoria sobre las máquinas algébricas*, por Leonardo Torres. Bilbao 1895.

Machines á calculer, par M. L. Torres. Memoires presentés par divers savants á l'Académie des Sciencies de l'Institut de France, tome XXXII. Paris, 1901.

chando en dirección radial: suponemos el resbalamiento posible en esta dirección é imposible en cualquiera otra, de modo que los dos mecanismos son perfectamente solidarios en sus movimientos de giro. Tal es la hipótesis, realizable con absoluta exactitud en teoría; y no tenemos que pensar ahora en los medios de llevarla con más ó menos perfección á la práctica.

Tres desplazamientos han de considerarse en este aparato. El ángulo descrito por el disco, el ángulo descrito por la rodaja, y la distancia de la rodaja al centro del disco.

No son tres variables de la misma índole: si uno de los dos mecanismos gira, girará también el otro al mismo tiempo, sin ocasionar movimiento ninguno de traslación. Los dos movimientos angulares dependen directamente uno de otro; el de traslación ni depende de ellos ni puede producirlos tampoco: redúcese su efecto á definir la dependencia que entre los otros dos movimientos existe; y la velocidad angular de la rodaja con relación al disco será en cada momento proporcional á su distancia al centro. Tenemos, pues, representadas:

La variable independiente, x, por el desplazamiento angular del disco.

La función, y, por el desplazamiento angular de la rodaja.

Y la derivada, y', ó sea la relación de velocidades entre el móvil que representa la función y el móvil que representa la variable por el desplazamiento de la rodaja sobre su árbol, es decir, por la distancia de la rodaja al centro del disco.

Para construir una ecuación diferencial de primer orden, $f(x, y, y') = 0$, bastará imponerla por medio de nuevos enlaces mecánicos entre estos tres desplazamientos.

Impongámosla, y—partiendo de una posición elegida arbitrariamente—hagamos girar el disco: la rodaja, arrastrada por él, girará también; pero, al girar el disco y la rodaja, esta última, empujada por los enlaces establecidos al construir la ecuación $f(x, y, y') = 0$, marchará sobre su árbol, determinando automáticamente, en cada momento, la derivada y', ó sea la relación de velocidades en función de los valores x é y.

El movimiento resulta perfectamente determinado, y lo mismo sucedería si dispusiéramos arbitrariamente del movimiento de rotación de la rodaja, dejándola, por supuesto, en libertad de correr sobre su árbol, según lo exigiera la acción de los mecanismos.

Tenemos, pues, construída la ecuación de una cierta curva $\varphi(x, y') = 0$; pero los enlaces mecánicos ya definidos no bastan por sí solos para determinarla. Al componer una máquina de calcular, se pueden colocar todos los mecanismos en una posición cualquiera, que sea compatible con las ecuaciones de condición; aquí sólo existe una de éstas, y podremos elegir arbitrariamente los valores de x ó y, á condición de dar á y' el que, según la ecuación

$$f(x, y, y') = 0,$$

le corresponda.

Al elegir los valores iniciales (x_1, y_1) se elige un punto de la curva; y claro es que, en general, si el punto cambia, la curva cambiará también.

El aparato que estamos considerando sirve—ya lo estáis viendo—para construir una integral particular cualquiera de la ecuación propuesta.

La integral general no puede construirse. Aun cuando ella y la ecuación diferencial de que procede sirvan para determinar una misma familia de curvas, no expresan ambas las mismas relaciones ni se refieren á las mismas cantidades; porque, al integrar, se introduce una nueva, llamada constante de integración; y esto de deducir de ciertas relaciones entre determinadas variables otras relaciones diferentes entre variables también distintas, no es operación que pueda encomendarse á la acción automática de los mecanismos.

No podremos, según esto, hallar la integral general de ninguna ecuación; pero—conociendo los valores particulares necesarios—podremos construir las integrales particulares relativas á cada caso. Y esto, cualesquiera que sean la clase y número de ecuaciones diferenciales. Cada una de las derivadas que figuren en ellas se construirá separadamente, por medio de una combinación de disco y rodaja, ó de otra análoga; y luego se establecerán entre los desplazamientos que correspondan á las variables principales y á las derivadas los enlaces necesarios para construir todas las ecuaciones del sistema.

VII

Hasta ahora sólo he hablado de la manera de construir una raíz ó un sistema de raíces; pero una ecuación ó un sistema de ecuaciones admiten, en general, más de una solución, y aun con mucha frecuencia un número de soluciones infinito.

Pues todas ellas, ó por lo menos varias de entre ellas, cuando son infinitas, pueden obtenerse cinemáticamente en cada caso.

Consideremos primero uno muy sencillo, para concretar bien las ideas.

Representemos dos cantidades imaginarias: z y ω, cada una en un aritmóforo, compuesto—como decía al principio—de una regla que gira sobre un plano, y un botón que corre á lo largo de la regla. Enlacemos mecánicamente los dos botones, imponiendo una ecuación entre los valores simultáneos de sus desplazamientos, ó, en otros términos, haciendo que las dos cantidades representadas dependan una de otra; y especifiquemos esta dependencia, suponiendo que, á causa de la condición mecánicamente impuesta, ω ha de ser igual á la raíz cuadrada de z.

Este supuesto se traduce en dos condiciones distintas: la una—relativa á los argumentos—exige que el desplazamiento angular de la regla, correspondiente á la función ω, sea la mitad del desplazamiento angular de la regla correspondiente á la variable z; la otra—relativa á los módulos—pide que la distancia del botón al origen ó *cero* sea, en el aritmóforo ω, igual á la raíz cuadrada de la distancia homóloga en el aritmóforo z.

Las relaciones mecánicas así definidas pueden imponerse de muchas maneras distintas, pero no nos importa ahora estudiarlas con minuciosidad; basta á mi objeto suponerlas realmente impuestas.

Consideremos el aparato ya construído en una posición dada, y hagamos marchar el aritmóforo z de tal manera, que el botón recorra una curva cerrada y vuelta al punto de su partida. ¿Cuál será la posición final del otro aritmóforo? La distancia del botón al centro será la misma que al principio: la raíz cuadrada de su homóloga en el aritmóforo z, y esta última no ha variado.

Del argumento de la función no puede decirse otro tanto: el de la variable vuelve, es cierto, al mismo valor; pero esto puede ocurrir de dos maneras distintas: girando la regla primero en un sentido, y después en sentido contrario, hasta volver á la posición primitiva, ó girando siempre en la misma dirección, hasta describir la circunferencia completa.

En el primer caso, la regla del aritmóforo ω reproducirá, en escala mitad, el movimiento alternativo, marchando primero en un sentido, y luego en el contrario, para volver al punto de partida, con lo cual volveremos á representar el mismo valor particular que tenía la función ω en la posición inicial del aparato. En el segundo, mientras la regla del aritmóforo z describe una circunferencia entera, la regla del aritmóforo ω describirá un arco de 18 °, y el botón correspondiente se encontrará á la misma distancia del origen que al iniciarse el movimiento, pero en dirección diametralmente opuesta.

Tendremos representada ahora la otra determinación de la raíz de z.

Basta reflexionar un momento para comprender que en el primer caso, cuando la regla oscila y vuelve á su posición inicial, el cero del aritmóforo z queda necesariamente fuera de la curva cerrada descripta por el botón; mientras que el segundo, cuando la regla gira 360°, el cero queda dentro de la curva.

¿Y si quisiéramos hacer que la curva pasara por el cero mismo? El movimiento sería imposible, porque la derivada de la función, con relación á la variable, ó sea la relación de velocidades entre los dos móviles correspondientes, sería infinita al pasar la variable por cero.

Si los mecanismos ideales de nuestra máquina los imagináramos dotados de masa, como los cuerpos de la Naturaleza, es decir, si impusiéramos mecánicamente la ley de continuidad, consecuencia necesaria de la de inercia, que impide toda variación brusca de las condiciones del movimiento, entonces, digo, pasaríamos sin dificultad por el cero del aritmóforo, lo mismo que podríamos—admitiendo la existencia de semejante ley—determinar analíticamente la marcha de la función cuando pasa por cero la variable.

Pero el movimiento no puede ser determinado por la acción y efecto de los enlaces puramente cinemáticos. El punto crítico de la función estará fielmente representado por un punto muerto en la máquina.

El aparato servirá, según acabamos de ver, para obtener las dos determinaciones, representándolas alternativamente, ya la una ó ya la otra, á medida que la variable gira alrededor del punto crítico.

Añadamos ahora un nuevo aritmóforo ω y enlacémosle con el de la variable—repitiendo las construcciones mecánicas ya ejecutadas,—de manera que la cantidad en él representada sea también constantemente igual á la raíz de la variable independiente. Tendremos así la variable en un solo aritmóforo, y la función en dos diferentes, y en cada uno de éstos representaremos—al componer la máquina—una raíz distinta de las dos correspondientes al valor particular que atribuyamos á la variable. En virtud de las consideraciones expuestas hace un momento, las dos raíces simultáneamente representadas ahora en el aparato se permutarán cada vez que la variable dé una vuelta alrededor del punto crítico.

Una máquina que construí hace algún tiempo da las dos raíces de un polinomio de segundo grado, y en ella pueden observarse, aunque con alguna imperfección, debida á deficiencias de orden práctico, la permutación de las raíces y la imposibilidad de pasar por los puntos críticos.

No hay ningún inconveniente en generalizar el procedimiento.

Para representar á la vez varios sistemas de raíces de un sistema dado de ecuaciones simultáneas, basta repetir la misma construcción tantas veces como sea necesario.

Para darnos cuenta de cómo esta construcción pudiera llevarse á cabo, imaginemos una máquina en forma de estrella, en cuyo centro exista un grupo de aritmóforos, uno por cada variable independiente; formando círculo alrededor de este primero otros varios grupos, todos iguales entre sí, y en cada uno de los cuales están representadas todas las incógnitas, cada una en su aritmóforo; y después uniremos idealmente el grupo central con cada uno de los otros por medio de una recta que ha de representar en nuestro esquema el conjunto de mecanismos necesarios para construir el sistema de ecuaciones.

Repítese así la construcción de éstas tantas veces como rayos tiene la estrella, y al extremo de cada uno de los rayos puede representarse un sistema de raíces diferentes.

Podremos entonces hacer marchar arbitrariamente todos y cada uno de los móviles del grupo central; y los otros—arrastrados por ellos—marcharán también, y en cada instante tendremos representado en el extremo de cada uno de los rayos un sistema de raíces correspondiente á los valores simultáneos de los datos.

VIII

Esta íntima y perfecta analogía entre las máquinas ó sistemas mecánicos y las fórmulas algébricas, permite dar siempre forma sensible á toda clase de relaciones analíticas, y puede aprovecharse en algunos casos para ilustrar la exposición de teorías matemáticas.

No hay quien desconozca la conveniencia de emplear á veces ejemplos para hacer más clara la exposición de ideas abstractas.

Proporciónalos casi siempre, y muy adecuados, la Geometría, pero en ocasiones no es fácil acudir á ella; la figura geométrica fija é indeformable, sólo mediante ciertos convencionalismos y artificios puede prestarse á la representación de relaciones entre cantidades variables; y por eso con frecuencia se supone que las figuras varían según ciertas leyes, confirmando así mi opinión: porque estas figuras variables, como sistemas mecánicos ideales pueden considerarse; y yo sólo digo que en ciertas teorías debiera acudirse con más frecuencia, y de una manera sistemática, á esta clase de ejemplos.

Serían, en general, más sugestivos que los geométricos, y se prestarían lo mismo al razonamiento matemático, porque los sistemas que nosotros imaginemos compuestos de cuerpos inalterables, con formas geométricas exactamente definidas, sin asperezas que produzcan rozamientos imprevistos ni imperfecciones de ninguna especie, no existen ni pueden existir fuera de nuestro entendimiento; son, en puridad, entes de razón conformes en un todo á la definición que de ellos hayamos dado, y es lícito, por consecuencia, afirmar con certidumbre matemática todas las conclusiones que de su definición puedan lógicamente derivarse.

Podría, pues, un sistema mecánico, lo mismo que una figura geométrica, servir de apoyo y guía al razonamiento matemático para facilitar á los principiantes la inteligencia de ciertas demostraciones, sin perjuicio de exponerlas luego en forma más abstracta, siempre que sea necesario.

Así como los entes geométricos se representan por medio de dibujos, y aun por medio de figuras en relieve, cuando conviene, así también, para definir con entera claridad los entes cinemáticos, las máquinas ó sistemas mecánicos ideales que hemos de hacer funcionar mentalmente, acudiremos de ordinario á su representación gráfica; pero quizá no esté de más á veces construirlos, para obtener una realización material suficiente, aunque grosera, de los hechos ó leyes que se trata de poner en evidencia.

Y eligiendo con tino los ejemplos, no serían necesarios aparatos muy complicados; un simple sistema articulado me ha servido, hace muy poco tiempo, para construir una función de dos determinaciones con dos puntos críticos, á los cuales corresponden en el sistema dos puntos muertos; y se observa la permutación de las raíces cada vez que la variable describe una curva cerrada que comprende en su interior uno cualquiera de ellos (1).

La función construída no es monógena, pero eso ninguna importancia tiene para nuestro objeto.

Sería igualmente fácil construir—no exigiendo que fueran monógenas—funciones simple ó doblemente periódicas, y quizá algunas otras, que presentaran particularidades interesantes.

IX

Réstame sólo decir algo acerca de las aplicaciones á los cálculos usuales. Prescindiré en absoluto de los aritmómetros y planímetros—entre los cuales hay aparatos muy ingeniosos y de innegable utilidad,—porque no encajan exactamente dentro de mi estudio, y trataré sólo de las máquinas destinadas á calcular fórmulas algébricas.

Muchas han sido, según dije al principio, las propuestas; pero en ningún caso, que yo sepa, se han examinado las condiciones prácticas. Parece como si los inventores pensaran que la única dificultad estriba en imaginar una solución teórica, y en realidad la cuestión no está ahí; porque siempre hay, según acabamos de ver, infinitas maneras de construir una ecuación ó un sistema de ecuaciones.

Las dificultades son puramente prácticas y proceden de la gran complicación de mecanismos, á veces necesaria, y, má

(1) *Sobre la utilidad de emplear ejemplos cinemáticos en la exposición de algunas teorías matemáticas*, por Leonardo Torres. Ateneo de Madrid, curso de 1900 á 1901. Sesión inaugural de la Sección de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, celebrada el 19 de Noviembre de 1900. Madrid, 1900.

principalmente aún, de la gran amplitud de variaciones á que están sujetas las variables de las fórmulas.

En las Memorias, antes citadas, he expuesto las condiciones que necesariamente han de reunir las máquinas de calcular algébricas, para que las dificultades prácticas puedan vencerse satisfactoriamente.

Tres son las principales;

1.ª Emplear aritmóforos logarítmicos, en los cuales el desplazamiento es proporcional, no á la variable representada, sino á su logaritmo.

Es absolutamente necesaria esta condición para representar con precisión suficiente variables que oscilan entre límites muy extensos; y además, cuando se acude á este procedimiento de representación—comparable á los procedimientos de anamórfosis usados en Geometría—las ecuaciones entre los desplazamientos no son las mismas que existen entre las variables, sino las que existen entre sus logaritmos, y estas últimas se construyen mucho más fácilmente en algunos casos importantísimos, entre los cuales se cuentan todos los relativos á las funciones algébricas.

2.ª Prescindir de las transmisiones por contacto, que se prestan á la acumulación de errores, y á los errores groseros ocasionados por los resbalamientos, acudiendo siempre á los enlaces geométricos, cuya acción—como depende sólo de la forma de los mecanismos—ha de producirse necesariamente, mientras éstos no se rompan ó deformen.

3.ª Admitir sólo mecanismos sin fin, ó que puedan prácticamente reputarse por tales, para tener libertad de representar las variables en escala bastante grande, sin limitar la amplitud de sus variaciones.

En dichas Memorias y en otros trabajos sobre el mismo asunto tengo demostrado que es posible—ateniéndose á estas tres condiciones—construir un sistema cualquiera de ecuaciones algébricas; peró será preciso evitar la complicación excesiva de mecanismos, porque sólo pueden esperarse resultados prácticos en los casos más sencillos. No siendo posible precisar cuáles sean éstos, me limitaré á dar noticia de una máquina, destinada al cálculo de funciones algébricas, que tengo proyectada en detalle, y cuyos principios están expuestos en la Memoria *Machines à Calculer*.

Para puntualizar cuál podría ser la utilidad de esta máquina, ó de otra cualquiera, será preciso contestar á estas preguntas:

¿Cuáles son las fórmulas que pueden calcularse con el aparato?

¿Cuáles son los límites impuestos á las variables?

¿Cuál será el error que se cometa en los cálculos?

Contestaré escuetamente, sin razonar las respuestas, porque su justificación exigiría, como comprenderéis, la descripción y discusión detenida del proyecto. Indicaré los resultados que, á mi juicio, se obtendrán con este aparato, ya que es imposible dar aquí la menor idea de los mecanismos que la componen.

En el aparato se construye la función α:

$$\alpha = \frac{A_1 x^{m_1} + A_2 x^{m_2} + A_3 x^{m_3} + A_4 x^{m_4} + A_5 x^{m_5}}{A_6 x^{m_6} + A_7 x^{m_7} + A_8 x^{m_8}},$$

cuyo numerador consta de cinco términos, y de tres el denominador; sin que quepa aumentar el número de términos, aunque sí pueden suprimirse los que no se consideran necesarios en cualquier caso, conforme luego indicaré.

Los coeficientes A_1, A_2..... A_8, y lo mismo la variable independiente x y la función α están tratados como variables en el sentido propio de la palabra: cada una de ellas está representada en un aritmóforo, y los enlaces mecánicos establecidos entre éstos hacen que los valores, simultáneamente representados por todos, satisfagan á la ecuación.

Los exponentes pueden ser positivos ó negativos, enteros ó fraccionarios, y se varían—para pasar de una fórmula á otra—introduciendo ligeras modificaciones en los enlaces, es decir, desmontando unas piezas y montando en su lugar otras análogas: gracias á las disposiciones adoptadas, el cambio se hace con comodidad y rápidamente.

Podrían, pues, construirse en este aparato casi todas las funciones algébricas que se presentan en las aplicaciones corrientes.

También serviría para calcular las raíces reales de una ecuación algébrica.

Escribiríamos todos los términos positivos de su primer miembro en el numerador y los negativos en el denominador, ó á la inversa; construiríamos la fracción así obtenida; daríamos valores particulares á los coeficientes, y haríamos marchar el aritmóforo x; el valor que correspondiera á esta variable, cada vez que α pasara por el valor *uno*, sería una raíz positiva de la ecuación; porque, cuando su primer miembro es *cero*, la suma de los términos positivos ha de ser igual á la de los negativos.

Cambiaríamos luego el signo de todos los monomios de grado impar, construiríamos la ecuación que resultara, y calcularíamos sus raíces positivas, iguales necesariamente en valor absoluto á las raíces negativas de la ecuación propuesta.

Los aritmóforos logarítmicos no pueden representar el valor *cero* ni ningún valor negativo; pero cada una de las variables de nuestro aparato podrá oscilar entre dos límites positivos tan extensos como se quiera. Podrá representarse en los aritmóforos cantidades que se expresan por veinte, treinta ó más cifras, ó sus inversas; valores, en fin, tan grandes ó tan pequeños, como nunca aparecen en los cálculos usuales.

Para suprimir prácticamente un término, daríamos á su coeficiente un valor sumamente pequeño, y así resultaría el monomio en cuestión despreciable con relación á todos los demás. ¿Cuál será la exactitud de los cálculos?

Esta última pregunta es la más difícil de contestar.

La respuesta depende de ciertos datos prácticos que sólo experimentalmente pueden determinarse.

Nada puedo afirmar en este punto con completo conocimiento de causa; pero creo lícito esperar que el error cometido al calcular mecánicamente el valor α no exceda de tres ó cuatro centésimas, y aun me parece posible reducir mucho más este límite, construyendo el aparato con toda precisión y manejándole con cuidado.

Cuando se calcule una raíz, la cuestión es más compleja: el error será en este caso muy variable, porque depende de la naturaleza de la ecuación, y crecerá ó menguará al mismo tiempo que la derivada de x con relación á α.

De todos modos, el cálculo mecánico dará á menudo toda la exactitud necesaria; porque es frecuente en los problemas de Física, en los de Ingeniería y en otros muchos manejar datos en cuya determinacion caben errores de mucha monta, ó fórmulas que no reflejan con entera fidelidad las leyes que representan, y es locura buscar en casos tales gran exactitud estirando las operaciones numéricas para obtener largas filas de guarismos.

Y otras veces, cuando se trate de cálculos que deben ser muy exactos, servirá también la máquina, que dará un primer valor aproximado, con ahorro casi siempre de la mayor parte del trabajo, aunque luego, para rectificarle, hayan de prolongarse los cálculos acudiendo á los procedimientos ordinarios.

Todas las combinaciones mecánicas necesarias en este aparato están ya ensayadas, y no es de creer que su contrucción ofreciera dificultades de importancia.

Otras aplicaciones prácticas pudieran considerarse. Pero he abusado sobradamente de vuestra paciencia, y aquí termino, como empecé, pidiéndoos perdón de haberos molestado con un discurso tan árido y desabrido.