La lengüeta $A\ C\ B$ avanza hacia agua abajo bajo, la influencia de la corriente, los granos de arena se mueven en el sentido de ésta, es decir, paralelamante á las orillas. Cuando estos granos de arena tocan al talud $A\ C$ y $B\ C$, se produce un cambio brusco en su movimiento, y esto con tanta más intensidad cuanto el talud es más elevado. En tanto que en C los granos de arena se depositan al pie del talud y son inmediatamente recubiertos por los siguientes en $A\ B$, estos granos continúan su camino sin pararse. En cuanto á los que pasan entre A y C ó B y C, si no son, cuando llegan al talud, recubiertos por los que les siguen, son arrastrados hacia C por efecto de las fuerzas oblicuas, que crea en su dirección el talud de arena que actúa como un espigón.

Estas consideraciones explican cómo al cabo de un cierto tiempo la punta C de la lengüeta se encuentra trasladada oblicuamente á C_1. En C se unen las lengüetas $C\ E$ y D. De la misma manera á C_1 va á parar la lengüeta $C_1\ E_1$. Así se forman altos fondos en C_1 en la margen derecha, y en E_1 en la margen izquierda, que se reproducen agua abajo del mismo modo.

M. Engels deduce de aquí, que sin la intervención de afluentes, los depósitos se trasladan de manera que pueden formar blancos oblicuos alternando de una orilla á otra.

Nada más que á lo largo del talud que limita estos bancos por el lado de agua abajo y en una débil cantidad, las materias arrastradas por el agua se mueven oblicuamente en relación á la dirección de la corriente.

Cuando las altas aguas decrecen, la corriente socava aquel talud, normalmente á su dirección, el paso de la vaguada en aguas bajas corresponde á la solera de este talud.

Como los bancos de arena se trasladan á cada crecida, estos pasos se cierran á cada crecida, para volverse á formar á cada descrecida y cada vez más agua abajo.

Los altos fondos y con ellos el serpenteo de la vaguada en aguas bajas, desaparecen cuando disminuye el acarreo de materias ó que la sección de desagüe se reduce. En los dos casos la pendiente se hace más débil en la longitud considerada.

Estas conclusiones de los experimentos de Dresde, unidos á indicaciones de la práctica, conducen á M. Engels á formular las reglas siguientes en lo que concierne á la mejora de los pasos navegables en los tramos de los ríos rectos ó de pequeña curvatura:

1.° La reducción del ancho del lecho de aguas medias, tiene por consecuencia una disminución de la pendiente; por tanto, no es necesario recurrir á este sistema de mejora más que cuando la pendiente es muy fuerte, resultando así una regularización del perfil longitudinal.

2.° Acentuando la curvatura del lecho en los tramos demasiado rectos, sin cambiar su ancho, se eleva el nivel de las aguas y el fondo, en el origen, en una cierta cantidad que decrece gradualmente hacia agua abajo.

No es necesario entonces emplear este medio más que cuando ha de obtenerse una dismunición en las irregularidades de la pendiente. Se puede recurrir á él especialmente en los ríos cuya mejora se realiza con ayuda de espigones, porque se puede, alargando ó acortando éstos, modificar las curvaturas del lecho.

Estos dos primeros sistemas de mejora pueden emplearse simultáneamente.

Como no es posible prever en qué medida estos procedimientos pueden reducir el número de soleras y fijar la vaguada, es necesario esperar el resultado de estos trabajos antes de pasar á la ejecución del tercer medio de mejora.

3.° Para fijar y á un mismo tiempo extender las soleras de la vaguada en las aguas bajas, se pueden emplear procedimientos muy diversos, según la naturaleza del río.

Sobre el Inn, M. Faber ha aplicado, á título de ensayo, una mejora con espigones de fondo. Cualquiera que sea el procedimiento aplicado, debe dar el máximo de efecto en aguas bajas y el mínimo durante las crecidas, y tener por objeto fijar en el mismo lugar la influencia de la decrecida. De todas maneras, conviene operar desde luego por vía de ensayo sobre una solera determinada. El objeto es alcanzado cuando el paso de las aguas bajas está señalado fijamente.—O.

UNIFICACIÓN DE LAS CIENCIAS

LA LEY FUNDAMENTAL

Sumario (1).—Se indican las leyes precursoras del *principio del trabajo virtual*.—Se expone éste en la forma de Lagrange y aplicándolo á cada ciencia se ve que resultan las ecuaciones fundamentales ó más generales de cada una.—Para aplicarlo no se hace más que sustituir sus *variables extensivas é intensivas* por las propias de la Mecánica, Electricidad, Termodinámica y Química, deduciendo, como caso particular, la Optica.—Se exponen las relaciones entre dicho *principio* y la *Teoría de funciones* de la moderna Matemática.—Se hace una ligera crítica de la ley del trabajo virtual, indicando su *difícil facilidad*, y con esto queda tratado el primero de los tres términos del problema, tal como lo planteamos en el número anterior: *ley de adaptación* del *sujeto* al *medio ambiente*.

I

Los precursores.

Las ciencias en sus comienzos fueron acopiando casos particulares, recogiendo leyes empíricas, inducidas de la observación y de la experiencia, con el auxilio de la Razón, y ellas constituyeron las primeras condensaciones aisladas de la nebulosa intelectual que, por su aproximación sucesiva, habían de crear una personalidad propia, la clave sintética individual del nuevo astro que iba á brillar en el campo de la ciencia; esas leyes llevaban en sí el germen del gran *principio del trabajo virtual* en que hoy todas encuentran su síntesis suprema.

Vislúmbralo Arquímedes en el campo de la Estática, en la palanca, ante cuya ley queda absorta la Humanidad diez y ocho siglos, hasta que su clarivisión surge en la mente de Leonardo de Vinci, al ver por vez primera el concepto del *momento estático*.

Persíguese en el *plano inclinado*, y el principio que lleva este nombre aparece rodeado de misterio hasta que, desentrañado por Stevin, hízole exclamar: «Las maravillas no son maravillas», y fundiólo con el anterior.

En el fondo, se halla, del principio de *composición de fuerzas* que Newton abstrajo del aristotélico de *composición de movimientos*.

(1) Sumario de los números anteriores:

Prólogo:

Núm. 1623.—La aparición de la Industria en gran escala, causa una revolución en la Ciencia: frente á la Ciencia racional ó teórica, creada por la inteligencia, el *sentido práctico*, que es al que debe principalmente la industria su desarrollo, crea la Ciencia experimental ó práctica.—Cuando el mercado mundial se abarrota y empieza la lucha por lo económico, esta ciencia no basta y se acoge á la ciencia racional, transformándola, introduciendo en ella los caracteres del sentido práctico: hácela abandonar la investigación del *por qué* de los fenómenos y limitarla á describir modestamente *cómo* se realizan; cambia sus *sólidos invariables* en *sólidos naturales*, introduciendo el principio de continuidad.—En la ciencia así transformada, se ve una cosa no prevista: que todas las ciencias se parecen, que no son más que una sola.—Mostrar esa evolución es el objeto de este prólogo y reseñar los rasgos generales de esa ciencia única es el objeto de este artículo.

Plan de la ciencia única.

Núm. 1634.—Analizada la estructura de cualquier ciencia se observan en ella dos entidades: *definiciones y propiedades*; unas y otras son *combinaciones* de unas cuantas nociones indefinibles y propiedades indemostrables, que figuran al principio de cada ciencia. Las *combinaciones* son proporcionadas por la Matemática.—En la ciencia única esas nociones elementales son las variables extensivas é intensivas; las propiedades son los fenómenos.—Aparecen unos y otros perfectamente clasificados y se descompone la ecuación representativa del fenómeno, en las que definen el *sujeto*, el *medio ambiente* y la *ley de adaptación*.—La clasificación de los fenómenos puede descomponerse en la de sujetos y la de medios ambientes.—Tratar de la *ley de adaptación* (principio del trabajo virtual) y de los sistemas de dichas dos clasificaciones será objeto del artículo siguiente.

Pero á Stevin (el primero que representó las fuerzas por líneas rectas, con lo cual pudieron tratarse sus problemas geométricamente) es á quien corresponde la gloria del descubrimiento, de la *gran ley fundamental* de los desplazamientos virtuales sugerido por el estudio estático de un polipasto. Sorprende en ella Galileo la noción del *trabajo*, del producto de la fuerza por el camino recorrido; J. Bernoulli la enumera en su integridad, y Lagrange da de ella la fórmula general que resuelve todos los problemas de equilibrio por un método sencillo, elegante y uniforme. Y la *Estática* llegó así al principio supremo á que aspira toda ciencia.

La *Dinámica*, después de los torneos intelectuales de Mersenne, Bernoulli, Clairaut, Euler....., proponiéndose distintos problemas que resolvían por medio de artificios particulares, es preparada por D'Alembert para recibirle. Su famoso principio permite plantear en ecuaciónes todos los problemas dinámicos reduciéndolos á problemas de equilibrio; desde ese momento no tuvo más que aplicar Lagrange el principio del trabajo virtual que trataba á todos aquellos por método uniforme, y la síntesis fué hecha.

D'Alembert, al introducir las ecuaciones de enlaces, había suprimido de una plumada una porción de fuerzas inútiles por el momento; el autor de la Mecánica analítica, al aplicar las variables generales, hizo inútil, á su vez, la pulverización de las ecuaciones entre todos los puntos materiales, con lo cual variables y ecuaciones se redujeron al mínimo, llegando á la forma más condensada en que se puede encerrar toda la Mecánica.

Después de las tentativaa de Huygens, Newton, Bouguer y Mac Laurin, da Clairaut las leyes de la Hidrostática; aplica D'Alembert su principio y se transforman en las leyes del movimiento, ecuaciones analíticas que Euler simplifica y presenta con la notación sencilla y clara de las diferenciales totales. El principio del trabajo virtual al entrar en Hidráulica, aclara la naturaleza de la *presión hidrostática*, noción oscura hasta entonces, y muestra una función especial, la *función de fuerzas* que más tarde Laplace, Buisson, Green, Gauss y otros, desarrollaron de manera tan maravillosamente fecunda que supo atraer sobre sí la atención que merecieran antes las fuerzas. (1)

En las leyes del electromagnetismo, deducidas por Ampère á consecuencia del descubrimiento de Ersted sobre la influencia mutua de la corriente eléctrica y la aguja imanada; en las leyes del electrodinamismo que dedujo el mismo de sus observaciones directas sobre las corrientes eléctricas; en las leyes de los fenómenos de inducción descubiertas por Faraday y condensadas por Lenz, de las cuales partió Neumann para exponer su teoría sobre la inducción, y á las que llegó también Weber partiendo de la ley general de las fuerzas eléctricas; en el principio de la conservación de la energía aplicado por Helmholtz y W. Thomson para unir las leyes de Ampère y de Weber; en la segunda ley de Kirchhoff sobre fuerzas electromotrices en las corrientes filiformes; en la de Joule, estableciendo los enlaces de las energías eléctrica y calorífica; en la ampliación de esas leyes á los dieléctricos por Maxwell, que con una intuición genial (anticipo profético de los descubrimientos de Hertz) introdujo en sus cálculos la noción del *flujo de desplazamiento*, velocidad de polarización del dieléctrico, que, á semejanza del flujo de conducción, engendra fuerzas ponderomotrices y electromotrices; concepto que, borrando la solución de continuidad en los dieléctricos, (como la salvara antes Faraday para la electrostática) permitióle establecer sus célebres ecuaciones en que se condensa toda su teoría, generalizando la ley de Lenz-Neumann entre la $\int_c F_s\, d_s$ de la fuerza eléctrica ó magnética á lo largo de un contorno y la variación de flujo magnético ó eléctrico que lo atraviesa; en las leyes electrostáticas, caso particular de las electrodinámicas al parar el péndulo del tiempo; en todas esas leyes; en suma, se ve asomar el principio del equilibrio móvil, imagen, á su vez, del de *trabajo virtual* generalizado, en que las coordenadas geométricas se truecan en coordenadas eléctricas, las fuerzas en acciones, las velocidades en intensidades de corriente, las fuerzas de inercia en fuerzas de inducción. La Electrología llegó, pues, también al principio de Lagrange como las demás ciencias.

Las leyes térmicas que comprenden las de equilibrio y propagación del calor, las de cambio de volumen y cambios de estado, las que relacionan la energías calorífica y mecánica en la Termodinámica, cuantas encierra, en fin, la Termología, para llegar al principio del trabajo virtual, utilizaron como puente de paso la hipotética teoría mecánica delcalor; se quería llegar pronto, y se trasladaron á la molécula todas las dificultades de disconveniencia; mas cuando surgió el concepto de *entropía* (factor hasta entonces desconocido de la energía calorífica, que combinado con la *temperatura*, la integran), la solución presentóse espontáneamente sin artificios ni pasarelas fantásticas. Expresadas las constantes físicas de esta ciencia en función de la entropía, la Matemática sola dedujo los leyes de Clapeyron, Reech y Thomson que se consideraban antes de patrimonio exclusivo de la experiencia. Completos los elementos del principio de Lagrange, en él encontraron todas las mencionadas propiedades y su ley sintética.

En Química, aparte de la lucha perpetua de las dos escuelas, epicúrica y aristotélica (indestructibilidad de los componentes y su transmutación), se ha perseguido el por qué de la preferencia de unas reacciones á otras y la posibilidad de predecirlas en leyes, como la de conservación de la masa, de Lavoisser, la de proporciones definidas de Proust, la de proporciones múltiples ó números proporcionales de Dalton, las de relación fundadas en la analogía y sustitución química, en la valencia, en la estereo química.....; sin fijarse que no se hacía más que rodar sobre *ecuaciones de enlaces*, como si la Hidrodinámica se hubiera limitado á considerar la ecuación de continuidad ó incomprensibilidad ó la Electrología, la primera ley de Faraday sobre las corrientes derivadas. La corriente que va en busca de la ley dinámica, debemos verla más bien á través de las antiguas Tablas de afinidades; las leyes de Berthollet, la escala electroquímica de Berzelius, el principio termodinámico de Thomson, el del trabajo máximo de Berthelot, el del equilibrio móvil de Van t'Hoff..... hasta que aparece el nuevo concepto de la *función característica* de Massieu, *energía utilizable* de Gibbs y Maxwell, *energía libre* de Helmholtz ó *potencial termodinámico* de Duhem que es el que abre á la Química las puertas de la Mecánica general de Lagrange, la cual, apoyada en los principios de la Termodinámica, hace su entrada en Francia con Moutier, en Alemania con Horstmann, en América con Gibbs, secundados por Helmholtz, Van t'Hoff, Roozboom, Le Chatellier y Duhem. En el principio del trabajo virtual encontraron su enlace todas las formas de energía que concurren en el misterioso fenómeno de la transmutación.

Plantear un problema en ecuaciones y resolverlas es el objeto de toda ciencia. La Matemática facilita la primera parte poniendo en nuestras manos la noción de *función*, entidad matemática que tan bien se pliega á todo fenómeno natural. La resolución de ecuaciones, por su parte, ha constituído incentivo constante para descubrir leyes ó propiedades de relación entre coeficientes y raíces, entre las cantidades conocidas y desconocidas que tenemos sujetas á enlace; reconocida la importancia en ellas

(1) Durante mucho tiempo se ha tenido por mera lucubración la Hidromecánica racional, posponiéndola a la empírica. En estos últimos tiempos se vuelve hacia ella la mirada; en Foronomía, el Ingeniero Allibrandi ha hecho un profundo estudio sobre la teoría de los coeficientes de salida, fundado en el principio de las cantidades de movimiento y de las impulsiones proyectada; en la conducción forzada, el movimiento variado del agua ha sido tratado por sus ecuaciones diferencia es por Allievi, y en ellas se ha visto el enlace de sus leyes con la de los fenómenos vibratorios, nuevo punto de vista que ha proporcionado métodos simples y rigurosos para la resolución de estos problemas, entre ellos el de golpe de ariete tan importante en la aplicación de la fuerza hidráulica en numerosas instalaciones que utilizan grandes saltos conduciendo el agua por tubos á velocidades de 3 y más metros.

de la entidad *función*, sus propiedades son las que se han perseguido sin cesar. Pues bien, si dirigimos una ojeada sobre las leyes descubiertas en los polinomios, fracciones racionales, funciones transcendentes, series, integrales, ecuaciones diferenciales, ecuaciones funcionales..... cuantas leyes vemos esparcidas sobre el campo del análisis matemático; todas ellas se condensan y encierran en la propiedades de la *función analítica* ó compleja. ¡Y cosa singular! La función analítica obedece al principio del trabajo virtual; el principio de Lagrange imprime también su sello sobre dichas *funciones*, de las que se derivan, en abierto abanico, todas las *funciones* de la Matemática con todas sus propiedades anatómicas y fisiológicas que pintan con espléndida irisación la vida abstracta; ciencia sublime en que se tangencian dos mundos, el espiritual y el material, la idea y la realidad, coincidentes en la armonía!

II

La ley.

$\Sigma T_v = 0$. Suma de trabajos virtuales igual á cero en cada instante.

Poniendo explícitamente los trabajos de las fuerzas reales (exteriores é interiores) y las ficticias de inercia,

$$\Sigma\, T_e + \Sigma\, Ti + \Sigma\, T_j = 0.$$

Y como el trabajo de las fuerzas interiores es igual á la diferencial de la función de fuerzas ó potencial P,

$$\Sigma\, T_e + \Sigma\, T_j - d\, P = 0.$$

Adoptando las variables generales, *variables extensivas*, coordenadas algébricas ó parámetros de que depende el movimiento propuestas por Lagrange, y llamándolas α, β .....; y A_α, A_6 ..... á las fuerzas generalizadas correspondientes ó *variables extensivas*, con ellas relacionadas (1) y J_α, J_6 ...., á las de inercia, podremos presentar el principio del trabajo virtual bajo esta forma:

$$A_\alpha\, d\alpha + A_6\, d\beta \ldots.. + J_\alpha\, d\alpha + J_6\, d6 + \ldots.. - dP = 0. \qquad (2)$$

Las A son funciones de las α, 6 ..... y de sus derivadas ó velocidades α', $6'$ ..... Las J son funciones de las mismas variables y de sus derivadas primeras y segundas (desplazamientos, velocidades y aceleraciones).

Las acciones de inercia las expresa Lagrange en función de la fuerza viva F,

$$J\alpha = \frac{dF}{d\alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{dF}{d\alpha'}\right)$$
$$J_6 \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La fuerza viva F es una función homogénea y de segundo grado, forma cuadrática, de las velocidades α', $6'$ .....; si las variables son dos, es de la forma $\frac{1}{2}(M\alpha'^2 + 2\,Q\,\alpha'\,6' + N\,6'^2)$ en que M, Q y N son funciones de las variables α y 6.

Como para todo desplazamiento virtual $d\,\alpha$, $d\,6$ ..... ha de ser nula la suma de trabajos virtuales, se deducen como es sabido las ecuaciones del movimiento, ó sean las de D'Alembert generalizadas,

$$A_\alpha + J_\alpha - \frac{dP}{d\alpha} = 0;$$

$$A_\beta + J_\beta - \frac{dP}{d\beta} = 0;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Cada una de ellas es una ecuación entre las variables α, 6 ....., sus derivadas primeras ó velocidades α', $6'$ ..... y sus derivadas ó aceleraciones α'', $6''$ .....; una ecuación diferencial de segundo grado; tantas ecuaciones como variables independientes.

$A_\alpha + J_\alpha - \frac{d\,P}{d\,\alpha} = 0$; ó bien, en el caso de no tener potencial, $A_\alpha + B_\alpha + J_\alpha = 0$. He ahí la clave de la ciencia. ¿Cuáles son en cada caso las A, J y P (fuerzas exteriores, de inercia y potencial) ó las A, B y J (fuerzas exteriores, interiores y de inercia)?

***

Mecánica.

En los *sólidos invariables*, las α (en el sistema cartesiano) son las coordenadas x, y, z, las 6 los ángulos de rotación; las A_α las fuerzas exteriores ó aplicadas X, Y, Z; las A_6 los momentos $(Zy - Yz)$, etc.; las J las fuerzas de inercia; las B ó P son nulas. Las ecuaciones del movimiento que se deducen de las generales antes citadas son, pues:

$$\left.\begin{array}{l} X - m\,\dfrac{d^2 x}{dt^2} = 0 \\ Y\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \text{ó sea } A_\alpha + J_\alpha = 0; \textit{ traslación.}$$

$$\left.\begin{array}{l} (Zy - Yz) - \Sigma m\left(y\,\dfrac{d^2 z}{dt^2} - z\,\dfrac{d^2 y}{dt^2}\right) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \text{ó sea } A_6 + J_6 = 0;$$

rotación alrededor de un punto fijo.

Las segundas, que expresan el movimiento de un sólido alrededor de un punto fijo, si se toman como variables independientes las ψ, θ, φ se escriben con ellas las ecuaciones de Lagrange y se sustituyen sus valores en función de las rotaciones p, q, r se obtienen las conocidas ecuaciones de Euler

$$\left.\begin{array}{l} C\,\dfrac{d\,r}{dt}(B - A)\,p\,q = N \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

ó las

$$\left.\begin{array}{l} C\,\dfrac{d\,(n + \psi\cos\theta_1)}{d\,t} = N \\ A\,\dfrac{d\,\theta}{d\,t}\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{en función de la precesión } \psi, \text{ de la} \\ \text{nutación } \theta \text{ y la rotación propia } n.\end{array}$$

En los *medios continuos* y su caso particular, los *sólidos elásticos* A_α es $_\rho X$; B_α es T_x (la tensión superficial proyectada), ó sea en función de las componentes sobre cada cara del triedro elemental de equilibrio

$\left(\frac{d\,N_1}{d\,x} + \frac{d\,T_3}{d\,y} + \frac{d\,T_2}{d\,z}\right)$; J_α es $\rho\,\frac{d^2 u}{d\,t^2}$; y de ahí sus ecua-

(1) Si las variables extensivas son longitudes, las A son fuerzas; si superficies, tensiones superficiales; si volúmenes, presiones; si ángulos, momentos. Si cantidades de electricidad, fuerzas electromotrices; si entropías, temperaturas; etc.

(2) En los casos en que las fuerzas interiores no deriven de un potencial, aparecerán explícitamente en sus términos: $B_\alpha\, d_\alpha + B6\, d6 + \ldots..$

ciones

$$\rho X + \left(\frac{d N_1}{d x} + \frac{d T_3}{dy} + \frac{d T_2}{dz}\right) = \rho \frac{d^2 u}{d t^2}$$

....

....

En los isótropos B_{α_1} ó sea el paréntesis anterior, se puede poner bajo la forma $\left[(\lambda + \mu) \frac{d\ \theta}{d x} + \mu \Delta u\right]$ ó sustituirlo por la derivada del potencial elástico $\int\int\int W\, dx\, dy\, dz$ (1).

En *Hidrodinámica* la A_α es la fuerza exterior (X, Y, Z), el potencial P es la presión de enlace p, la J_α es $\frac{d^2 x}{d t^2}$ y sus ecuaciones en el caso de fluido perfecto

$$\frac{1}{\rho} \frac{d p}{d x} = X - \frac{d^2 x}{d t^2}$$

....

....

En el caso de fluidos ordinarios hay que agregar C_α, acción de viscosidad, que descompuesta según los tres ejes cartesianos, daría tres términos q_x, q_y, q_z, para añadir respectivamente á cada una de las tres ecuaciones anteriores.

En toda la Mecánica, como se ve, las ecuaciones fundamentales se deducen aplicando el principio del trabajo virtual, teniendo en cuenta en cada rama de aquélla, cuáles son las fuerzas que intervienen.

***

Electricidad.

Como en Mecánica saltábamos sobre ecuaciones conocidas y procedimientos corrientes, hemos omitido explicaciones innecesarias; no sucede así en Electrología, en que precisa llamar la atención sobre las nuevas variables propuestas por Carvallo y el estudio que de las mismas hace.

En cada circuito se toma por *coordenada eléctrica* la cantidad de electricidad q; su velocidad $\frac{d\, q}{d\, t}$ es la intensidad i de la corriente. El estado de un circuito queda conocido cuando se dan q y $\frac{d\, q}{d\, t}$.

Encontrar q en función del tiempo es el problema homólogo de encontrar dicha función para la coordenada x de una máquina de enlaces completos (ó sea un cuerpo de variancia lineal).

La ecuación de una corriente $E - L \frac{d\, i}{d\, t} - r\, i = 0$, ó sea $\left(E - r \frac{d\, q}{d\, t}\right) - L \frac{d^2 q}{d\, t^2} = 0$, en que E es la fuerza electromotriz y L el coeficiente de autoinducción, es de la misma forma que la deducida del principio del trabajo virtual $A_\alpha + J_\alpha = 0$, pues E es una fuerza aplicada, $r \frac{d\, q}{d\, t}$ una de rozamiento (efecto Joule) y $L \frac{d^2 q}{d\, t^2}$ es la conocida de inercia $m \frac{d^2 x}{d\, t^2}$.

(1) $W = \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 + \mu(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 4\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3 - 4\,\varepsilon_3\,\varepsilon_1 - 4\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2)$; las ε y γ son las constantes de deformación.

Multiplicando dicha ecuación por $d\, q$ aparece la del principio del trabajo virtual.

Un circuito filiforme único es, pues, análogo al de una máquina de enlaces completos.

Un sistema de dos ó más circuitos fijos ó móviles, de forma variable ó invariable, remeda un sistema mecánico de enlaces incompletos.

Las ecuaciones de un sistema de dos circuitos fijos, son:

$$(E_1 - r_1\, i_1) - \left(L_1 \frac{d\, i_1}{d\, t} + M_{12} \frac{d\, i_2}{d\, t}\right) 0$$

$$(E_2 - r_2\, i_2) - \left(L_2 \frac{d\, i_2}{d\, t} + M_{12} \frac{d\, i_1}{d\, t}\right) 0$$

ó sean las ecuaciones de Lagrange derivadas del principio del trabajo virtual

$$A_\alpha + J_\alpha = 0$$

$$A_6 + J_6 = 0.$$

$M_{12} = M_{21}$ es el coeficiente de inducción mutua dependiente sólo de la forma relativa de los dos circuitos dentro del sistema. Análogamente á lo dicho antes, la expresión encerrada entre paréntesis es la fuerza de inercia.

Multiplicando la primera ecuación por $d\, q_1$ y la segunda por $d\, q_2$ y sumando, se obtiene:

$$(E_1 - r_1\, i_1)\, dq_1 - \left(L_1 \frac{d\, i_1}{dt} + M_{12} \frac{d\, i_2}{dt}\right) d\, q_1 + \ldots\ldots = 0.$$

En la que se ve que la suma de los paréntesis análogos al primero es la fuerza exterior aplicada, y la de los análogos al segundo se ve que es la fuerza de inercia en función de la fuerza viva en que dijimos la expresó Lagrange $\left(\frac{d\, F}{d\, q_1}\right) - \frac{d}{d\, t}\left(\frac{d\, F}{dq_1'}\right)$ siendo aquí la fuerza viva $F = \frac{1}{2}(L_1\, i_1^2 + 2\, M_{12}\, i_1\, i_2 + L_2\, i_2^2)$ ó sea la *energía electrocinética* de Maxwell.

Resumiendo: las coordenadas α, 6 ..... de Lagrange son las cantidades de electricidad gastadas por los circuitos; la energía electrocinética ó fuerza viva es la función de fuerzas electromagnéticas; las fuerzas aplicadas A son las fuerzas electromotrices $E - r\, i$ resultantes de los generadores, receptores y resistencia Joule; y las fuerzas de inercia J son las electromotrices de inducción y las electromagnéticas.

Si uno de los circuitos es móvil, habrá que agregar á las variables la coordenada geométrica x de movilidad del circuito; y á las fuerzas la fuerza mecánica aplicada Φ, y la fuerza electromagnética de Ampère, que es una fuerza de inercia.

La nueva ecuación será:

$$\Phi - \left(m \frac{d^2 x}{d\, t^2} - \frac{d\, M_{12}}{d\, x}\, i_1\, i_2\right) = 0, \text{ ó sea } A_\alpha + J_\alpha = 0$$

Análogamente se deducen las ecuaciones en el caso de que uno ó varios de los circuitos son deformables.

En el caso, pues, más general, un sistema de circuitos filiformes se puede asimilar á un sistema de enlaces, de la Mecánica racional, en que:

1.° Las coordenadas son, unas, geométricas que fijan la forma y posición de los circuitos, y, otras, eléctricas que dan las cantidades de electricidad gastadas en cada uno de ellos.

2.° La energía cinética es la suma de la fuerza viva de las partes móviles de los circuitos y la energía electrocinética ó función de fuerzas electromagnéticas. Ambas son funciones de fuerzas de inercia, de las cuales funciones se deducen las expresiones de estas fuerzas como dijimos (1).

3.° Las fuerzas aplicadas ó exteriores son las mecánicas y las fuerzas electromotrices $E - ri$ (generadores, receptores y resistencia Joule).

4.° Las fuerzas de inercia son las de Mecánica y las fuerzas electromagnéticas y electromotrices de inducción.

5.° Aplicando las ecuaciones de Lagrange ó principio del trabajo virtual, resultan las ecuaciones conocidas de la Electrología.

Pasemos ahora á los cuerpos conductores de tres dimensiones y á los dieléctricos.

La segunda ley de Kirchhoff, en los circuitos filiformes, decía: La suma de las fuerzas electromotrices (de generadores, receptores y efecto Joule) á lo largo de un circuito es nula.

Su generalización, admitidas las ideas de Maxwell, es:

El trabajo total de las fuerzas eléctricas (aplicadas y de inercia) para un desplazamiento eléctrico dq según un contorno cerrado *cualquiera* (á través de conductores y dieléctricos) es nulo.

He ahí, pues, el *principio del trabajo virtual* iluminando las leyes de la Electrologia, en campo más amplio.

Supongamos en un medio continuo un paralelepípedo $dx\,dy\,dz$ y llamemos con Maxwell X, Y, Z el vector fuerza electromotriz ó fuerza eléctrica [el cual en los conductores es el vector Joule $\frac{-p}{c}$ (p, corriente de conducción y c conductibilidad) y corresponde al rozamiento; en los dieléctricos su fuerza cambiada de signo $-\frac{4\pi}{k}\int p_1\,dt$ (p_1, corriente de desplazamiento) que asemeja la reacción de un resorte; y en los generadores y receptores las fuerzas aplicadas]. Su integral á lo largo de un contorno representa el trabajo de las fuerzas reales de Lagrange. El trabajo de las fuerzas de inercia está representado por la diferencial del flujo magnético á través del contorno ó sea la derivada del vector fuerza magnética L, M, N.

Aplicando el *principio del trabajo virtual* al contorno de cada una de las tres caras del paralelepípedo contiguas á un vértice, resultan para cualquier desplazamiento virtual eléctrico las *ecuaciones de Maxwell*:

$$\left.\begin{array}{l} A\mu \dfrac{dL}{dt} = \dfrac{dZ}{dy} - \dfrac{dY}{dz} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\}$$

Partiendo de la fuerza magnética L, M, N en lugar de la eléctrica y del flujo de inducción eléctrica en lugar del flujo de inducción magnética, la aplicación del principio del trabajo virtual nos da el otro grupo de ecuaciones de Maxwell simétrico al citado, salvo la adición que resulta del término correspondiente á la corriente:

$$\left.\begin{array}{l} A\varepsilon \dfrac{dX}{dt} = \dfrac{dM}{dz} - \dfrac{dN}{dy} - 4\pi A u \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\}$$

Si en lugar de ser un medio continuo existen dos medios distintos y buscamos las ecuaciones en la superficie de separación, aplicaremos el mismo principio al citado paralelepípedo elemental colocado de manera que una de sus caras sea paralela á la superficie de separación y resultarán la misma X y la misma Y para los dos medios, es decir, que las componentes tangenciales de la fuerza eléctrica son continuas; los valores de dichas X, Y variarán, según que los dos medios sean conductores dieléctricos ó uno de cada clase.

Tanto las ecuaciones fundamentales de Mavwell, que quedan consignadas, como el principio del trabajo virtual de que las hemos derivado, se refieren á la electricidad de los cuerpos en reposo. Para pasar á los que se hallan en movimiento hay que tener en cuenta en el principio del trabajo virtual los nuevos factores de movilidad mecánica y sus consiguientes fuerzas de inercia mecánica y eléctrica. Llamando q_2 al parámetro de movilidad mecánica, F_2 la fuerza viva, Q_2 la fuerza mecánica aplicada, W el potencial eléctrico, la nueva ecuación que deriva del trabajo virtual para todo desplazamiento $d\,q_2$ será:

$$Q_2 - \frac{dW}{dq_2} = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dF_2}{dq'_2}\right) - \frac{dF_2}{dq_2}\right]$$
$$- f\,.\,u\,a\,(1)$$

El primer miembro del primer grupo de las ecuaciones de Maxwell resultará modificado por la adición de la fuerza electromotriz de inducción debida al desplazamiento del circuito, cuya fuerza pone Maxwell bajo la forma $A\left(\frac{dZ_1}{dy} - \frac{dY_1}{dz}\right)$.

No entraremos en detalles que aclaren la deducción de las ecuaciones que vamos exponiendo para no fatigar á nuestros lectores y distraerlos del objeto principal de este artículo; al final indicaré las obras consultadas para los que quieran recorrer tales pormenores. Lo que queremos hacer constar es que las ecuaciones fundamentales de la Electrodinámica de Maxwell, lo mismo las de los cuerpos en reposo, que las de los cuerpos en movimiento, se deducen aplicando el *principio del trabajo virtual*; y para que se vea el campo abarcado, debemos añadir que de dichas ecuaciones de Maxwell se deducen los teoremas de la Electrostática y de las oscilaciones hertzianas.

Para lo primero basta escribir la condición de la Electrostática, la invariabilidad del campo magnético, $\frac{dL}{dt} = 0$, $\frac{dM}{dt} = 0$, $\frac{dN}{dt} = 0$ y las ecuaciones de Maxwell del primer grupo quedan reducidas á las de condición para que $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ sea una diferencial exacta; su integral es la *función potencial* que tanta importancia tiene en electrostática.

Para lo segundo basta encontrar las integrales de la forma $X = B\,e^{rt}\cos q\,t + C\,e^{rt}\,q\,t$ que satisfagan á las ecuaciones de Maxwell, de la cual se deducen las propiedades de las ondas hertzianas.

Resumiendo, la ecuación del trabajo virtual en el caso más general de la electricidad (conductores y dieléctricos) de los cuerpos en movimiento y prescindiendo de su descomposición según los ejes cartesianos, es

$$(T_e + t_e) + (T_j + t_j) - (d\,F + d\,f) = 0$$

en que las letras mayúsculas se refieren á las entidades de origen eléctrico y las minúsculas á las de origen mecánico. El trabajo de las fuerzas aplicadas (eléctricas y mecánicas), *más* el trabajo de las fuerzas de inercia (eléctricas y mecánicas), *menos* la diferencial de los potenciales (eléctrico y mecánico), *es igual* á cero.

(1) $J_a - \frac{dF}{da} - \frac{d}{dt}\left(\frac{dF}{da'}\right)$.

(1) Los dos términos del primer miembro son respectivamente las fuerzas mecánicas exteriores y las fuerzas eléctricas del dieléctrico (cuyo potencial es W) para el desplazamiento $d\,q_2$; y los dos términos del segundo miembro son, respectivamente, las fuerzas de inercia de origen mecánico, según la expresión de Lagrange, y las fuerzas de inercia eléctrica, ó sea la fuerza electromagnética (u es el vector corriente y a el vector inducción magnética).

No queremos terminar lo que á Electrología se refiere, sin apuntar la aplicación reciente de la teoría termodinámica á la Electricidad.

Parece exclusiva de la Termodinámica la teoría de la *entropía*, la máquina de Carnot, el ciclo de Carnot, etc., y exactamente lo mismo se aplica en Electricidad.

El potencial eléctrico ó tensión eléctrica varía el estado físico de un cuerpo como el potencial calorífico (temperatura ó tensión térmica.) En la evolución de esos cambios de estado varía la *entropía eléctrica* que no es más ni menos que la *cantidad de electricidad*; se define como allí, $\int \frac{dE}{V}$ (llamando E á la energía eléctrica y V á la tensión ó voltaje). Se cumple el principio de Carnot $\frac{E_1}{V_1} = \frac{E_2}{V_2}$

Se razona de igual manera que allí, con la *máquina de Carnot eléctrica* en que los manantiales, en lugar de calor, lo son de electricidad; el hogar y el condensador.

El ciclo de Carnot, *eléctrico*, está compuesto de dos isotermas y dos adiabáticas, *eléctricas*, ó sean dos equipotenciales y dos iso-energéticas (para las que se corta toda comunicación con los manantiales de electricidad).

La función característica de Massieu $dU - Tds - pdv$ se amplía con la Vdq que da la electricidad. El potencial termodinámico de Duhem se convierte en $(U - TS - Vq)$.

La modificación ó cambio de estado puede suponerse derivado del complejo de los tres factores de acción: presión, tensión eléctrica y temperatura; y ver sus relaciones refiriéndolas á tres ejes coordenados correspondientes á esos tres factores; estudiar así las leyes de desplazamiento del equilibrio dejando constantes á unas ú otras; considerar las tres entropías (elástica, térmica y eléctrica) y las seis superficies simples de transformación (tres de iso-tensión y tres de iso-energía); formar el prisma cuadrangular, de aristas curvas, con dos de esas superficies equipotenciales y dos adiabáticas del cual habrá por tanto tres especies según las energías que mezclemos; y ver en él el ciclo generalizado de Carnot que es la curva cerrada de su superficie que dé la vuelta al prisma. El ciclo de Carnot es el caso particular de la sección del prisma por un plano paralelo al plano coordenado *presión-temperatura*.

Todo esto nos hace entrever la irrupción de la Termodinámica en la Electrología y la fusión de lo semejante, regido por la misma ley general: el *principio del trabajo virtual*.

***

Óptica ó Fotología.

Así como puede deducirse la Cinemática de las leyes de la Dinámica eliminando las fuerzas (cual hacemos en las ecuaciones de D'Alembert derivadas del principio del trabajo virtual que quedan reducidas á unas ecuaciones entre coordenadas, velocidades y aceleraciones), las leyes de la *Óptica* (que de los trabajos de Maxwell y Hertz se deduce no es más que una *Cinemática* de la Electricidad) se derivan de la Electrología eliminando las fuerzas. Así eliminando X, Y, Z, L, M, N de las seis ecuaciones de Maxwell (ó sea de las del principio del trabajo virtual) resultan unas ecuaciones de segundo grado, precisamente las del movimiento del éter, las ecuaciones fundamentales de la Optica, que son, por cierto, como se sabe, las mismas que las de la Cinemática de la Elasticidad.

La ecuación electrodinámica de los dieléctricos da la teoría de la propagación de la luz y de la difracción; las ecuaciones de dos dieléctricos, unidas á la de su superficie de separación, dan la reflexión y la refracción; las ecuaciones de un dieléctrico y un conductor, y la de su superficie de separación, dan la reflexión metálica....., y quedan aún á más todas las consecuencias derivadas de la Electricidad hertziana en que se han fundido la Electricidad y la Optica por la experiencia y la adivinación de Maxwell.

***

Termodinámica.

En Termodinámica el movimiento, ó mejor dicho, la *mutación* aparece bajo dos formas: la mutación física ó cambio de estado y la mutación espacial ó movimiento local (cambio de *lugar*). El cambio de estado no se refiere sólo al paso de sólido á líquido y de éste á gas; estos son sólo puntos notables en la serie *continua* de estados físicos que toma un cuerpo al absorber ó desprender cualquier cantidad de calor por pequeña que sea. Los factores de acción ó causas de tales mutaciones son la temperatura y la fuerza mecánica. La primera es la variable intensiva de la energía calorífica; su variable extensiva es la *entropía*, que juega análogo papel á la *cantidad de electricidad* en la energía eléctrica, al *camino recorrido* en la energía mecánica. Sin variación en el espacio, sin camino recorrido, no hay producción de energía mecánica; sin variación de entropía no hay producción de energía calorífica.

Muévese un cuerpo en el espacio; sus distintas posiciones son puntos de su trayectoría; mútase físicamente un cuerpo en el tiempo; sus distintos *estados* son puntos de su evolución; allá se medía la cantidad de camino recorrido; aquí la cantidad de entropía recorrida; pudiéramos decir que la entropía se confunde con la línea del tiempo, no del tiempo absoluto sino del *tiempo* de cada cuerpo, que es la sucesión de sus mudanzas; para el cuerpo en reposo no transcurre *su* tiempo; para el cuerpo inmutable el tiempo no existe, carece de sentido la palabra; la eternidad no es un tiempo infinito, es la carencia de tiempo.

No sólo bajo la forma de un cuerpo recorriendo una trayectoría se nos aparece la energía mecánica, sino también bajo la de un cuerpo cambiando de volumen, cediendo á una presión exterior que lo envuelve; claro que en el fondo, es un camino recorrido por todos los puntos del cuerpo á la vez hacia su centro y cada punto va acompañado de una fuerza, la presión en cada punto.

Esta forma es más parecida á la que sufre la energía calorífica en el cambio de estado de un cuerpo; trabajo, volumen y presión, son sinónimos de calor, entropía y temperatura. Cuando baja la temperatura ó sea la presión calorífica, aumenta la entropía ó volumen del calor.

Para un ciclo ó serie de modificaciones de un cuerpo que vuelve á las condiciones de su punto de partida como en la máquina de Carnot, el principio de Mayer, de la conservación de la energía (llamando dQ al calor suministrado, E al equivalente mecánico, dT_e al trabajo de las fuerzas exteriores y dW la variación de la fuerza viva al pasar del valor 0 al valor 1) expresa que:

$$E\,dQ = dT_e + dW.$$

Si el cuerpo no vuelve á sus condiciones primitivas, si la evolución no es periódica ó sea que la serie de sus mutaciones ó modificaciones no se cierra, pasando del estado 0 al estado 1, aparece una nueva entidad, la energía interna U, que viene á ser el equivalente calorífico de la energía potencial mecánica, y el principio de Mayer, generalizándose, se transforma en

$$E\,dQ = E\,dU + dT_e + dW.$$

En la energía interna U queda comprendido el calor latente que transforma el cuerpo y el calor sensible, utilizable para transformarlo también en trabajo.

Según el principio de Carnot-Clausius $dQ = T\,dS$ (S es la entropía) y por tanto

$$E\,d(U - TS) = dT_e + dW$$

y si la modificación se realiza á temperatura constante entre el estado *0* y el estado *1*

$$E\,(U - TS)_0^1 = \cdot\, T_e + W_0^1$$

El primer miembro es una función que juega un papel fundamental en Termodinámica, como que todas las ecuaciones de esta ciencia no hacen más que enunciar propiedades suyas; *función característica* descubierta por Massieu que define al cuerpo y de ella nos ocuparemos al tratar de la clasificación de *sujetos* ó sistemas, á que nos referíamos en nuestro número anterior. Baste por hoy saber que tiene las propiedades de una función potencial, llamada por Duhem *potencial termodinámico interno*.

La ecuación á que hemos llegado, si en lugar de aplicarla á modificaciones reales la traducimos á las modificaciones virtuales, no es ni más ni menos que el *principio del trabajo virtual*:

$$T_e + T_j - d\,F = 0.$$

Solamente que aquí el potencial es más amplio que en Mecánica; es de doble variancia. Los sistemas puramente mecánicos no ejercen sobre el medio exterior más que un solo modo de acción (el desarrollo del trabajo mecánico); los sistemas termodinámicos, como son todos los sistemas materiales reales, son capaces de ejercer dos modos de acción distintos. La función potencial que expresa aquella aptitud univariante y la que expresa aquí esta doble aptitud, gozan de análogas propiedades; cuando no hay fuerzas exteriores, en los sistemas aislados, la condición de equilibrio es que la variación de esa función sea nula.

***

Química.

Hasta aquí hemos tratado del equilibrio *externo*; vamos á pasar ahora al *interno* ó químico de los componentes que entran á formar una mezcla, cuya naturaleza depende también de los factores de acción que sobre ella obran. Aquí, á los factores presión, temperatura y tensión eléctrica hay que agregar el *potencial químico* de cada constituyente independiente diluído en la mezcla. Se entiende por tal potencial químico individual la derivada del potencial termodinámico total de la mezcla con relación á la masa del cuerpo de que se trata $\left(\frac{d\varepsilon}{dm} = P\right)$, así como la derivada de la energía ó potencial total con relación á la entropía es la temperatura $\left(\frac{d\varepsilon}{ds} = T\right)$, con relación al volumen es la presión $\left(\frac{d}{dv} = p\right)$, y con relación á la cantidad de electricidad es el voltaje ó tensión $\left(\frac{d\varepsilon}{dq} = V\right)$.

En el *principio del trabajo virtual*

$$T_e + T_j - d\,F = 0$$

no hay que hacer más que ampliar la expresión del *potencial termodinámico F*, que se refería á un solo cuerpo ó sistema homogéneamente químico, añadiendo la siguiente expresión:

$$V\,dq + P_1\,dm_1 + P_2\,dm_2 + \ldots\ldots + P_n\,dm_n\,,$$

No teniendo en cuenta la acción eléctrica, omitiendo la fuerza viva y considerando que el trabajo mecánico viene dado por la expresión $p\,.\,dv$ (presión $\times$ variación de volumen), resulta la forma en que la presenta Gibbs

$$d\,U \text{ ó } d\varepsilon = T\,ds - pdv + P_1\,dm_1 + \;\ldots\; + P_n\,dm_n\,,$$

ó sea

$$d\varepsilon = \frac{d\varepsilon}{ds}\,ds - \frac{d\varepsilon}{dv}\,dv + \frac{d\varepsilon}{dm_1}\,dm_1 + \ldots\ldots + \frac{d\varepsilon}{dm_n}\,dm_n\,,$$

la cual, como hemos dicho, es la conocida

$$T_e - d\,F = 0\,,$$

que expresa el *principio del trabajo virtual*.

En Química no hay fuerzas de inercia.

***

Matemática.

Los puntos de vista en que se colocaron los fundadores de la Dinámica, Galileo, Huygens y Newton, tuvieron una influencia enorme sobre la orientación del Análisis matemático. La intuición de Galileo de hacer depender la rapidez del cambio dinámico, ó aceleración, de su estado estático, que un *estado* de movimiento dependa únicamente del inmediatamente anterior, produjo como consecuencia el planteamiento de los problemas naturales en *ecuaciones diferenciales*, aprovechándose de las nociones de derivada y diferencial que Newton y Leibnitz entrevieron precisamente en la movilidad de las cosas y su rapidez. Poder con los datos del instante *actual* predecir lo que pasará en el instante siguiente, si bien no estén separados más que por un elemento *infinitamente pequeño* de tiempo, fué el grandioso micro-paso con el cual la mente del hombre se lanza desde el presente á lo porvenir.

Las ecuaciones de Lagrange derivadas de su principio del trabajo virtual constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden. Los trabajos á que estas ecuaciones han dado lugar, desde la época de Poisson, de Cauchy, de Pfaff, de Hamilton, de Jacobi, hasta nuestros días en que se enriquecen con los de H. Poincaré, Painlevé, Hadamard..... constituyen la historia misma de las ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Cada instante dependiendo del inmediatamente anterior, cada región puntual del espacio, de la inmediatamente próxima; tal hipótesis nos ha permitido *llevarnos la Naturaleza á casa* taquimetrada en esa clase de ecuaciones llamadas diferenciales. ¿Será ésta siempre la clave transformatoria de la Naturaleza en lenguaje analítico? Por el horizonte asoman unas *ecuaciones funcionales* en que intervienen lejanos pasados, conteniendo unas integrales que atestiguan una especie de herencia. Pero esto no constituye por hoy más que una visión vaga de los medios analíticos con que la inteligencia se apresta en lo porvenir á atacar los problemas naturales. Es el anuncio de un nuevo capítulo del Análisis matemático, que, usando términos editoriales, está hoy tan sólo *en preparación*.

No basta que podamos plantear un problema en ecuaciones; es preciso resolverlas; integrarlas, si se trata de ecuaciones diferenciales.

Los grandes genios matemáticos persiguieron la *integral* y su concepto evolucionó desde la integral geométrica primitiva de Newton y Leibnitz á la de Dirichlet, de Cauchy, de Riemann..... hasta que Painlevé da la integral, sin integrar; «una ecuación, cuya integral es uniforme (dice), se debe considerar como integrada en el sentido moderno de esta palabra; gracias á los trabajos de Weierstrass y Mittag-Leffler, se la puede definir y seguir en todo su dominio de existencia sin necesidad de hacer la integración»; tenemos todas sus propiedades, ¿á qué la integración?

Entre esos trabajos de investigación de *la integral* merecen especial mención los de Cauchy demostrando que la solución para los sistemas de ecuaciones diferenciales que arroja la Naturaleza sobre la mesa de trabajo del matemático estaba en las *funciones analíticas*, en esas funciones reales de variables complejas ó compleja de variables reales que sintetizan en sí todas las clases de funciones conocidas, algébricas y transcendentes.

La *función analítica* da el molde de términos finitos que se adapta exactamente á las funciones naturales; ella permite ser continua en todo un dominio de existencia, ella permite tomar en su frontera, en su contorno, en sus límites, la serie de valores que lo exterior, que el medio ambiente le arroje; es más, ella se determina y precisa, ella se actualiza por medio de esos valores, por la influencia de ese medio ambiente; como un cuerpo reacciona, *fenomeniza*, ante la excitación del medio ambiente.

Numerosas cuestiones de Análisis, Geometría, Mecánica, etcétera, conducen, como hemos dicho, à ecuaciones diferenciales de segundo orden, de las que las más sencillas son del tipo de las ecuaciones lineales de Laplace:

$$a \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + 2\,b \cdot \frac{du^2}{dx\,dy} + c \cdot \frac{du^2}{dy^2}$$

$$+ d \cdot \frac{du}{dx} + e\,\frac{du}{dy} + f \cdot u = 0$$

en que a, b ..... f son funciones continuas de x é y.

Según sean sus características reales ó imaginarias, son, las ecuaciones de Laplace, del tipo hiperbólico, elíptico ó parabólico. Entre las del tipo elíptico, la más célebre, de más aplicación en todas las ciencias naturales es la tan conocida $\Delta\, u = 0$. Por su intervención en los problemas, éstos se reducen á resolver el problema de los límites, de Dirichlet, ó á investigar la *función analítica* que la integra, que es lo mismo. Es el problema que se propone la Teoría de la atracción (newtoniana, eléctrica y magnética), del calor (su propagación en los medios homogéneos é isotrópos), la Hidrodinámica, la Electrostática (distribución de la electricidad sobre los cuerpos buenos conductores), la Geometría diferencial (en la *representación conforme* de una superficie sobre otra ó desarrollo de cualquier superficie sobre otra, la deformación de superficies, la teoría de las superficies mínimas), etc.

Riemann demostró que una función analítica puede ponerse bajo la forma de función compleja de dos *armónicas* ó potenciales, $U + i\,V = 0$. Las U y V son en Mecánica y Electricidad las líneas equipotenciales y las de fuerza, en Hidráulica las equipotenciales y las líneas de corriente ó función de corriente, en Termología las familias de curvas isotermas, etc.

Estas dos funciones potenciales enlazadas (de tal manera que $U = \int \frac{d\,V}{dn} ds$ y $V = -\int \frac{d\,U}{ds}\,dn$, en que n es la normal á las líneas $U =$ constante y s es tangente) tienen una significación especial en los campos de fuerza; vense en ellas las dos notables magnitudes escalares tan usadas: el *trabajo*, integral de un vector á lo largo de una línea; y el *flujo* de un vector á través de una superficie; la una, es función de fuerzas reales; la otra, función de fuerzas de inercia. Ved á una función analítica conteniendo los dos carriles sobre los que se desliza la Dinámica de todas las ciencias, la Dinámica de la Energética; y esa función analítica se pliega sumisa á lo que el medio ambiente la ordene, dejando escritas sus órdenes sobre su contorno, en su frontera, en la superficie de separación de dos regiones en que se concentra la vida en una, en que se difunde y es su contra-figura la otra; ambas tienen por límite á una línea cerrada ó superficie en que se estrellan: la una con sus ansias de extensión centrífuga hacia lo infinito, la otra en su intensión centrípeta del infinito huyendo. Finitos é infinitudes que una ecuación enlaza en sus mallas, la del *principio del trabajo virtual* á que se amolda la función analítica para recoger todo el misterio dinámico de la Naturaleza y entregarlo al matemático para que lo desentrañe.

III

Crítica de la ley.

Esa es la ley, con su proteísmo á través de todas las ciencias, teñida por cada una con el color de su luz propia.

Para enfocar sobre ella la mayor claridad posible, vamos á mostrar cómo á través de su forma más compleja, de las más complicadas relaciones con que la mezcla de ciencias puedan dotarla, se transparenta el hecho más sencillo, que ni requirió de nosotros trabajo de Razón, ni esperó de la Ciencia su enunciado. Al ver en los más complicados fenómenos retratado ese hecho intuitivo y vulgar, la desilusión se apoderará de nuestro ánimo; cuando escalando sobre los cerebros de tantos genios que hicieron progresar cada ciencia, llegábamos á la meta y en ella sintetizábamos las síntesis, pareciónos el *principio del trabajo virtual* ley sublime que el alma misma de la Naturaleza fuera; cuando veamos que á ese principio se puede llegar asomándonos al cerebro de cualquier ignorante, nos parecerá inútil tanto trabajo intelectual empleado en conquistar una verdad de tan poco precio, y comprenderemos la exclamación de Stevin al resolver el misteriosamente sencillo principio del plano inclinado: «Las maravillas no son maravillas».

«Los cuerpos pesados no se mueven más que hacia abajo»; he ahí el principio del trabajo virtual; la ley que encierra en sí todas las de la Naturaleza, no contiene más verdad que esa. Es un hecho brutal: ¿qué falta nos hizo la ciencia para escalarlo?

Vayamos ahora ofuscando la vista de la inteligencia para que en razón inversa le vaya concediendo el dictado de maravilloso, apartándose, á la par, del cerebro del ignorante. Ya no es un cuerpo el que consideramos, es un sistema de cuerpos con mil enlaces, sujeto exclusivamente á la gravedad. «No se mueve más que si la masa en conjunto baja, que si el *centro de gravedad* desciende, que si un *trabajo* se puede ejecutar». En el fondo es lo mismo que aquel hecho de un solo cuerpo; pero la inteligencia no lo ve con intuición tan clara; necesita apelar al raciocinio.

Ya no es la gravedad la fuerza única; es un conjunto de fuerzas mecánicas las que obran sobre el cuerpo ó sistema. «No se mueve más que cuando la suma de trabajos de todas es una cantidad positiva». Aquí la intuición intelectual se va esfumando; pero aún podemos recurrir á un artificio: reemplazar cada fuerza por un hilo que siga su dirección y pasando por una polea remate en un peso; queda con esto reducido al caso anterior en que sólo actuaba la gravedad.

No son ya fuerzas mecánicas; son acciones de otras formas de energía cuyo resultado es mover al cuerpo ó sistema. «Suma de trabajos = *0*.» Sustituyendo las causas por sus efectos de desplazamiento, podemos aún suponer, en su lugar, fuerzas mecánicas y reducido este caso al anterior.

No se trata ya de movimientos en el espacio de los cuerpos sino de cualidades suyas; temperaturas que varían, tensiones eléctricas que cambian, etc. «Suma de trabajos = *0*.» Toda energía varía *cayendo*, de nivel en nivel cada vez más bajo. Si estos fenómenos están enlazados de modo que no puedan variar más que en sentidos opuestos; el principio muestra, cuando la intuición no ve claro, que el *trabajo* determina y provoca el sentido del fenómeno, pero siempre diciendo: «no sucede nada, más que en el sentido en que puede suceder»; «*no ocurre nada cuando nada puede ocurrir*», como dice Mach.

Cuando de la Estática saltamos á la Dinámica, añadiendo al célebre principio las fuerzas de inercia, cuando todo lo que las circunstancias naturales determinan, y determinan de una manera única en la Naturaleza, se cumple, la ley del trabajo virtual no expresa más que «*ocurre siempre todo lo que puede ocurrir*».

La Ciencia no ha hecho más que envolver esa verdad de sentido común en su variado ropaje, y deslumbrados por éste, vemos aquélla acrecentada, mirada al través de una lente; pero la verdad es la misma, expresada por el ignorante ante un guijarro que se mueve, que expresada por Maxwell ante la urdimbre de acciones eléctricas que se distorsiona.

El máximo de claridad de un principio general. va unido al mínimo de asombro en concebirlo. Obtuvimos la intuición á costa de un desencanto; eterno sino de la naturaleza humana, para no contradecir el principio de conservación de la energía, ni siquiera en el terreno del sentimiento.

¿Pero es la conquista tan pequeña? ¿Es que después de largo rodeo no hemos hecho más que llegar á una verdad que teníamos ante nuestros ojos?

No; si hemos podido afirmar ese principio, de la Naturaleza entera, es porque la Ciencia lo ha contrastado paso á paso en todos los dominios de aquélla.

¡Qué de trabajo hasta llegar á ver que *todos* los fenómenos naturales quedan determinados en *un solo sentido!* Su enunciación por Carnot para el calor asombró al mundo.

¡Qué accidentado camino recorrió la Química hasta ver que un sistema heterógeno de cuerpos es tanto más estable *cuanto más bajo ha caído* en su energía potencial!

La independencia de los efectos, enunciada por Galileo para la Dinámica, y extendida á todas las ciencias, la cual se necesita para poder unirlos en una suma en el principio del trabajo virtual, ¿no fué una conquista enorme?

¿Quién nos aseguraba que toda la causa determinante de los fenómenos quedaba embebida por completo en sus efectos, que iban á determinar el desplegamiento de todas las fuerzas interiores disponibles para poder afirmar que la acción era exactamente igual á la reacción? Y aunque metafísicamente lo demostrásemos ¿quién nos aseguraba poder llevar á nuestra ecuación *todos* los elementos que intervenían en una y otra y no quedaba alguna eternamente velada para nosotros?

La Ciencia puso en nuestras manos todos esos elementos; sacólos á la luz en cada forma de energía, investigando todo lo que influía en los fenómenos. Y examinados y clasificados los separó en dos clases de variables: de *extensidad* y de *intensidad*, que permiten al principio del trabajo virtual adoptar una forma clara y sencilla, igual para todos sus términos.

¡Qué de trabajo para poder escribir cada sumando bajo la forma de un producto de dos factores! ¡Qué de dificultades para poder enlazarlos por el signo más sencillo, de un +! ¡Cuánta labor para llegar á fuerza de sumas á *un cero*, y para encerrar en ese cero *á un mundo*!

***

Todos los principios generales de la Mecánica se deducen unos de otros; expresan lo mismo en distintas formas. Del principio del trabajo virtual se deducen el de Hamilton *de la menor acción*, el de Gauss *de la menor violencia*, el de Huygens *de las fuerzas vivas*, los de Newton *de la inercia* de un sistema libre (conservación de la cantidad de movimiento, del movimiento del centro de gravedad y de las áreas).

Bajo la forma del principio de menor acción traspasa los límites de las ciencias físico-químicas; invade las biológicas, llega á las sociales y se constituye en norma del libre albedrío. La materia lo cumple fatalmente; el animal por instinto; el hombre por su voluntad. Nos fué dada la libertad aparejada con la inteligencia; ésta pre-ve; y la pre-visión ordena nuestros actos á su fin por el principio de menor acción, por el camino más recto, con el mínimo gasto de energía.

Enlazado el principio del trabajo virtual con el de conservación de la energía ¡qué no ha de encerrar en su ecuación! «En toda modificación de un sistema aislado, el trabajo de las fuerzas de inercia es igual al incremento de la energía interna.» Enunciado el principio de la energía en esa forma, coincide con el del trabajo virtual. Y si recordamos la expresión que dió Lagrange, de las fuerzas de inercia derivándolas de la fuerza viva, veremos que su trabajo se deduce de una función de fuerzas, así como el de las fuerzas interiores de la función potencial ó energía. *Dos funciones de fuerzas*; de las reales, una; de las ficticias de inercia, otra; y ambas evolucionando pararalelamente, siempre á igual distancia; siempre sus incrementos iguales, si no hay fuerzas exteriores; si las hay, las dos últimas aunan su acción contra la energía interna. Ésta representa al *sujeto;* las fuerzas exteriores, el *medio ambiente*; los dos polos de la vida. De la particularización de uno y otro, depende la individualización de la ley, su transformación en todas las leyes particulares de cada ciencia. Hablando en términos de Lógica, el principio del trabajo virtual es una *mayor*; sujetos y medios ambientes, una *menor*; del contraste de la primera con cada una de las segundas, resultan las *consecuencias*.

Por eso, para terminar este abocetado artículo, debemos tratar del *sujeto* y del *medio ambiente*; de los tipos de uno y otro, debidamente clasificados, para encerrar así toda la Ciencia en el máximo principio de economía, el de *menor acción* intelectual, que hasta ahí pretende llegar en su generalización el sorprendente principio del trabajo virtual.

MANUEL MALUQUER.

BIBLIOGRAFIA

Geología, por *D. Melchor de Palau*.—Un volumen con grabados intercalados en el texto, de venta al precio de 12 pesetas ejemplar.

El libro de que nos ocupamos, es el fruto de la experiencia adquirida por su autor en la enseñanza de la Geología aplicada á la Ingeniería, durante los dieciséis años que ha tenido á su cargo dicha asignatura en la Escuela de Caminos, y presenta en forma muy condensada y metódica los conocimientos necesarios para las aplicaciones de aquella Ciencia á las diversas ramas de la Ingeniería general.

Hecha excepción de la carrera de Ingenieros de Minas, no es posible para las demás que comprende la Ingeniería, dar toda la extensión que de desear fuera á la enseñanza de tan importante materia, y el autor del libro que reseñamos se ha propuesto condensar todos los conocimientos necesarios para las aplicaciones corrientes en un relativamente reducido número de páginas, tarea que exige gran dominio de la materia, á la par que un detenido estudio del método de exposición y una redacción clara y concisa, circunstancias que, á nuestro juicio, se han realizado con sumo acierto por el Sr. Palau, cuya reputación de escritor castizo es desde luego una garantía de la feliz redacción de esta obra.

Aun cuando está principalmente destinada á la enseñanza, creemos que ha de prestar gran utilidad á cuantos se dedican á las diversas aplicaciones profesionales, porque reune todo lo más importante que para dicho objeto debe conocerse de la ciencia Geológica, como se desprende de lo que á continuación se indica respecto al plan y extensión dada á las diversas partes de que consta el libro.

Después de hacer ver en unas breves consideraciones generales la importancia que para el Ingeniero entraña el estudio de la Geología, pasa el autor al de la *Morfológica*, en la que se examina la forma, distribución de continentes y mares, y las principales leyes de la morfología de la tierra.

Viene á continuación la *Geología material*, que abarca gran parte del libro, y que comprende el estudio de la Mineralogía, Fosilogía, Litología y como apéndice el de los Meteoritos.