

REVISTA DE OBRAS PUBLICAS

PUBLICACIÓN TÉCNICA DEL CUERPO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

DIRECTOR

D. MANUEL MALUQUER Y SALVADOR

COLABORADORES

LOS INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

SE PUBLICA LOS JUEVES

Dirección y Administración: Plaza de Oriente, 6, primero derecha.

Cálculo de los cambios de vía

(CONTINUACIÓN) (1)

V.—Cambios de longitud fija.

Como hemos tenido ocasión de comprobar, el problema general es indeterminado, habiendo infinidad de valores de X , Y ω compatibles con dos radios de enlace dados. El problema se determina en cuanto se introduce una condición, como sucede en los cambios rectos, en los que $\omega = 0$.

La condición más sencilla y más útil, es la constancia de la longitud: veamos las consecuencias de hacer X constan-

ellas $X_1 = X_2 = D$, ó mejor por las que resultan de eliminar D que son

$$(\gamma_1 - \gamma_0) \cos(\alpha + \omega) = (\gamma_0 - \gamma_2) \cos \gamma = (r_0 - r) (1 - \cos(\alpha + \omega - \gamma)) \quad (29)$$

De un modo análogo obtendremos las ecuaciones

$$y_0 = (D - L) \operatorname{tang} \frac{\omega}{2} \quad (30)$$

$$\rho_0 = \cos \frac{D - b - c \cos \omega}{\operatorname{sen} \omega} \quad (31)$$

$$(Y_1 - Y_0) \cos \omega = (Y_0 - Y_2) = (\rho_0 - \rho) (1 - \cos \omega) \quad (32)$$

que se deducen de las (16), (21) y (26).

Desde luego podemos observar que las ecuaciones (29)

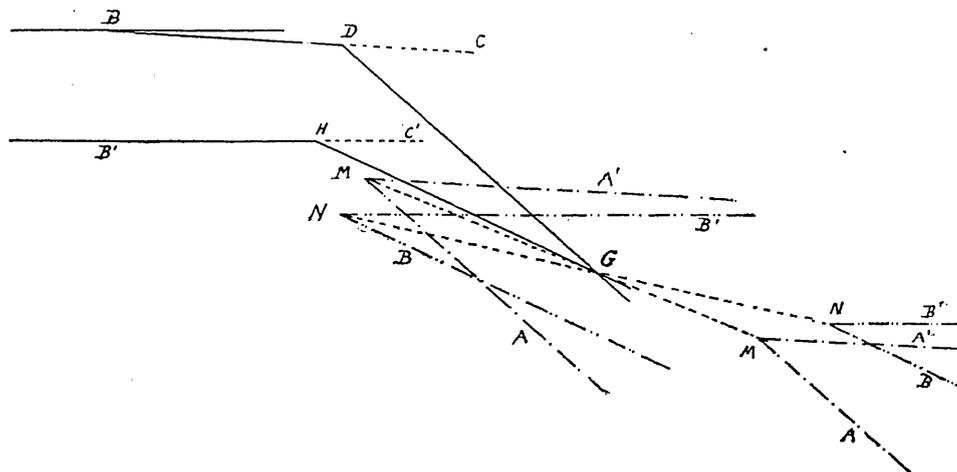


Fig. 7.ª

temente igual al valor D adoptado para el cambio recto del mismo índice.

La ecuación (14), que se convierte en

$$\gamma_0 \cos \frac{\alpha + \omega + \gamma}{2} = D \operatorname{sen} \frac{\alpha + \omega + \gamma}{2} - l \cos \frac{\alpha + \omega + \gamma}{2} - h \operatorname{sen} \frac{\alpha + \omega - \gamma}{2} \quad (27)$$

nos dará para cada valor de ω el valor γ_0 correspondiente al radio máximo; este radio γ_0 vendrá dado por la ecuación (21) transformada en

$$\gamma_0 = \frac{D - b \cos \gamma - c \cos(\alpha + \omega)}{\operatorname{sen}(\alpha + \omega) - \operatorname{sen} \omega} \quad (28)$$

y los valores extremos de Y compatibles con otro radio r se determinarán por las ecuaciones (24), (25), haciendo en

y (32) carecen de importancia práctica, porque discutiéndose valores de Y , es decir, dimensiones transversales del cambio, no interesa como en el caso del cambio recto, en que se discutían longitudes, sacrificar parte del radio máximo.

Por otra parte, de las ecuaciones (27), (30), se deduce:

$$Y_0 - y_0 = \frac{(D - N \operatorname{sen} \omega + P \cos \omega - M) \operatorname{sen} \frac{\alpha + \gamma}{2}}{\cos \frac{\omega}{2} \cos \frac{\alpha + \omega + \gamma}{2}}$$

ó bien, teniendo en cuenta las ecuaciones (18):

$$Y_0 - y_0 = \frac{(D - X_0) \operatorname{sen} \frac{\alpha + \gamma}{2}}{\cos \frac{\omega}{2} \cos \frac{\alpha + \omega + \gamma}{2}}$$

(1) Memoria presentada al Congreso Científico de Zaragoza.

y como ya hemos visto que X_0 difiere muy poco de la longitud normal del cambio recto α_0 , la diferencia $Y_0 - y_0$ será insignificante, siempre que D_0 , como sucederá casi siempre.

Tratándose, pues, de un tanteo, podremos prescindir de la ecuación (27) y quedarnos solamente con la (30) que en su forma general

$$Y = (D - L) \operatorname{tang} \frac{\omega}{2}$$

liga las dos variables Y, ω , quedando así una sola independiente.

Si la variante elegida es ω , deduciremos los radios r, ρ de las ecuaciones (21) ó de las aproximadas:

$$\gamma = \frac{D - b - c}{\operatorname{tang} \alpha - \operatorname{tang} \gamma + \operatorname{tang} \omega} \quad \rho = \frac{D - b - c}{\operatorname{tang} \omega}$$

Si la variable independiente es Y , deducimos exactamente de (30) y (31):

$$\rho = \frac{(D - b + c)(D - b - c) + Y^2}{2Y}$$

pudiendo suprimirse el término Y^2 del numerador: para averiguar el valor aproximado de r , tenemos la relación

$$\frac{r}{\rho} = \frac{\operatorname{tang} \omega}{\operatorname{tang} \alpha - \operatorname{tang} \gamma + \operatorname{tang} \omega}$$

de donde, aproximadamente:

$$r = \frac{(D - b + c)(D - b - c)}{(D - b + c)(\operatorname{tang} \alpha - \operatorname{tang} \gamma) - 2Y}$$

dos curvas auxiliares AN, HJ . El valor ρ pasa en este caso á ser un dato del problema y las ecuaciones (16) y (21)

$$(X - b) \operatorname{tang} \frac{\omega}{2} = Y$$

$$\rho \operatorname{sen} \omega = X - b - c \cos \omega$$

deberán verificarse constantemente.

Habrá, pues, un solo punto normal, determinado por las dos ecuaciones anteriores y la (14).

De las ecuaciones (16) y (21) deducimos

$$X = b + \rho \operatorname{sen} \omega + c \cos \omega$$

$$Y = \rho + c \operatorname{sen} \omega - \rho \cos \omega$$

que por sustitución en la (14) nos dan

$$\operatorname{tang} \frac{\omega}{2} = \frac{l \cos \frac{\alpha + \gamma}{2} - 2b \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2} - 2c \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}{(2\rho + l) \operatorname{sen} \frac{c + \gamma}{2} - 2(b - c) \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2}}$$

ó bien

$$\operatorname{tang} \frac{\omega}{2} = \frac{l \cos \frac{\alpha + \gamma}{2} + (b - c) \operatorname{sen} \frac{\alpha - \gamma}{2} - (b + c) \operatorname{sen} \frac{\alpha + \gamma}{2}}{(2\rho + l) \operatorname{sen} \frac{\alpha + \gamma}{2} + (b - c)(\cos \frac{\alpha + \gamma}{2} - \cos \frac{\alpha - \gamma}{2})}$$

y teniendo en cuenta las relaciones (17) y (19)

$$2 \operatorname{tang} \frac{\omega}{2} = \frac{\alpha_0 - (b + c)}{\rho - N}$$

El desarrollo del cambio tiene por valor

$$D = \rho \omega + b + c;$$

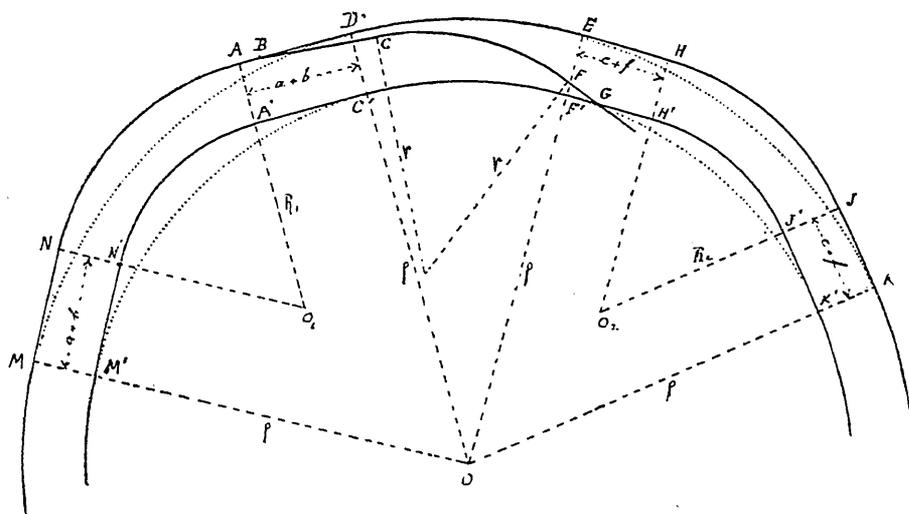


Fig. 8.

VI.—Cambios en alineación curva.

La necesidad de intercalar un cambio en una alineación curva determinada, introduce también ecuaciones de condición, que fijan ó limitan los radios de las curvas de enlace.

Puede hacerse de modo que la curva de enlace de la vía directa coincida con la curva de la alineación primitiva (figura 8.^a), salvándose entonces la desviación producida por los aparatos $A'C', F'H'$, que son rectilíneos, por medio de

si desarrollamos en serie el valor de $2 \operatorname{tang} \frac{\omega}{2}$ prescindiendo de los términos en ω^4 tendremos,

$$2\rho \operatorname{tang} \frac{\omega}{2} = \rho \omega \left(1 + \frac{\omega^2}{12} \right)$$

de donde se deduce que no se comete un error muy grande

escribiendo

$$2\rho \operatorname{tang} \frac{\omega}{2} = \rho\omega = D - (b + c)$$

y en virtud de la ecuación anterior

$$\frac{D - (b + c)}{X_0 - (b + c)} = \frac{\rho}{\rho - N}$$

ó bien

$$\frac{X_0 - D}{D - (b + c)} = \frac{-N}{\rho}$$

de donde se deduce que la variación relativa del desarrollo

del cambio es igual aproximadamente á $\frac{l}{2\rho}$.

Es más frecuente colocar los aparatos de cambio y cruzamiento de modo que sean tangentes en sus extremidades exteriores á la curva primitiva de radio R (fig. 9.^a), tendiéndose en este caso las ecuaciones

$$\begin{aligned} X &= R \operatorname{sen} \omega - f \cos \omega - a \\ Y &= R - f \operatorname{sen} \omega - R \cos \omega \end{aligned} \quad (34)$$

Pero es evidente que la curva de radio ρ , C', F' , no ocupará el espacio disponible, y no será, por consiguiente, aplicable la ecuación (16) mientras no se verifique la igualdad $a + b$

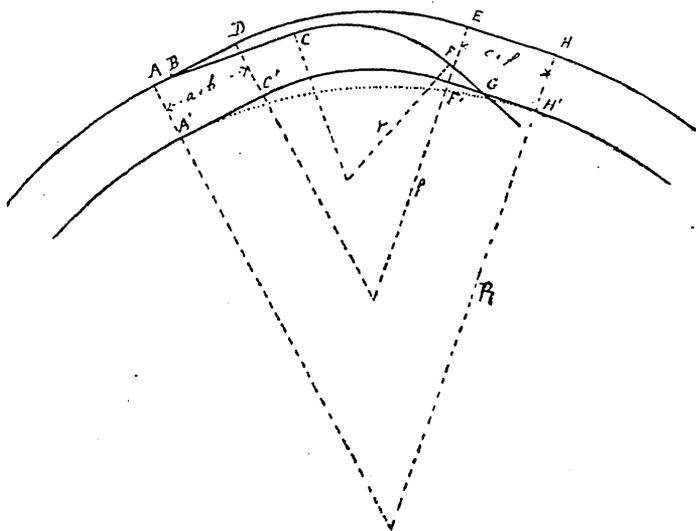


Fig. 9.^a

$= c + f$; de no ser así quedará siempre un exceso de alineación recta del lado de la más corta de estas distancias (ordinariamente $c + f$) é igual á la diferencia entre ambas.

Nada nos impide suponer incorporado este trozo de alineación recta á una de las dimensiones de los aparatos (ordinariamente á c), haciéndose así: $a + b = c + f$; con lo cual podremos aplicar la ecuación (16).

Eliminando X, Y entre las ecuaciones (34) y la (14)

$$\operatorname{tang} \frac{\omega}{2} = \frac{\left\{ \begin{aligned} l \cos \frac{\alpha + \gamma}{2} + (a + f) \operatorname{sen} \frac{\alpha + \gamma}{2} \\ - (b - c) \cos \frac{\alpha - \gamma}{2} \end{aligned} \right.}{\left\{ \begin{aligned} (2R + l) \operatorname{sen} \frac{\alpha + \gamma}{2} + (f - a) \cos \frac{\alpha + \gamma}{2} \\ + (b - c) \operatorname{sen} \frac{\alpha - \gamma}{2} \end{aligned} \right.}}$$

ó bien en virtud de las relaciones (17) (19)

$$2 \operatorname{tang} \frac{\omega}{2} = \frac{\alpha_0 + (a + f)}{R - N}$$

y suponiendo que $2 \operatorname{tang} \frac{\omega}{2} = D + a + f$

$$\frac{\alpha_0 - D}{D + (a + f)} = \frac{-N}{R}$$

la variación relativa es, pues, como en el caso anterior,

aproximadamente $\frac{l}{2R}$

Al valor del desarrollo D (que como vemos difiere muy poco del de un cambio recto) corresponde, según la primera de las ecuaciones (21), el valor máximo de r ; el de ρ es un dato en el caso del enlace por el interior, y en el otro caso se obtendrá de la segunda de las ecuaciones citadas. Pero como tenemos real ó ficticiamente

$$a + b = c + f,$$

las ecuaciones (33) y (34) se verifican al mismo tiempo y tendremos:

$$R - \rho = (a + b) \frac{1}{\operatorname{tang} \frac{\omega}{2}}$$

ecuación que una vez conocido el desarrollo del cambio, y por consiguiente ω , nos determina ρ en función de R .

El valor máximo de r se puede obtener entonces de la relación aproximada

$$r = \rho \frac{\beta}{1 + \beta} = \rho \frac{\operatorname{tang} \omega}{\operatorname{tang} \omega + \operatorname{tang} \alpha - \operatorname{tang} \gamma}$$

que también puede escribirse

$$r = \rho \frac{\omega}{\omega + \alpha - \gamma}$$

lo que equivale á suponer iguales los desarrollos $BCFG$ y $B'C'F'G'$ (figuras 4.^a, 5.^a, 6.^a), cuya diferencia sabemos que es muy pequeña.

A partir de este momento podría tantearse un valor cualquiera de r distinto del máximo, de un modo análogo á lo que se indicó en los cambios rectos; las ecuaciones (24) y (26) nos darían el mínimo de ω , y las (25) y (26) el máximo, compatibles con r .

Pero llegaríamos así á ecuaciones nada sencillas de la forma

$$A \operatorname{sen} \omega + B \cos \omega + C = 0.$$

cuya solución es

$$\operatorname{tang} \frac{\omega}{2} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - C^2} - A}{C - B}$$

resultando así cálculos demasiado largos y pesados para un tanteo. Por esta razón, es práctica general adoptar para estos cambios el desarrollo de los rectos; así, si el enlace de la curva primitiva se hace por el interior de los aparatos, tendremos:

$$\omega = \frac{D - (b + c)}{\rho}$$

y las ecuaciones (33) nos darán YX . Si, por el contrario, el enlace se hace por las juntas exteriores de los aparatos,

$$\omega = \frac{D + (a + b)}{R}$$

y las (34) determinarán X ó Y .

También se puede, y la diferencia no es muy grande, identificar D con X , y entonces las ecuaciones (33) ó (34) nos determinarán, según el caso, Y y ω .

Por último, para intercalar un cambio en una vía ya construida, se replanteará sobre el carril la posición de ambos aparatos y en función de X , Y , medidos directamente, las ecuaciones (33) ó (34) nos determinarán ω y ρ ó R .

En todo caso, el resultado final de esta parte del cálculo consiste en la fijación de los tres parámetros ω , X , Y .

VII.—Cálculo definitivo de los cambios curvos.

Hemos visto que la primera parte del cálculo de un cambio curvo tiene por objeto fijar los valores de los parámetros ω , X , Y , que determinan la posición del cruzamiento; comparando las ecuaciones (13), (15) con las (1), vemos que el problema se reduce después á calcular un cambio recto en el cual el ancho de vía es $Y + l$, y el ángulo de cruzamiento $\alpha + \omega$ y después otro en el cual $l = Y$, $\alpha = \omega$, $\gamma = 0$.

Pero la aplicación de las fórmulas de los cambios rectos supone el conocimiento previo de $\text{tang}(\alpha + \omega)$.

De las ecuaciones (13) (15), deducimos fácilmente

$$m = \frac{X \text{sen}(\alpha + \omega) - (l + Y) \cos(\alpha + \omega)}{\text{sen}(\alpha + \omega - \gamma)}$$

$$n = \frac{(l + Y) \cos \gamma - X \text{sen} \gamma}{\text{sen}(\alpha + \omega - \gamma)}$$

$$m' = X - \frac{Y}{\text{tang} \omega}$$

$$n' = \frac{Y}{\text{sen} \omega}$$

ó bien en el caso de que ω esté determinado por sus líneas trigonométricas

$$m \cos \gamma = \frac{\left\{ \begin{array}{l} X(\text{tang} \alpha + \text{tang} \omega) - (l + Y) \\ (l - \text{tang} \alpha \text{ tang} \omega) \end{array} \right\}}{\text{tang} \alpha + \text{tang} \omega - \text{tang} \gamma + \text{tang} \alpha \text{ tang} \omega \text{ tang} \gamma}$$

$$n \cos \alpha \cos \omega = \frac{Y + l - X \text{tang} \gamma}{\text{tang} \alpha + \text{tang} \omega - \text{tang} \gamma + \text{tang} \alpha \text{ tang} \omega \text{ tang} \gamma}$$

Si, por el contrario, ω viene dado en partes del radio, deduciremos fácilmente

$$m \cos \gamma = \frac{[X \text{tang} \alpha - (l + Y)] \cos \omega + [X + (l + Y) \text{tang} \alpha] \text{sen} \omega}{(\text{tang} \alpha - \text{tang} \gamma) \cos \omega + (1 + \text{tang} \alpha \text{ tang} \gamma) \text{sen} \omega}$$

$$n \cos \alpha = \frac{(l + Y) - X \text{tang} \gamma}{(\text{tang} \alpha - \text{tang} \gamma) \cos \omega + (1 + \text{tang} \alpha \text{ tang} \gamma) \text{sen} \omega}$$

y por otra parte, desarrollando en serie los valores de $\text{sen} \omega$, $\cos \omega$, hasta los términos de tercer grado

$$\text{sen} \omega = \omega - \frac{\omega^3}{6}$$

$$\cos \omega = 1 - \frac{\omega^2}{2}$$
(35)

Por último, si se trata de un cambio en alineación curva enlazado por el interior, podremos, aplicando las ecuaciones (33), escribir directamente

$$m \cos \gamma = \frac{\left\{ \begin{array}{l} (c \text{tang} \alpha + \rho) \cos \omega + (\rho \text{tang} \alpha - c) \text{sen} \omega \\ + (b \text{tang} \alpha - \rho - l) \end{array} \right\}}{(\text{tang} \alpha - \text{tang} \gamma) \cos \omega + (1 + \text{tang} \alpha \text{ tang} \gamma) \text{sen} \omega}$$

$$n \cos \alpha = \frac{\left\{ \begin{array}{l} -(\rho + c \text{tang} \gamma) \cos \omega + (c - \rho \text{tang} \gamma) \text{sen} \omega \\ + (\rho + l - b \text{tang} \gamma) \end{array} \right\}}{(\text{tang} \alpha - \text{tang} \gamma) \cos \omega + (1 + \text{tang} \alpha \text{ tang} \gamma) \text{sen} \omega}$$

$$m' = b + \rho \text{tang} \frac{\omega}{2}$$

$$n' = c + \rho \text{tang} \frac{\omega}{2}$$

ó bien, si el enlace es por el exterior, y en virtud de las (34)

$$m \cos \gamma = \frac{\left\{ \begin{array}{l} -(R + l + a \text{tang} \alpha) \cos \omega + [(R + l) \text{tang} \alpha - a] \\ \text{sen} \omega + (R - f \text{tang} \alpha) \end{array} \right\}}{(\text{tang} \alpha - \text{tang} \gamma) \cos \omega + (1 + \text{tang} \alpha \text{ tang} \gamma) \text{sen} \omega}$$

$$n \cos \alpha = \frac{\left\{ \begin{array}{l} (f \text{tang} \gamma - R) \cos \omega - (R \text{tang} \gamma + f) \text{sen} \omega \\ + (R + l + a \text{tang} \gamma) \end{array} \right\}}{(\text{tang} \alpha - \text{tang} \gamma) \cos \omega + (1 + \text{tang} \alpha \text{ tang} \gamma) \text{sen} \omega}$$

$$m' = R \text{tang} \frac{\omega}{2} - a.$$

$$n' = R \text{tang} \frac{\omega}{2} - f.$$

El resto del cálculo es idéntico al de los cambios rectos; el valor de $\text{tang} \frac{\alpha + \omega - \gamma}{2}$ puede obtenerse aplicando la fórmula

$$\text{tang} \frac{a + b + c}{2} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} \text{tang} a + \text{tang} b + \text{tang} c - \text{tang} a \\ \text{tang} b \text{ tang} c \end{array} \right\}}{2 + \text{tang}^2 a + \text{tang}^2 b + \text{tang}^2 c - \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \text{tang} a + \text{tang} b + \text{tang} c \\ (36)^2 \end{array} \right\}}$$

que es suficientemente aproximada y evita el empleo de tablas.

VIII.—Representación esquemática.

Si en el cambio recto (fig. 3.^a) trazamos los ejes de las vías MP y MS siendo M el punto común de los ejes situado en la línea de las puntas de las agujas; P , S las proyecciones de la punta del cruzamiento sobre cada uno de ellos, y N el punto de concurso después de la desviación, encontraremos fácilmente:

$$NS = NP = \frac{l}{2 \text{tang} \frac{\alpha}{2}}$$

y teniendo en cuenta que MP es el desarrollo del cambio

$$MN = D - \frac{l}{2 \text{tang} \frac{\alpha}{2}}$$

ANTONIO PRIETO Y VIVES.

(Concluirá.)