dos pequeños espejos en forma de cuña colocados en el interior, en los cuales se refleja el horno ó cuerpo caliente que se observa; si el instrumento está enfocado, la imagen que se ve tiene la apariencia del esquema central de la figura 6.ª, en el cual la circunferencia exterior representa el contorno de los espejos, la superficie rayada la imagen del orificio de la pared del horno, y el círculo negro la espiral; si no se ha enfocado bien, la imagen observada tiene el aspecto de uno de los esquemas de la derecha ó de la izquierda y se corrige este defecto con el piñón F.—Ω.

ESTUDIO DE LA CATENARIA

Y DE SUS APLICACIONES MECÁNICAS

POR D. JOSÉ TOUS Y BIAGGI

Académico de la Real de Ciencias y Artes de Barcelona.

(CONTINUACIÓN)

Propiedades y aplicaciones mecánicas.

Es la catenaria una curva esencialmente mecánica, y de esta esencia derivan todas sus propiedades geométricas, y siendo tantos los cuerpos y las construcciones en que la única fuerza que sobre ellas actúa es la de la gravedad, de aquí que se preste á muchas aplicaciones. Es verdad que su forma exige que el cuerpo sea absolutamente flexible, cosa que en la realidad nunca sucede; pero son muchos los casos de equilibrio de cuerpos que se aproximan á este estado ó que, á lo menos, la asimilación á él contribuye á formarse un concepto aproximado de sus condiciones de equilibrio.

Si un hilo se suspende por sus extremos en dos puntos cualesquiera, la línea que forma es, entre todas las que pueda formar, la que tiene el centro de gravedad más bajo. Este principio es tan esencial, como el del estado de equilibrio, que generalmente se toma como punto de partida; los dos son inseparables; enunciar el uno es indirectamente enunciar el otro, y ambos parece que son formas particulares de un enunciado más general, que parece ser determinar el estado de un hilo absolutamente flexible sujeto por sus extremos y sometido á la acción de la gravedad sin que ésta pueda modificar dicho estado. Dados los conceptos de centro de gravedad y de estado de equilibrio, se desprende: 1.°, que si la gravedad modificara el hilo sería moviendo en su dirección al centro de gravedad, por razón de efecto ó causa, de modo que si por hipótesis no lo puede modificar, no lo podrá bajar. El teorema de d'Alambert sobre el movimiento del centro de gravedad de un sistema material y el teorema del trabajo virtual aplicados á este caso son formas análogas de la misma proposición; 2.°, que si la gravedad no puede hacer bajar el centro de gravedad del hilo como causa, no producirá efecto, y como se supone que el hilo no está sometido á ninguna otra causa modificadora ó fuerza, el hilo permanecerá siempre en el mismo estado, al que llamamos forma de equilibrio. Son, pues, dos enunciados de un mismo principio: el usual, ó como forma de equilibrio, es más sensible; el que parte del centro de gravedad, más ideal.

La posición del centro de gravedad pocos autores la tratan; Moseley, en la obra citada, la determina para el caso particular de una catenaria cuya cuerda es horizontal. En general, y para un arco cualquiera de ella, cuyas abscisas sean x'' x', sus coordenadas valdrán:

$$x_g = \frac{\int_{x''}^{x'} xd\,.\,s}{s'-s''} \qquad y_g = \frac{\int_{y''}^{y'} yd\,.\,s}{s'-s''}$$

ó sea poniendo en vez de y y de $d\,.\,s$ sus valores, en el supuesto de tomar el parámetro igual á la unidad:

$$x_g = \frac{\frac{1}{2}\int_{x''}^{x'} x\left(e^{x}+e^{-x}\right)d\,.\,x}{s'-s''} \qquad y_g = \frac{\frac{a}{4}\int_{y''}^{y'}\left(e^{x}+e^{-x}\right)^2 d\,.\,x}{s'-s''}$$

ecuaciones que, integradas por los métodos usuales, dan los valores de las coordenadas que se buscan; pero para que sirva de muestra de la facilidad con que estos problemas referentes á la catenaria se resuelven por las funciones hiperbólicas, se integran aquí poniéndolas bajo esta forma, con lo que se reducen á

$$x_g = \frac{\int_{x''}^{x'} x\cos\text{h.}\,xd\,.\,x}{s-s''} \qquad y_g = \frac{\int_{x''}^{x'} \cos\text{h}^2.\,xd\,.\,x}{s'-s''}$$

que integrando por partes dan fácilmente:

$$\int x\cos\text{h.}\,xdx = x\,\text{sen h.}\,x - \int \text{sen h.}\,xdx =$$

$$= x\,\text{sen h.}\,x - \cos\text{h.}\,x = xs - y$$

$$\int \cos\text{h}^2.\,xdx = \text{sen h.}\,x\cos\text{h.}\,x - \int \text{sen h}^2.\,xd\,.\,x$$

y recordando que: $\cos\text{h}^2.\,x - \text{sen h}^2.\,x = 1$ resulta:

$$\int \text{sen h}^2.\,xdx = \int(\cos\text{h}^2.\,x - 1)dx = \int \cos\text{h}^2.\,x - x$$

que sustituída á la anterior da en seguida:

$$2\int \cos\text{h}^2.\,xd\,.\,x = \text{sen h.}\,x\cos\text{h.}\,x + x = sy + x$$

lo que da para las coordenadas buscadas:

$$(36)\quad x_g = \frac{x's' - x''s'' - y' + y''}{s'-s''}$$

$$(37)\quad y_g = \frac{s'y' - s''y'' + x' - x''}{2(s'-s'')}$$

que para el caso de una catenaria cuya cuerda sea horizontal, por ser $x'' = -x' = \frac{d}{2}$, $s'' = -s'$ y también $y'' = y'$, siendo d la cuerda y poniendo $2s' = s$ resultarán:

$$x_g = 0; \qquad (38)\quad y_g = \frac{2s'y' + 2x'}{2(s'+s')} = \frac{y'}{2} + \frac{d}{2s}$$

llamando f á la flecha de la curva, que vale $y' - 1$ por haber tomado el parámetro igual á la unidad, y restando ésta de ambos miembros, el primero es la distancia del centro de gravedad al vértice y vale:

$$(39)\quad \frac{f-1}{2} + \frac{d}{2s}$$

En toda catenaria las tensiones del hilo en sus extremos, y en general en dos puntos cualesquiera, concurren en un punto de la vertical que pasa por el centro de gravedad del hilo comprendido entre dichos puntos. Cosa evidente desde el momento en que se supone el hilo en equilibrio bajo la acción de su peso y la de dichas tensiones, que en el caso de considerar los puntos extremos son las reacciones de los apoyos.

Como se ha indicado, fué esta la propiedad de que partieron los primeros geómetras que determinaron la forma de la catenaria, refiriendo una de dichas tensiones al punto más bajo de la línea.

De aquí se puede deducir fácilmente la tensión del hilo en un punto cualquiera, pues tomando un trozo de hilo desde el punto más bajo en el que la tensión T_0 se ha visto al principio que valía pa, hasta otro punto cualquiera en el que la tensión es T, el triángulo rectángulo formado por las tres fuerzas en equilibrio T_0, ps, T (fig. 1.ª) da

$$(40)\quad T=\sqrt{(pa)^2+(ps)^2}=p\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}$$
$$=p\,\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)=py$$

propiedad notable y sencilla, la de que la tensión en un punto cualquiera sea igual á la de un peso de hilo de longitud igual á la ordenada correspondiente á dicho punto.

De la ecuación (20) resulta que el área comprendida entre los ejes coordenados, una ordenada cualquiera, y el arco correspondiente es proporcional á este arco y, en general, igual á este arco multiplicado por el parámetro, de donde resulta que si en cada punto de la catenaria hubiera suspendido un peso proporcional al producto $y \,.\, d\,.\, x$, ó sea á un elemento vertical de área, por ser éste proporcional á $d\,.\,s$, sería como si este elemento pesara más por unidad de longitud, y como la forma de equilibrio se ha visto al principio que no depende para nada de este coeficiente, resulta que la catenaria es la forma de equilibrio para una cuerda ó hilo así cargado. La ecuación (40) da la tensión en un punto cualquiera, poniendo por valor de p, no sólo el peso de la unidad de cuerda, sino además otro igual al peso cargado en la forma antes dicha sobre la misma unidad. Sería este caso, para darle una forma visible, aquel en que á lo largo de la cuerda se suspendieran otras cuerdas, de cualquier peso por unidad de longitud, si bien constante, cuyos extremos llegaran al eje de abscisas y que tuvieran un diámetro $d\,.\,x$.

Si la catenaria, sea en la forma usual, sea en la que se acaba de describir, se proyecta rectangular ú oblicuamente sobre un plano oblicuo al suyo, la proyección de todas las fuerzas que actúan en el plano primitivo forma en el proyecto un sistema de fuerzas en equilibrio también, formando la proyección una curva de la misma naturaleza que la primitiva. Esto se desprende de que, siendo todas las abscisas rectas paralelas y las ordenadas también, las proyecciones de las unas y de las otras guardarán con las primitivas unas mismas relaciones, de modo que si se llama α la relación de una ordenada con su proyección y ε la de una abscisa con la suya respectiva se tendrá, representando por x_1 y_1 las coordenadas de la curva proyectada,

$$y=\alpha y_1;\qquad x=\varepsilon x_1,$$

que sustituídas en la ecuación general de la catenaria darán

$$\alpha y_1=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{\varepsilon x_1}{a}}+e^{-\frac{\varepsilon x_1}{a}}\right)$$

y representando $\frac{a}{\varepsilon}$ por c, la ecuación de la curva proyectada es

$$y_1=\frac{\varepsilon}{\alpha}\,\frac{c}{2}\left(e^{\frac{x_1}{c}}+e^{-\frac{x_1}{c}}\right),$$

es decir, una curva cuyas ordenadas son iguales á las de una catenaria de parámetro c multiplicadas por la relación $\frac{\varepsilon}{\alpha}$, que en el caso de ser $\varepsilon=\alpha$, sería sencillamente una nueva catenaria de parámetro c.

En el caso en que la intersección de los dos planos fuera paralela al eje de abscisas, éstas se proyectarían en verdadera magnitud, ε sería igual á la unidad, y la ecuación de la curva proyectada sería

$$y_1=\frac{1}{\alpha}\,\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

es decir, que sólo las ordenadas de la curva proyectante vendrían modificadas por el factor $\frac{1}{\alpha}$. Asimismo todas las fuerzas paralelas al eje de abscisas no serán modificadas en la proyección, mientras que las paralelas al eje de ordenadas en la proyeción serán las primitivas multiplicadas por el mismo factor $\frac{1}{\alpha}$.

Si una catenaria, sea usual, sea en la forma de curva cargada que antes se ha descrito, se considera invertida colocando arriba el eje de abscisas y la curva abriéndose hacia abajo, es decir, tomando hacia abajo los valores de las ordenadas, el hilo en vez de estar tenso estará comprimido; pero sin que varíen en nada sus condiciones de equilibrio, lo único que habrá será que estará, por razón de su absoluta flexibilidad, en estado de equilibrio inestable. De aquí que la catenaria sea la forma de equilibrio de un arco sometido á la acción de su propio peso ó, por las razones dichas antes, á la de una carga vertical sobre cada elemento de arco proporcional á éste ó, lo que es lo mismo, á la superficie comprendida entre él, sus ordenadas y el eje de abscisas.

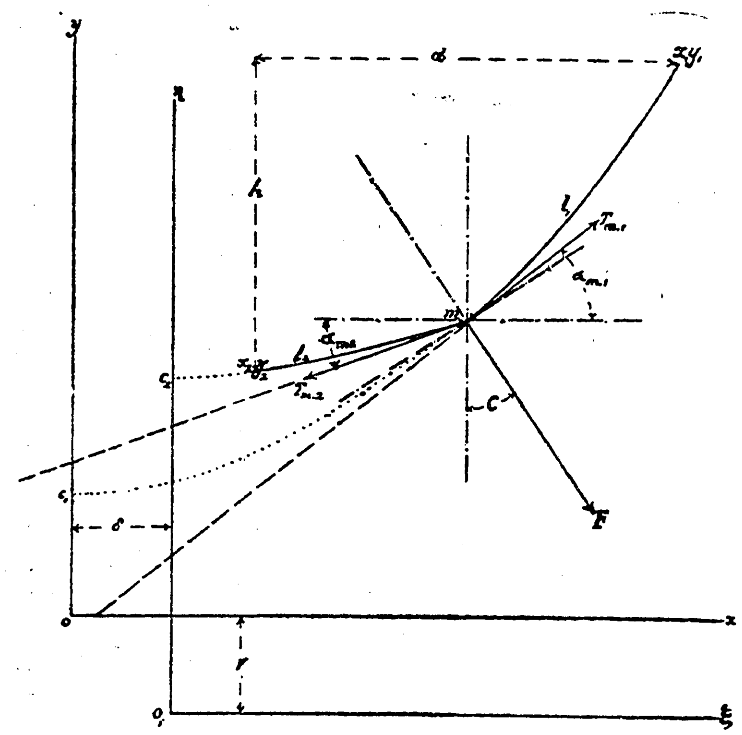
Igual consideración puede hacerse respecto á las curvas obtenidas transformando las catenarias por proyección sobre un plano oblicuo al suyo.

Así, pues, la catenaria es la forma de equilibrio que permite construir un arco con el mínimum de espesor de sus dovelas, y también la forma de equilibrio de un arco sometido á cargas sólo verticales (sin que produzcan ningún empuje horizontal), cuya intensidad fuera proporcional al arco ó á la superficie comprendida entre éste y el eje de abscisas colocado ahora en la parte superior. Asimismo, la catenaria transformada por proyección es la forma de equilibrio de un arco sometido á un sistema de fuerzas paralelas, de intensidad proporcional á la superficie comprendida entre el arco, la proyección del eje de abscisas y la de las dos ordenadas extremas del arco. Estos casos son sensiblemente iguales á los de los muros de sillería descansando sobre arcos cuyas dovelas reciban la carga verticalmente, sin empujes laterales.

Un problema de utilidad se presenta en la determinación de los esfuerzos sobre una cuerda ó cable sujeto por sus extremos y sometido á una fuerza en un punto intermedio y que obra en un plano vertical. Se presenta esta cuestión en los transportes aéreos por cable fijo.

Las condiciones de equilibrio pueden establecerse observando que la primitiva cuerda formará ahora dos catenarias, una desde uno de los puntos extremos al punto de aplicación de la fuerza, y otra desde éste al otro punto extremo, en la misma forma que si el punto de aplicación de la fuerza fuera un punto fijo de la cuerda.

fig. III



Sea m este punto (fig. 3.ª) y F la fuerza que actúa sobre él formando con la vertical el ángulo ε. Sean $(x_1 y_1)$ y $(x_2 y_2)$ los puntos fijos ó extremos de la cuerda, cuyo desnivel sea h y d su distancia horizontal, y represéntese por l_1 la longitud horizontal de la cuerda $m(x_1 y_1)$ y por l_2 la longitud $m(x_2 y_2)$. El primer trozo de cuerda formará una catenaria cuyos ejes serán ox, oy, y llámese a á su parámetro; igualmente, el segundo trozo formará otra, cuyos ejes serán $o\xi$, $o\eta$, y se representarán por γ y δ sus distancias á los ejes ox, oy, siendo paralelos unos á otros, el parámetro de esta segunda catenaria se representará por a_2. Además, sean $\alpha_{m.1}$ y $\alpha_{m.2}$ los ángulos que las tangentes á cada una de las dos catenarias que concurren en el punto m forman con los ejes de abscisas y s_m, σ_m, las longitudes de catenaria $c_1 m$, $c_2 m$, contadas desde el punto m á los respectivos ejes de ordenadas.

El punto m se halla en equilibrio bajo la acción de las tres fuerzas F, $T_{m.1}$, tensión de la cuerda superior dirigida en la dirección de la tangente á la catenaria superior, en el punto m, y $T_{m.2}$, tensión de la cuerda inferior en las análogas condiciones. Proyectando estas fuerzas en la dirección de F y en otra perpendicular á ella, resultan como condiciones de equilibrio:

$$T_{m\,1} \operatorname{sen}(\alpha_{m.1} - \varepsilon) + T_{m\,2} \operatorname{sen}(\varepsilon - \alpha_{m.2}) = F$$

$$T_{m\,1} \cos(\alpha_{m.1} - \varepsilon) - T_{m.2} \cos(\varepsilon - \alpha_{m.2}) = 0$$

en las que, según la ecuación (40) $T_{m.1} = p y_m$: $T_{m.2} = p \eta_m$, y según las (4), (5), introduciendo en ellas los parámetros $a_1 a_2$:

$$\operatorname{sen} \alpha_{m.1} = \frac{s_m}{y_m} : \cos \alpha_{m.1} = \frac{a_1}{y_m} : \operatorname{sen} \alpha_{m\,2} =$$

$$= \frac{\sigma_m}{\eta_m} : \cos \alpha_{m.2} = \frac{a_2}{\eta_m},$$

que sustituídas en las ecuaciones de equilibrio anteriores, desarrollando y reduciendo dan

$$\text{(a)} \quad s_m \cos \varepsilon - a_1 \operatorname{sen} \varepsilon + a_2 \operatorname{sen} \varepsilon - \sigma_m \cos \varepsilon = \frac{F}{p}$$

$$\text{(b)} \quad a_1 \cos \varepsilon + s_m \operatorname{sen} \varepsilon - a_2 \cos \varepsilon - \sigma_m \operatorname{sen} \varepsilon = 0$$

Para completar las condiciones del problema, además de las dos condiciones expresadas por las anteriores ecuaciones, falta establecer que el punto m pertenece indistintamente á cada una de las dos catenarias, y que de éstas, la una ha de pasar por el punto $(x_1 y_1)$ y la otra por el $(x_2 y_2)$, á un desnivel h y distancia horizontal d.

Las relaciones de unas coordenadas con las otras vienen dadas por las ecuaciones:

$$\eta = y - \gamma \quad : \quad \xi = x - \delta$$

siendo negativo el valor de γ en la figura.

La ecuación (6) aplicada al caso presente da las siguientes ecuaciones:

$$y_1 = \sqrt{a_1^2 + (s_m + l_1)^2} : y_m = \sqrt{a_1^2 + s_m^2} :$$

$$\eta_2 = y_2 - \gamma = \sqrt{a_2^2 + (\sigma_m - l_2)^2} : \eta_m = y_m - \gamma = \sqrt{a_2^2 + \sigma_m^2}$$

y el pertenecer el punto m á ambas catenarias exige que:

$$y_m = \eta_m + \gamma, \text{ ó sea que:}$$

$$\sqrt{a_1^2 + (s_m + l_1)^2} = \gamma + \sqrt{a_2^2 + \sigma_m^2}$$

$$x_m = \xi + \delta, \text{ ó sea que:}$$

$$a_1 l.n \frac{\sqrt{a_1^2 + s_m^2} + s_m}{a_1} = a_2 l.n \frac{\sqrt{a_2^2 + \sigma_m^2} + \sigma_m}{a_2} + \delta$$

(poniendo en esta última, por x. sus valores dados por la ecuación (7) y las anteriores).

(Continuará.)

CONTADORES DE MOTOR

SU EMPLEO Y SU CONTRASTE

Consideraciones particulares sobre los modelos Isaria Werke de Munich.

(Conclusión.)

De tiempo en tiempo (cada dos años próximamente) se comprobará la marcha de los contadores para proceder, en caso necesario, á una nueva verificación si se registran errores por defectos importantes, se principiará por limpiar los dos cojinetes, principalmente el de rubíes, para desembarazarlos del aceite solidificado que pudieran contener. Al mismo tiempo se pulimentará el rótulo con ayuda de un pequeño vástago de madera rodeada de tela embebida en bencina.