

REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS

PUBLICACION TECNICA DEL CUERPO DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

DIRECTOR

D. MANUEL MALUQUER Y SALVADOR

COLABORADORES

LOS INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

SE PUBLICA LOS JUEVES

Dirección y Administración: Plaza de Oriente, 6, primero derecha.

CÁLCULO DE RESISTENCIA DE PLACAS

Son varias las fórmulas que se han deducido para este objeto; la mayoría, empíricas y aplicables en casos restringidos; dando todas el máximo espesor correspondiente a los puntos que están en peores condiciones elásticas.

Por el método que exponemos á continuación se pueden calcular las placas, cualquiera que sea la forma de su contorno y manera de estar solicitada; determinándose la ley de variación, de los espesores máximos en función de las coordenadas de los puntos.

Empezaremos por el estudio de la placa circular.

PLACA CIRCULAR APOYADA EN SU CONTORNO Y CON CARGA UNIFORME

Sea una placa de radio r , solicitada por una carga de p kilogramos por metro cuadrado, uniformemente extendida.

Si estuviera apoyada únicamente en dos puntos diametralmente opuestos, el problema sería muy fácil, pues se trataría de una pieza prismática. La dificultad estriba en que por estar apoyada en todo su contorno no se puede aplicar el procedimiento de las vigas.

Para resolver la cuestión, supondré primero que el apoyo se realiza solamente en dos elementos diferenciales ds diametralmente opuestos y que únicamente actúa la carga $pr^2 d\alpha$, correspondiente á los dos triángulos cuya base son los elementos ds .

Esta placa entera, apoyada de ese modo y sometida á dicha carga, es una pieza apoyada en sus extremos y, por lo tanto, se podrá hallar la carga de trabajo producida en un punto cualquiera M , de su sección transversal CD .

Dicha reacción molecular tendrá dos componentes: uno MN , normal á la sección CD , y otra, situada en ella, siendo ambas infinitesimales.

Hecho esto, supondremos que la placa se apoya ahora en otros dos elementos ds , contiguos á los anteriores, y del mismo modo se tendrá la carga de trabajo en M , que ahora pertenecerá á la sección transversal $C'D'$.

Repetiendo para todos los elementos ds en que puede descomponerse el contorno, y componiendo todas esas acciones ejercidas en M , tendré la resultante, que será la

carga de trabajo total producida en dicho punto, cuando la placa con toda su carga esté apoyada en el contorno.

Para hacer el cálculo, adoptaremos un eje polar PQ que pase por el punto arbitrario M . Sea α el ángulo que fija la

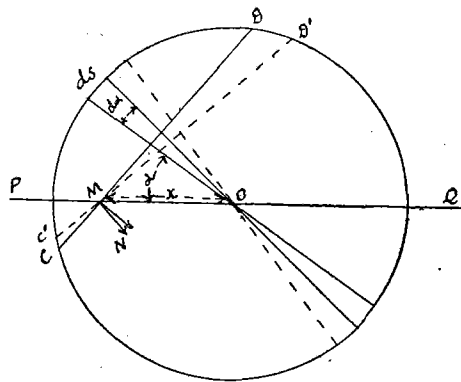


Fig. 1.^a

posición de ds , x la distancia OM que determina la posición de M y e el espesor (incógnita) que se debe tener en dicho punto.

En los elementos de apoyo, las reacciones valen:

$$X = \frac{pr^2 d\alpha}{2}.$$

Momento flector en la sección CD :

$$M = \frac{pr^2 d\alpha}{2} (r - x \cos \alpha) - \int_{x \cos \alpha}^r px' dx' (x' - x \cos \alpha) = \frac{pd\alpha}{6} (r^3 - x^3 \cos^3 \alpha).$$

En dicha sección transversal, se tendrá:

$$\frac{I}{v} = \frac{1}{6} CD \times e^2$$

y como

$$CD = 2 \sqrt{r^2 - x^2 \cos^2 \alpha}; \quad \frac{I}{v} = \frac{e^2}{3} \sqrt{r^2 - x^2 \cos^2 \alpha}$$

La componente, normal á CD , de la carga de trabajo infinitesimal es:

$$dt_1 = \frac{pd\alpha (r^3 - x^3 \cos^3 \alpha)}{2e^2 \sqrt{r^2 - x^2 \cos^2 \alpha}}$$

Como la resultante de estas acciones tendrá la dirección MO , proyectemos sobre dicha dirección y resultará:

$$dt = \frac{p d\alpha (r^5 - x^5 \cos^5 \alpha)}{2e^2 \sqrt{r^2 - x^2 \cos^2 \alpha}} \cos \alpha$$

La componente de la carga de trabajo situada en la sección CD , se hallará del siguiente modo:

$$A_m = \frac{pr^2 d\alpha}{2} - \int_{x \cos \alpha}^r px' dx' = \frac{px^2 \cos^2 \alpha}{2} d\alpha.$$

Componente situada en la sección:

$$dC = \frac{3A_m}{2e \times CD} = \frac{3px^2 \cos^2 \alpha}{8e \sqrt{r^2 - x^2 \cos^2 \alpha}} d\alpha$$

Así, pues, la reacción molecular total en M , tendrá los componentes, una en la dirección MO cuyo valor es:

$$t = \int_0^\pi \frac{p d\alpha (r^5 - x^5 \cos^5 \alpha) \cos \alpha}{2e^2 \sqrt{r^2 - x^2 \cos^2 \alpha}} =$$

$$= \frac{p}{e^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(r^5 - x^5 \cos^5 \alpha)}{\sqrt{r^2 - x^2 \cos^2 \alpha}} \cos \alpha d\alpha$$

y otra en la dirección vertical, cuyo valor es:

$$C = \frac{3p}{8e} \int_0^\pi \frac{x^2 \cos^2 \alpha}{\sqrt{r^2 - x^2 \cos^2 \alpha}} d\alpha = \frac{3px^2}{4e} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \alpha d\alpha}{\sqrt{r^2 - x^2 \cos^2 \alpha}}$$

De estas dos expresiones sacaremos el valor de e y como la placa deberá estar en buenas condiciones elásticas, los valores de t y c deberán ser iguales á las cargas prácticas R_1 y R_1'' ; de estos dos valores de e , el mayor será el que se adopte, y será el espesor que se dará á la placa en el punto M .

Los citados valores son:

$$a) \quad e^2 = \frac{p}{R_1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^5 - x^5 \cos^5 \alpha}{\sqrt{r^2 - x^2 \cos^2 \alpha}} \cos \alpha d\alpha$$

y

$$b) \quad e = \frac{3px^2}{R_1''} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \alpha d\alpha}{\sqrt{r^2 - x^2 \cos^2 \alpha}}$$

Las expresiones subintegrales son del tipo de las funciones elípticas, que para integrarlas hay que acudir al desarrollo en serie.

Efectuando el desarrollo, integrando y reduciendo, resulta:

$$a') \quad e^2 = \frac{p}{R_1} \left[r^2 + \frac{x^2}{3} - \frac{3\pi x^5}{16r} + \frac{x^4}{5r^2} - \frac{5\pi x^8}{64r^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{x^6}{7r^4} - \frac{105\pi x^7}{2048r^5} + \dots \right]$$

$$b') \quad e = \frac{3px^2}{4R_1''} \left[\frac{\pi}{4r} + \frac{3\pi x^2}{32r^3} + \frac{15\pi x^4}{256r^5} + \frac{175\pi x^6}{4096r^7} + \dots \right]$$

Vamos á representar gráficamente estas dos ecuaciones, que son las leyes de variación de los espesores, en función de las coordenadas x de los diferentes puntos con respecto al centro.

Las dos ecuaciones están representadas respectivamente por las curvas ABC y EOF .

La ordenada OB , que es el máximo espesor que debe

darse á la placa, se obtiene haciendo $x = 0$ en la ecuación a) y su valor exacto es:

$$e^2 = \frac{pr^2}{R} \text{ de donde } e = r \sqrt{\frac{p}{R}}$$

El valor $PA = QC$ del espesor en los bordes, podríamos hallarlo haciendo $x = r$ en a'); pero de este modo tendríamos un valor aproximado, puesto que es un desarrollo

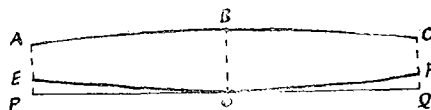


Fig. 2.^a

en serie; sin embargo, podemos hallar el valor exacto haciendo $x = r$ en a), pues entonces se puede integrar en forma finita.

En efecto:

$$e^2 = \frac{r^2 p}{R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \alpha - \cos^5 \alpha}{\sin \alpha} d\alpha = \frac{r^2 p}{R} \left[1.2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos^3 \alpha}{3} - \cos \alpha \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r^2 p}{R} \left(\frac{4}{3} - 1.2 \right)$$

ó sea

$$e = r \sqrt{\frac{\frac{4}{3} - 1.2}{R} p}$$

El valor $PE = QF$ del espesor en los bordes, para que en virtud de la ecuación b') esté la placa en buenas condiciones, también puede hallarse exactamente sin hacer uso de la serie; pues en efecto: al estar sucesivamente la placa apoyada en los elementos ds y con la carga $pr^2 d\alpha$, el esfuerzo cortante en estos apoyos será $\frac{pr^2 d\alpha}{2}$, luego la reacción

molecular por este concepto es $\frac{3pr^2 d\alpha}{2reda}$ y como ha de ser igual á la carga práctica R_1'' , el espesor en los bordes debe ser: $e = \frac{3pr}{4R_1''}$ que es el valor de la ordenada $PE = QF$.

Viendo los valores

$$PE = \frac{3pr}{4R_1''} \text{ y } PA = \frac{r}{\sqrt{R}} \sqrt{\left(\frac{4}{3} - 1.2\right) p}$$

se puede comprobar que PA es mucho mayor que PE , y, por tanto, todas las ordenadas de la curva ABC son mayores que las de EOF .

Esta última curva no tiene, pues, objeto; lo que nos dice que las máximas cargas de trabajo son producidas por flexión y no por esfuerzo cortante.

Resumiendo podemos decir:

Que en una placa circular de radio r apoyada en su contorno y con una carga de p kilogramos por metro cuadrado, la ley de variación de los espesores está dada por la ecuación a'). El máximo espesor debe corresponder al centro y el mínimo á los bordes, siendo los valores exactos de estos espesores respectivamente:

$$(1) \quad e_1 = r \sqrt{\frac{p}{R}}$$

$$(2) \quad e_2 = \frac{r}{\sqrt{R}} \sqrt{p \left(\frac{4}{3} - 1.2 \right)} = 0,806 r \sqrt{\frac{p}{R}}$$

Ya se ve que la ley de variación de los espesores es muy lenta.

PLACA CIRCULAR EMPOTRADA EN SU BORDE Y CON CARGA UNIFORME

Dada la manera de descomponer la carga y elementos de apoyo que se ha adoptado en el caso de la placa apoyada, si se plantea la ecuación de la deformación después de integrada, resulta un espesor infinito en los bordes. Esto es natural: pues como el momento de empotramiento es infinitamente pequeño de primer orden (por serlo el momento flector) y la sección de empotramiento también es infinitamente pequeña del mismo orden (pues es $erda$), resultará que la carga de trabajo será finita para cada uno de los elementos de carga, luego la suma de esas reacciones, que es la integral entre 0 y π , resultará infinita.

Para resolver el problema en este caso supondré, como ocurre en la realidad, que el empotramiento no se realiza en la línea del borde, sino en una zona plana. Entonces el momento de empotramiento es como antes, pero la sección resistente no es la infinitamente pequeña $reda$, sino la finita AB .

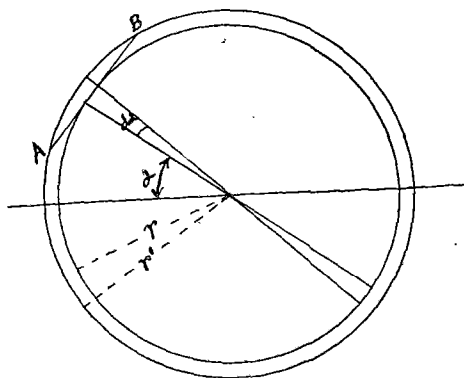


Fig. 3.^a

El radio exterior de la placa puede ser arbitrario, aunque su magnitud debe exceder al r en una cantidad lo suficiente para realizar el empotramiento.

Llamando $d\mu$ el momento de empotramiento, se tendrá

$$EI \frac{d^2z}{dx^2} = M + d\mu \quad \text{como} \quad I = \frac{e^3}{6} \sqrt{r'^2 - x'^2}$$

$$\frac{Ee^3}{6} \frac{d^2z}{dx'^2} = pda \frac{r^3 - x'^3}{6 \sqrt{r'^2 - x'^2}} + d\mu \frac{1}{\sqrt{r'^2 - x'^2}}$$

$$(a) \quad Ee^3 \frac{dz}{dx'} = pda \left(r^3 \arcsen \frac{x'}{r'} + \frac{x'^3}{3} \sqrt{r'^2 - x'^2} + \frac{2r'^3}{3} \sqrt{r'^2 - x'^2} \right) + 6d\mu \arcsen \frac{x'}{r'} + C.$$

Como para $x' = 0$ y $x' = r$ es $\frac{dz}{dx'} = 0$ se tendrá

$$C = -\frac{2r'^3}{3} pda \quad \text{y} \quad d\mu = -pda \left(\frac{r^3}{6} - \frac{2r'^3}{9\pi} \right)$$

En un punto cualquiera de la placa que diste x del centro, la reacción molecular proyectada en la dirección de la resultante será:

$$dt = \frac{pda}{6} \frac{(r^3 - x^3 \cos^3 \alpha) - pda \left(\frac{r^3}{6} - \frac{2r'^3}{9\pi} \right)}{\frac{1}{3} e^3 \sqrt{r'^2 - x^2 \cos^2 \alpha}} \cos \alpha =$$

$$= \frac{\frac{2r'^3}{9\pi} - \frac{x^3 \cos^3 \alpha}{6}}{\frac{1}{3} e^3 \sqrt{r'^2 - x^2 \cos^2 \alpha}} p \cos \alpha da$$

La ley de variación de los espesores se sacará despejando e en esta ecuación después de integrada; pero los espesores que más interesan son en el centro y en los bordes.

Para el primero tenemos:

$$dt = \frac{\frac{2r'^3}{9\pi} p \cos \alpha da}{\frac{1}{3} e^3 r'}; \quad t = 2 \frac{2r'^3 p}{3\pi e^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha da = \frac{4r'^3 p}{3\pi e^2}$$

espesor en el centro:

$$e = 2r' \sqrt{\frac{p}{3\pi R}} \quad (3)$$

Para los bordes:

$$dt = \frac{pda \left(\frac{2r'^3}{9\pi} - \frac{r^3 \cos^3 \alpha}{6} \right)}{\frac{e^3}{3} \sqrt{r'^2 - r^2 \cos^2 \alpha}} \cos \alpha.$$

$$t = \frac{4r'^3 p}{3\pi e^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \alpha da}{\sqrt{r'^2 - r^2 \cos^2 \alpha}} - \frac{r^3 p}{e^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 \alpha da}{\sqrt{r'^2 - r^2 \cos^2 \alpha}}$$

Estas integrales hay que hacerlas por desarrollo en serie

$$t = \frac{4r'^3 p}{3\pi e^2} \left(1 + \frac{r^2}{3r'^2} + \frac{r^4}{5r'^4} + \frac{r^6}{7r'^6} + \dots \right) -$$

$$- \frac{r^3 p}{e^2 r'} \left(\frac{3}{2.4} \frac{\pi}{2} + \frac{r^2}{2r'^2} \frac{3.5}{2.4.6} \frac{\pi}{2} + \dots \right)$$

Ya hemos dicho que entre los radios r y r' se puede dar una relación arbitraria, con tal que esa zona sea capaz de verificar el empotramiento. Para llegar á una fórmula que dé explícitamente el valor de e , ejecutando las operaciones, pondré, por ejemplo, la relación $r' - r = \frac{r}{10}$, que en general, será suficiente para que el empotramiento tenga lugar.

De este modo, verificando las operaciones indicadas:

$$t = -0,1361 \frac{r^3 p}{e^2}.$$

Prescindiendo del signo que para nada afecta, el espesor en los bordes deberá ser:

$$(4) \quad e = 0,37 r \sqrt{\frac{p}{R}}$$

Comparando el espesor en el centro, con el de los bordes, se ve que el primero es mayor que el segundo, al contrario de lo que ocurre en las vigas, en las que la mayor sección corresponde al empotramiento. Por tanto, cuando se quiera calcular una placa de espesor constante, empotrada, la fórmula que habrá de aplicarse es la (3).

PLACA CIRCULAR APOYADA EN SU BORDE Y SOMETIDA Á UNA FUERZA AISLADA EN EL CENTRO

Siendo r el radio y F la fuerza, supondré, como antes, que los elementos de apoyo son sucesivamente los elementos ds del contorno.

La fuerza F la descompondremos en fuerzas infinitesimales dF proporcionales á los sectores cuyo arco es ds en la forma siguiente:

$$\frac{F}{\pi r^2} = \frac{dF}{r^2 d\alpha} \text{ de donde } dF = \frac{F d\alpha}{\pi}.$$

El momento flector en un punto de coordenada x , será:

$$M = \frac{F d\alpha}{2\pi} (r - x \cos \alpha)$$

y la reacción molecular diferencial proyectada en la dirección de la resultante:

$$dt = \frac{\frac{F d\alpha}{2\pi} (r - x \cos \alpha)}{\frac{e^2}{3} \sqrt{r^2 - x^2 \cos^2 \alpha}} \cos \alpha = \frac{3F d\alpha (r - x \cos \alpha) \cos \alpha}{2\pi e^2 \sqrt{r^2 - x^2 \cos^2 \alpha}}$$

Como para el punto x que se considera, la carga de trabajo ha de ser igual al coeficiente de resistencia R , resultará:

$$R = \frac{3F}{\pi e^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r - x \cos \alpha}{\sqrt{r^2 - x^2 \cos^2 \alpha}} \cos \alpha d\alpha$$

De donde

$$e^2 = \frac{3F}{\pi R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r - x \cos \alpha}{\sqrt{r^2 - x^2 \cos^2 \alpha}} \cos \alpha d\alpha.$$

El espesor en el centro se obtendrá de

$$e^2 = \frac{3F}{\pi R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha d\alpha = \frac{3F}{\pi R},$$

del cual resulta:

$$(5) \quad e = \sqrt{\frac{3F}{\pi R}}.$$

Haciendo $x = r$, tenemos:

$$\begin{aligned} e^2 &= \frac{3F}{\pi R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \cos \alpha d\alpha = \\ &= \frac{3F}{\pi R} \left[1. \sin \alpha - 1. \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{3F}{\pi R} \left[1. 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3F}{\pi R} (1 - 1.2); \end{aligned}$$

espesor en los bordes:

$$(6) \quad e = \sqrt{\frac{3F}{\pi R}} \sqrt{1 - 1.2} = 0.555 \sqrt{\frac{3F}{\pi R}}.$$

Se observa, como propiedad interesante, que en una placa circular con carga aislada en su centro, el espesor que debe darse en el centro y en los bordes es independiente del radio y sólo depende de la fuerza y del coeficiente de resistencia.

PLACA EMPOTRADA Y CON UNA FUERZA AISLADA EN SU CENTRO

$$\frac{E e^3}{6} \frac{d^2 z}{dx'^2} = \frac{\frac{F d\alpha}{2\pi} (r - x')}{\sqrt{r'^2 - x'^2}} + \frac{d\mu}{\sqrt{r'^2 - x'^2}}.$$

Integrando una vez esta ecuación resulta:

$$(8) \quad \frac{E e^3}{6} \frac{dz}{dx'} = \frac{F d\alpha}{2\pi} \left(r \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x'}{r'} + \sqrt{r'^2 - x'^2} \right) + \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x'}{r'} \times d\mu + C,$$

que con la condición de ser $\frac{dz}{dx'} = 0$ para los valores $x' = 0$ y $x' = r'$, se obtiene:

$$C = \frac{F r'}{2\pi} d\alpha \quad \text{y} \quad d\mu = \frac{F d\alpha}{\pi} \left(\frac{r'}{\pi} - \frac{r}{2} \right).$$

La reacción diferencial máxima tendrá por valor:

$$dt = \frac{M + d\mu}{\frac{I}{v}} = \frac{3F}{\pi e^2} \frac{\frac{r'}{\pi} - \frac{x \cos \alpha}{2}}{\sqrt{r'^2 - x^2 \cos^2 \alpha}} \cos \alpha d\alpha.$$

Integrada ésta, y poniendo en vez de t la carga práctica R , podremos sacar el valor de e , ley de variación de los espesores en función de x .

El espesor en el centro, que es el máximo que debe darse á la placa, es:

$$e^2 = 2 \frac{3F}{\pi^2 R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \alpha d\alpha = \frac{6F}{\pi^2 R};$$

de donde

$$(7) \quad e = \sqrt{\frac{6F}{\pi^2 R}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{6F}{R}}$$

El espesor en los bordes ya sabemos que se obtiene haciendo $x = r$ en el valor de dt .

Es necesario, como en el caso de carga uniforme, definir la zona de empotramiento, dando una relación entre r y r' . Varía muy poco este valor del correspondiente al centro que hemos hallado, siendo menor que este último.

FLECHAS DE LAS PLACAS CIRCULARES

Vamos á determinar la flecha que toman estas placas en sus distintas maneras de estar solicitada.

Integrando la ecuación (8) correspondiente al caso de una placa empotrada con carga uniforme, tenemos:

$$\begin{aligned} E e^3 z &= (r^2 p d\alpha + 6 d\mu) \int \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x'}{r'} dx' + \\ &+ \frac{p d\alpha}{3} \left[\int x'^2 \sqrt{r'^2 - x'^2} dx' + \right. \\ &\left. + 2r'^2 \int \sqrt{r'^2 - x'^2} dx' - 2r'^3 x' \right] + C_1 \end{aligned}$$

ó lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned} E e^3 z &= p d\alpha \left[\frac{4r'^5}{3\pi} \left(\operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x'}{r'} + \sqrt{r'^2 - x'^2} \right) + \right. \\ &+ \frac{7r'^3 x' \sqrt{r'^2 - x'^2}}{24} + \frac{3r'^4}{8} \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x'}{r'} + \frac{x'^5}{12} \sqrt{r'^2 - x'^2} \left. \right] - \\ &- \frac{2}{3} r'^3 x' p d\alpha + C_1 \end{aligned}$$

Determinando la constante (para $x' = r'$, $z = 0$).

$$C_1 = -\frac{3\pi r'^4}{16} p d\alpha$$

El valor de z para $x' = 0$ es:

$$z_0 = \frac{r'^4 p d\alpha}{E e^5} \left(\frac{4}{3\pi} - \frac{3\pi}{16} \right)$$

Esta es la flecha infinitesimal correspondiente á cada elemento de carga, luego el valor de la flecha efectiva es:

$$(8) \quad f = \frac{r'^4 p}{E e^5} \left(\frac{4}{3} - \frac{3\pi^2}{16} \right) = -0,5172 \frac{r'^4 p}{E e^5}$$

Cuando la placa esté apoyada en lugar de empotrada, haciendo $d\mu = 0$ en la ecuación última que da el valor de z , y determinando la constante resulta;

$$C_1 = -r'^4 p d\alpha \left(\frac{11\pi}{16} - \frac{2}{3} \right)$$

y como ahora $r' = r$, el valor de la flecha será:

$$(9) \quad f = \frac{r^4 p}{E e^5} \left(\frac{5\pi}{3} - \frac{11\pi^2}{16} \right) = -1,549 \frac{r^4 p}{E e^5}$$

Si se trata de una placa solicitada por una fuerza aislada, partiremos de la ecuación (8) é integrándola resulta:

$$\frac{E e^5 z}{6} = \frac{F d\alpha}{\pi} \left[\left(\frac{r'^2}{4} + \frac{r' x'}{\pi} \right) \arcsen \frac{x'}{r'} + \left(\frac{x'}{4} + \frac{r'}{\pi} \right) \sqrt{r'^2 - x'^2} - \frac{r' x'}{2} \right] + C_1$$

Para valor de la constante, determinado como antes, se tiene:

$$C_1 = -\frac{F r'^2 d\alpha}{8}$$

La ordenada diferencial en el centro es:

$$z_0 = \frac{6 F r'^2 d\alpha}{E e^5} \left(\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{8} \right)$$

y la flecha

$$(10) \quad f = \frac{6 F r'^2}{E e^5} \left(\frac{1}{\pi} - \frac{\pi}{8} \right) = -0,4464 \frac{F r'^2}{E e^5}$$

Comparando este valor con el (8), se ve que para una carga aislada, equivalente á otra uniforme, la flecha que toma la placa es algo más de doble.

En el caso de apoyo sin empotramiento, operando del mismo modo que empleamos para deducir la (9), se obtiene para valor de la flecha

$$(11) \quad f = \frac{3 F r'^2}{E e^5} \left(2 - \frac{3\pi}{4} \right) = -1,065 \frac{F r'^2}{E e^5}$$

Como es natural, este valor es superior al anterior en que existía empotramiento.

Hecho ya el estudio de la placa circular en sus diversos modos de estar sometida á la acción de fuerzas, vamos á tratar de resolver el problema en el caso general, cualquiera que sea la forma del contorno.

El procedimiento que se empleará es en todo igual al expuesto anteriormente, en el caso de las placas circulares.

Siendo $r = f(\alpha)$ la ecuación del contorno, referida al eje polar pq que pasa por el centro de gravedad o , consideran-

do como puntos de apoyo los sucesivos elementos diferenciales, se hallará la reacción X en A .

El momento flector diferencial en un punto cualquiera M , será:

$$M = X(r - r_0 \cos \alpha) - \int_{r_0 \cos \alpha}^r p r' d r' d \alpha (r' - r \cos \alpha)$$

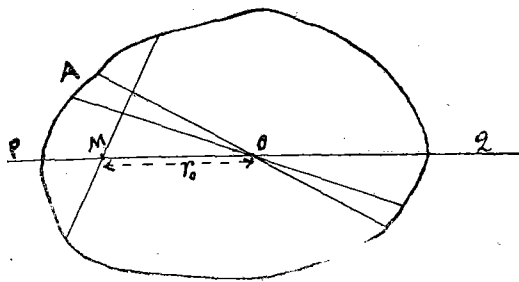


Fig. 4.a

De la ecuación del contorno sacaremos el valor de la cuerda CD , que será:

$$CD = \varphi(r_0, \alpha).$$

De modo que

$$dt = \frac{M \cos \alpha}{\frac{1}{6} \varphi(r_0, \alpha) e^2} \text{ é integrando } t = \int_0^\pi \frac{M \cos \alpha}{\frac{1}{6} \varphi(r_0, \alpha) e^2}$$

La ley de variación de los espesores, será:

$$e^2 = \frac{6}{R_1} \int_0^\pi \frac{M \cos \alpha}{\varphi(r_0, \alpha)}.$$

La determinación de la flecha y el espesor, en el caso de estar la placa empotrada, cualquiera que sea su contorno, ya se ve que puede hacerse de modo idéntico al expuesto en las de forma circular sin más que sustituir á la ecuación de la circunferencia, la de la curva que se considere.

PLACAS POLIGONALES

Cuando el contorno de la placa es de forma poligonal cualquiera, el procedimiento á seguir es el indicado en el caso general, pero cuando el polígono tiene dos á dos los lados paralelos, resulta más sencillo, pues podremos considerar como elementos de apoyo los pares de lados diametralmente opuestos en lugar de la descomposición infinitesimal.

Haremos una aplicación de esto á la placa de contorno rectangular.

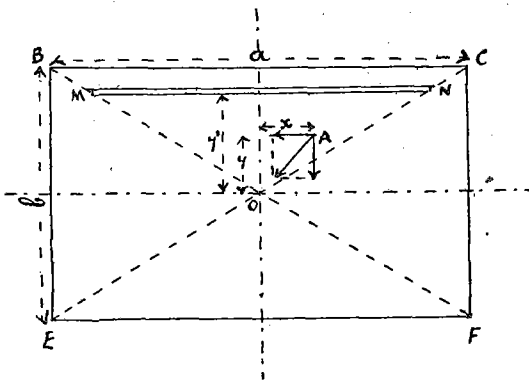


Fig. 5.a

Sea p la carga uniformemente extendida, y a, b los lados del rectángulo. Consideraré, primero, el caso de estar apoyada en el contorno.

Considerando la carga correspondiente á los espacios triangulares $OB C$ y OEF con los lados de apoyo BC y EF , la reacción en estos es:

$Y = \frac{pab}{4}$, y el momento flector en el punto arbitrario A :

$$M = \frac{pab}{4} \left(\frac{b}{2} - y \right) - \int_y^{\frac{b}{2}} p \times MN (y' - y) dy'.$$

Pero

$$MN = 2 \frac{\overline{BC}}{b} y' = \frac{2ay'}{b}$$

luego

$$\begin{aligned} M &= \frac{pab}{4} \left(\frac{b}{2} - y \right) - \int_y^{\frac{b}{2}} p \frac{2ay'}{b} (y' - y) dy' = \\ &= \frac{pab}{4} \left(\frac{b}{2} - y \right) - \frac{2pa}{b} \left[\frac{y'^3}{3} - y \frac{y'^2}{2} \right]_y^{\frac{b}{2}} = \\ &= \frac{pa}{3} \left(\frac{b^3}{8} - \frac{y^3}{b} \right) \end{aligned}$$

La componente t , normal á MN , de la tensión en A , será:

$$t_1 = \frac{\frac{pa}{3} \left(\frac{b^3}{8} - \frac{y^3}{b} \right)}{\frac{1}{6} ae^2} = \frac{p(b^3 - 8y^3)}{4be^2}.$$

Cuando se considere como elemento de carga, los correspondientes á los lados CF y BE como apoyos, la tensión será:

$$t_2 = \frac{p(a^3 - 8x^3)}{4ae^2}.$$

La carga de trabajo total en A será, pues,

$$T = \sqrt{t_1^2 + t_2^2} = \frac{p}{4e^2} \sqrt{\frac{(b^3 - 8y^3)^2}{b^2} + \frac{(a^3 - 8x^3)^2}{a^2}}.$$

Por tanto, la superficie, ley de variación de los espesores en función de las coordenadas de los puntos está representada por la ecuación:

$$e^2 = \frac{p}{4R} \sqrt{\frac{(a^3 - 8x^3)^2}{a^2} + \frac{(b^3 - 8y^3)^2}{b^2}}.$$

Como puede verse, el espesor debe decrecer desde el centro á los bordes, y el correspondiente al centro, que es el mayor, será:

$$(12) \quad e = \sqrt{\frac{p}{4R}} \sqrt[4]{a^4 + b^4}.$$

Estudiaremos ahora la placa rectangular empotrada.

Siendo μ el momento de empotramiento en BC y haciendo la descomposición como antes, tenemos:

$$M = \frac{pa}{3} \left(\frac{b^2}{8} - \frac{y^2}{b} \right) + \mu.$$

Aplicando la ecuación de las deformaciones

$$\frac{1}{12} Eae^3 \frac{d^2z}{dy^2} = \frac{pa}{3} \left(\frac{b^2}{8} - \frac{y^2}{b} \right) + \mu,$$

que integrada una vez resulta:

$$\frac{dz}{dy} = \left(\frac{pb^2}{2Ee^3} + \frac{12\mu}{Eae^3} \right) y - \frac{p}{Ebe^3} y^2 + C$$

en la que imponiendo las condiciones de tangencia horizontal en el centro y borde; $C = 0$

$$\mu = -\frac{pab^2}{32}$$

De modo que

$$t_1 = \frac{\frac{pa}{3} \left(\frac{b^2}{8} - \frac{y^2}{b} \right) - \frac{pab^2}{32}}{\frac{1}{6} ae^2} = \frac{p(b^3 - 32y^3)}{16be^2}$$

Análogamente

$$t_2 = \frac{p(a^3 - 32x^3)}{16ae^2}$$

Luego como $T = \sqrt{t_1^2 + t_2^2}$, sacando de ésta el valor de e , se tendrá:

$$e^2 = \frac{p}{16R} \sqrt{\frac{(a^3 - 32x^3)^2}{a^2} + \frac{(b^3 - 32y^3)^2}{b^2}}$$

que es la ley de variación de los espesores.

El máximo debe corresponder á los vértices del rectángulo y su valor es:

$$(13) \quad e = \sqrt{\frac{3p}{16R}} \sqrt[4]{a^4 + b^4}$$

Para la determinación de la flecha que resulta en la placa empotrada por la acción de la carga p , se integrará otra vez la ecuación diferencial y determinada la constante, el valor de z para $y = 0$ es:

$$z_y = -\frac{3pb^4}{320Ee^5}.$$

De modo análogo

$$z_x = -\frac{3pa^4}{320Ee^5},$$

luego el valor de la flecha es:

$$(14) \quad f = -\frac{3p}{320Ee^5} (a^4 + b^4).$$

Si la placa está simplemente apoyada no hay más que suponer $\mu = 0$, y resulta:

$$(15) \quad f = -\frac{9p}{160Ee^5} (a^4 + b^4),$$

que es seis veces mayor que el anterior.

A. PEÑA BOEUF.

Alumno de cuarto año de la Escuela de Caminos.