

PUENTE DE LA PRESA (NAVARRA)⁽¹⁾

POR

ALFONSO PEÑA BŒUF,

Ingeniero de Caminos.

Construído este puente, de hormigón armado, para la nueva carretera de Lecumberri á Hernani, sobre el río Urumea, se hicieron recientemente las pruebas oficiales por nuestro querido compañero D. Manuel Echeverría, Director de carreteras de Navarra, á quien estamos agradecidos por su cooperación, que tanto nos ha ilustrado, en la ejecución de la obra.

El puente se compone de dos arcos paralelos de 41,50 metros de luz, distanciados 3 metros, sobre los que carga, por intermedio de pilares, el tablero, formado por dos vigas continuas, enlazadas por un forjado y con dos volados de 1,50 metros.

El proyecto, adjudicado en concurso por la Diputación foral, resulta prolijo para ser publicado en una Revista, por lo que exponemos únicamente un extracto de la Memoria, cuyos cálculos están inspirados, principalmente, en las obras del Sr. Zafra.

Forjado.—Para repartir la presión y dar la conveniente trabazón al sistema, se ha dispuesto, además de la armadura transversal, otra de menor cuantía, longitudinal.

Adoptando una longitud de repartición $l = 180$ cm., y suponiendo unas profundidades $c = 20$ cm., $c' = 19$ para las barras principales y de repartición, respectivamente, calcularemos el forjado para el caso de que dos carros de 6.000 kilogramos se crucen, guardando un espacio entre ellos de 50 centímetros.

El momento á que deben resistir las barras secundarias, vale

$$M = 3.000 \frac{180 - 2l}{800} = 525 \text{ kg.-m.},$$

suponiendo un espesor de afirmado de 20 centímetros.

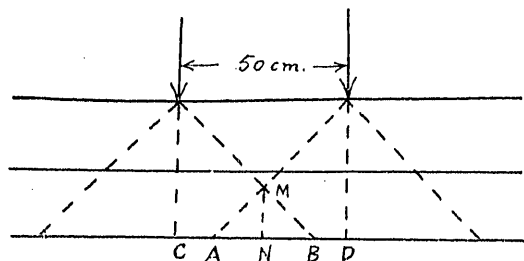
Para el momento específico $\mu = 11$

$$qac'^2 = 47,73 \quad qac = 2,51 \text{ cm}^2 \quad q = \frac{2,51}{78 \times 19} = 0,00169$$

resultando para el hormigón una carga

$$II = 20,24 \text{ kg./cm}^2$$

Puede ocurrir que en las zonas de repartición de las dos ruedas próximas (una de cada carro) al repartir la presión, haya una zona de solape, en la que no sabemos si la fuerza unitaria es mayor ó menor que en el resto.

Fig. 1.^a

(1) Esta obra ha merecido la distinción de que figuren sus fotografías en la clase de «Hormigón armado» de la Escuela de Ingenieros de Caminos, entre las que se consideran modelos de construcción. Felicitamos sinceramente á nuestra vez al distinguido compañero, autor de tan interesante trabajo, Sr. Peña.—(N. de la R.)

Veamos:

$$AB = CB - CA = 28 \text{ cm.} \quad MN = \frac{AB}{2} = 14.$$

La presión en AB es:

$$2 \times \frac{3.000}{78} = 76,92 \text{ kg./cm}^2$$

produciendo una resultante total,

$$R = 76,92 \times AB = 2.153,76 \text{ kg.}$$

Si esta fuerza se la quisiera repartir en 180 centímetros se verificaría

$$M = 2.153,76 \frac{180 - 40}{800} = 376,9$$

$qac^2 = 34,27$, $qac = 2,44 \text{ cm}^2$ que es menor que la calculada antes (2,51).

Como el ancho de repartición es de 2 ($l + c$) = 78 centímetros, corresponde, por metro, una sección

$$\frac{2,51}{78} \times 100 = 3,21 \text{ cm}^2$$

que se puede distribuir en siete varillas de 8 milímetros.

La armadura principal está sometida á las siguientes cargas:

Por el firme (en 1,80 metros), por metro lineal de forjado, $1,80 \times 0,20 \times 1.800 = 648$ kilogramos.

Por el hormigón, $1,80 \times 0,23 \times 2.400 = 993,6$ kilogramos.

Por la armadura secundaria, 4 kilogramos.

Por su peso propio, suponemos 10 kilogramos.

En total, 1.655,6 kilogramos.

Momento de semiempotramiento:

$$\frac{1}{10} 1.655,6 \times 9 = 1.490 \text{ kg.-m.}$$

Momento de sobrecarga:

$$3.000 \times 1,5 - 3.000 \times 0,25 = 3.750 \text{ kg.-m.}$$

Este último es, suponiendo la pieza apoyada, pero al existir semiempotramiento, debemos poner

$$\frac{3.750 \times 8}{10} = 3.000 \text{ kg.-m.}$$

Sumando:

$$M = 4.490 \text{ kg.-m.}$$

$qac^2 = 449$, $\alpha = 22,45 \text{ cm}^2$; con una cuantía

$$q = \frac{22,45}{180 \times 20} = 0,00623.$$

$$n = -rq + \sqrt{r^2 q^2 + 2qr} = 0,349.$$

La carga del hormigón

$$II = \frac{600 M}{ac^2 \times n(3-n)} = 40,44 \text{ kg./cm}^2$$

y la de la armadura

$$A = r \frac{1-n}{n} II = 1.128,28.$$

La resultante total del hormigón vale 45,2 kg./cm², contando la flexión transversal y la repartición.

La sección α puede distribuirse en 6 ● de 17 milímetros en que no es de temer el deslizamiento, porque las continuamos para los volados.

Del esfuerzo cortante no hay que ocuparse, pues la carga de desgarramiento es muy pequeña.

$$D = \frac{3.034,6}{100 \times 23} \times \frac{3}{2 - 0,349} = 1,49 \text{ kg./cm}^2.$$

Volados.—Momento de sobrecarga, sobre la parte afirmada,

$$M_1 = 3.000 \times 0,75 = 2.250.$$

Momento de sobrecarga sobre las aceras (300 kg./m²)

$$M_2 = 225 \times 1,125 = 253,13.$$

Suponiendo un ancho de repartición de 1,40 metros, y un espesor de afirmado de 12 centímetros en los mordientes y 14 centímetros el valor medio, los momentos de carga permanente por el firme y el hormigón valen:

$$M_3 = 0,14 \times 1,40 \times 0,75 \times 1.800 \times 0,375 = 99,22$$

$$M_4 = 0,20 \times 1,40 \times 1,50 \times 0,75 \times 2.400 = 756.$$

$$\text{Total: } 3.358,35 \text{ kg.-m.},$$

A la extensión de repartición $2(f + c) = 60 \text{ cm.}$ corresponde esa sección, luego por metro será

$$\alpha = \frac{2,2}{60} \times 100 = 3,66 \text{ cm}^2,$$

que puede distribuirse en 8 barras de 8 mm. ($s = 4 \text{ cm}^2$).

Vigas.—Dos clases de vigas tiene el tablero: unas rectas y otras poligonales. Estas últimas corresponden al último tramo de la izquierda y se han dispuesto en esa forma porque, dadas las condiciones del terreno, la entrada al puente por aquel lado debe formar una curva muy cerrada (18 metros de radio), según el trazado de la carretera. Empezaremos por calcular las vigas rectas.

Formando un sistema de siete tramos, podemos conside-



y contando con la barandilla y armaduras, pondremos por exceso

$$M = 3.400 \text{ kg.-m.}$$

$$\text{Para } \mu = 10 \quad \alpha = qac = 17 \text{ cm}^2.$$

Con la misma cuantía del forjado central (0,00623), tiene que ser el ancho de repartición:

$$a = \frac{17}{0,00623 \times 20} = 136,44 \text{ cm.}$$

que es muy aproximada á la que habíamos supuesto (140).

Calcularemos la armadura secundaria para repartir la presión de 3.000 kilogramos en 140 centímetros. Poniendo esa armadura á una distancia máxima del paramento superior, $c' = 18 \text{ cm.}$, el valor del momento es:

$$M = 3.000 \frac{140 - 2f}{800} = 435 \quad \mu = 11 \quad \alpha = \frac{435}{11 \times 18} = 2,2 \text{ cm}^2.$$

rar, con gran aproximación, que cada viga está en las condiciones de semiempotramiento, con el coeficiente $\frac{1}{10}$.

Suponiendo un carro en la posición central, arrastrado por mulas, de 500 kilogramos, á las distancias consignadas en el formulario de carreteras, se produce un momento estático.

$$M_1 = 3.500 \times 3,5 - 500 \times 2,75 = 10.875 \text{ kg.-m.}$$

El momento de semiempotramiento valdrá

$$\frac{8}{10} M_1 = 8.700 \text{ kg.-m.}$$

La carga de personas sobre las aceras da un momento

$$M_2 = \frac{1}{10} 225 \times 7^2 = 1.102,50 \text{ kg.-m.}$$

La carga permanente vale:

CARGA POR METRO	Kilogs.
Volados..... $0,20 \times 1 \times 1,50 \times 2.400 =$	720
Forjado central. $0,23 \times 1 \times 1,50 \times 2.400 =$	828
Peso viga..... $0,78 \times 1 \times 0,25 \times 2.400 =$	468
Firme..... $0,16 \times 1 \times 2,25 \times 1.800 =$	648
	2.664

Tomaremos por
exceso $P =$
2.700 kg.

Esta carga produce el momento:

$$M_s = \frac{1}{10} 2.700 \times 7^2 = 13.230 \text{ kg.-m.}$$

Momento total $M = 23.032,50 \text{ kg.-m.}$

Con armadura disimétrica $\mu = 9$.

$\frac{M}{\mu} = 2.559,10$; para $c = 90 \text{ cm.}$, $\alpha = 28,43 \text{ cm}^2$, $q = 0,01$,
 $q' = 0,003$, $a = \frac{28,43}{0,01 \times 90} = 31,6 \text{ cm}$, $n = 0,394$. La pro-
fundidad de la fibra neutra es $nc = 35,46 \text{ cm}$.

La armadura superior tendrá por sección $A' = q' h =$
 $0,003 \times 2.844 = 8,53 \text{ cm}^2$.

Con una distancia al paramento superior de $n''c =$
 $0,079 \times 90 = 7,11 \text{ cm}$.

La carga unitaria del hormigón es 45 kilogramos y la de
las armaduras superior é inferior

$$A' = 15 \frac{n'}{n} H = 540 \text{ kg./cm}^2$$

$$A = 15 \frac{1-n}{n} H = 1.019,25 \text{ kg./cm}^2$$

Ese ancho, $a = 31,6 \text{ cm.}$, debe ser hasta la fibra neu-
tra, pero desde ella puede tener cualquier ancho; por eso
le hemos dado 25 centímetros.

Se han distribuido las barras en 6 ● de 25 milímetros
para la inferior ($s = 29,4 \text{ cm}^2$) y 3 ● de 19 para la superior
($s' = 8,5 \text{ cm}^2$).

Para ver dónde hay que levantar las barras, conside-
ramos que el momento total $M = 23.032,5$ le resisten en-
tre las dos armaduras, pero trabajando la inferior casi á
doble carga unitaria que la superior.

Cuatro barras superiores solas resistirán

$$\frac{4}{6} \times \frac{23.032,5 \times 29,4}{29,4 + \frac{8,5}{2}} = 13.416 \text{ kg.-m.}$$

Si la viga estuviese apoyada, la ecuación de momentos
sería de la forma $x^2 = 2py$, que para $x = 3,5$, $y =$
 $13.416 \times \frac{10}{8} = 16.770$; luego $2p = 0,00073$.

Las abscisas en que hay que levantar las tres barras,
son las correspondientes á las ordenadas:

$$\begin{cases} y_1 = 13.416 - \frac{13.416}{4} = 10.062 \\ y_2 = 13.416 - 2 \frac{13.416}{4} = 6.708 \\ y_3 = 13.416 - 3 \frac{13.416}{4} = 3.354 \end{cases}$$

$$\text{resultando } \begin{cases} x_1 = 2,709 \text{ m.} \\ x_2 = 2,211 \text{ m.} \\ x_3 = 1,565 \text{ m.} \end{cases}$$

El máximo esfuerzo cortante se verifica cuando un ca-
rro pasa por un apoyo. En ese caso, el esfuerzo cortante

producido por el carro y las dos mulas que caben en el
tramo, vale:

$$X_1 = 6.000 \quad X_2 = 303 \quad X_3 = 125$$

Por el peso permanente, $X_4 = 2.700 \times 3,5 = 9.450$ y
suponiendo cargadas las aceras: $X_5 = 225 \times 3,5 = 787,5$
(porque las aceras tienen 0,75 de ancho).

Total, $E = 16.665,50$ kilogramos.

Levantando la mitad de las barras y combatiendo con
estribos el restante esfuerzo, en la sección de levantamien-
to de la primera, esa fuerza vale

$$E' = E \times \frac{1,56}{3,5} = 7.428 \text{ kg.}$$

Para estribos distantes entre sí 20 centímetros, la sec-
ción debe ser:

$$S = \frac{1}{400(3-n)} \times \frac{E\delta}{c} = 1,58 \text{ cm}^2$$

que puede formarse con estribos de 14 milímetros.

Vigas poligonales.—Estas vigas, además de resistir á
flexión, trabajan á torsión. Trataremos de combatir los
esfuerzos de torsión, por medio de marcos transversales,
de tal modo, que el hormigón no resista nada á este efec-
to. De ese modo, y como para los efectos de flexión tene-
mos calculada la viga, no habrá que repetir el cálculo.

El método que vamos á exponer se puede aplicar cual-
quiera que sea la forma de la viga.

Consideremos un sólido solicitado á torsión por un
par, variable con la abscisa, cuyo valor para la abscisa x
sea M .

Por la teoría de la torsión, sabemos que el ángulo ϕ de
deformación viene medido, en arcos de radio unidad, por
la fórmula

$$\phi = \frac{1}{GIp} \int_a^b M dx$$

y así se mide en arcos de radio r .

$$\phi = \frac{r}{GIp} \int_a^b M dx.$$

Tomando una rebanada limitada por dos planos infini-
tamente próximos y por dos superficies cilíndricas cuyo eje
sea la directriz del sólido, esta rebanada habrá sufrido una
deformación de alargamiento, viniendo la sección $ACEG$ á
la posición $BDFH$, y teniendo, por lo tanto, la fibra un
alargamiento AB .

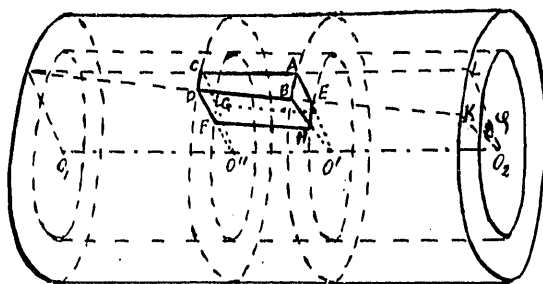


Fig. 2.^a

Tratándose de arcos pequeños y rigurosamente en los
infinitamente pequeños, se puede sustituir la cuerda por el
arco, y entonces

$$\frac{AB}{LK} = \frac{x}{b-a} \quad AB = LK \frac{x}{b-a}$$

Aunque el sólido no sea de sección circular, sino de forma cualquiera, llamando ρ el radio vector O_2K , se tendrá:

$$LK = \frac{G}{I_p} \int_a^b M dx \quad \text{y} \quad AB = \frac{G}{(b-a)I_p} \int_a^b M dx.$$

La deformación por unidad, valdrá:

$$n = \frac{AB}{2\pi\rho} \quad \text{y la carga molecular } T = G n.$$

En la sección $ACGE$, de rebanada, la carga de alargamiento será:

$$T \times AC \times AE = T dx d\rho = \frac{x dx d\rho}{2\pi(b-a)I_p} \int_a^b M dx.$$

La fuerza total que desarrollará el sólido por la torsión será:

$$T = \frac{1}{2\pi(b-a)I_p} \int_{R'}^{R''} d\rho \int_a^b x dx \int_a^b M dx,$$

siendo R' y R'' los valores del radio vector que corresponden á la periferia y que, en general, serán funciones del ángulo.

Como queremos que esa fuerza total sea resistida por un marco, deberá verificarse: $R_1 s = T$, ó sea

$$(a) \quad R_1 s = \frac{b^2 - a^2}{4\pi(b-a)I_p} \int_a^b M dx \int_{-R'}^{R''} d\rho = \\ = \frac{b+a}{4\pi I_p} (R'' + R') \int_a^b M dx,$$

siendo R_1 la carga práctica del material del marco.

A nuestro juicio, deberá tomarse para $+R'$ y $+R''$ los valores $-R$ y $+R$ correspondientes al menor de los radios vectores periféricos, pues todas las demás rebanadas exteriores á ese círculo no serán continuas, y, por lo tanto, no podrán considerarse como elemento resistente.

Deducida la teoría anterior, la aplicaremos al proyecto. La carga máxima, en el punto medio de la viga, es $P = 30.827$ kilogramos.

El momento máximo de torsión

$$M_m = 30.827 \times 0,28 = 8.631,56 \text{ kg.-m.}$$

Para una abscisa x , $M = M_m \times \frac{x}{L}$.

Como el trozo que sufre torsión es $L = 1,50$ metros.

$$M = 8.631,56 \times \frac{x}{1,5} = 5.754,37 x.$$

Pondremos marcos de 20 en 20 centímetros, porque para el esfuerzo cortante, así los poníamos.

Sólo tenemos que ver el aumento que debe darse á la sección de esos marcos (14 milímetros de diámetro) para que resistan también la torsión.

Aplicando la fórmula deducida (a).

$$R_1 s = \frac{1,5 + 1,30}{4\pi I_p} (2 \times 0,125) \int_{1,30}^{1,50} 5.754,37 x dx,$$

ó sea

$$\frac{2,8 \times 0,25}{12,56 I_p} \times 5.754,37 \frac{1,5^2 - 1,3^2}{2} = R_1 s$$

$$R_1 s = \frac{1.127,85}{12,56 I_p}$$

I_p , para la sección que consideramos vale:

$$I_p = \frac{1}{12} 0,98 \times 0,25 (0,98^2 + 0,25^2) = 0,0208$$

$$R_1 = 12 \text{ kg./mm}^2 = 12.000.000 \text{ kg./m}^2$$

$$s = \frac{4.337,88}{12.000.000} = 0,000361 \text{ m}^2 = 361 \text{ mm}^2.$$

Es decir, que los marcos que colocamos para esfuerzo cortante, en lugar de 14 milímetros deberán tener 26 milímetros, para resistir también la torsión.

Montantes.—El peso máximo que insiste sobre uno de los apoyos de una viga, vimos que era 16.665,50 kilogramos, cuando un carro pasaba por el apoyo. El peso propio de la semiviga anterior á ese tramo es 9.450 kilogramos.

Además, detrás de ese carro, suponemos las mulas de otro y las reacciones que producen las estimábamos antes en 303 y 125, respectivamente. Por la sobrecarga de personas, en las aceras, se produce $225 \times 3,5 = 787,50$ kilogramos, y por el peso de la vigueta y escuadras tenemos, respectivamente:

$$0,25 \times 0,36 \times 1,5 \times 2.400 = 324 \text{ kg.}$$

y

$$2 \times \frac{1}{2} \times 0,2^2 \times 7 \times 2.400 = 672 \text{ kg.}$$

Por último, suponiendo previamente que la escuadría del pilar sea, próximamente, de 36 centímetros, su peso propio valdrá

$$0,36^2 \times 7,6 \times 2.400 = 2.364 \text{ kg.}$$

(por ser 7,6 la altura de los mayores montantes), que con las ménsulas y armaduras pondremos por exceso 2.500 kilogramos.

Sumando todas esas acciones, resulta una carga total de 30.827 kilogramos.

Para prevenir flexiones accidentales, amplificaremos esa carga en 1,30, adoptando prudencialmente una carga máxima de

$$P = 1,30 \times 30.827 = 40.075 \text{ kg.}$$

Para la altura $l = 760$ cm., el valor del monomio

$$0,91 \frac{P}{l^2} = 0,0631,$$

al que por interpolación corresponde una esbeltez

$$\frac{l}{e} = 21,8.$$

Luego $e = \frac{760}{21,8} = 34,9$ cm., que debe ser el valor del lado de la sección.

Hemos adoptado en la construcción el valor $e = 36$ centímetros.

No repetimos el cálculo de los otros pilares, que, por ser más cortos, están menos expuestos al pandeo. Con arreglo al cálculo que hicimos en el proyecto, se les ha dado una escuadría de 31 centímetros.

Cálculo del arco.—Por la configuración del valle y altura de rasante necesaria, hemos fijado el arco con luz = 41,50 metros y flecha = 8 metros, adoptando la forma parabólica, de aspecto más elegante que la circular, cuya ecuación es $y = 0,771 x - 0,0186 x^2$.

Para calcular el arco se ha empleado el método del trabajo elástico, aplicación del teorema de Castigliano. Ese

método permite hallar con facilidad las líneas de influencia del momento y reacciones horizontal y vertical en un arranque resolviendo el sistema formado por las tres derivadas del trabajo igualadas á cero, por ser un arco continuo.

El Sr. Zafra (*), mediante ese sistema, ha calculado los valores del momento y reacciones en un arranque, deduciendo las expresiones:

$$m = Pl \frac{(10 x^4 - 24 x^3 + 18 x^2 - 4 x) \varphi^2 - 45 \rho^2 (x^5 - 2 x^2 + x)}{45 \rho^2 + 4 \varphi^2}$$

$$H = 15 P \varphi \frac{x^4 - 2 x^3 + x^2}{45 \rho^2 + 4 \varphi^2} \quad V = P (2 x^3 - 3 x^2 + 1)$$

siendo P , la fuerza; φ , el rebajamiento por unidad de luz; x , la abscisa por unidad y ρ el radio de giro de la sección en el arranque dividido por la luz.

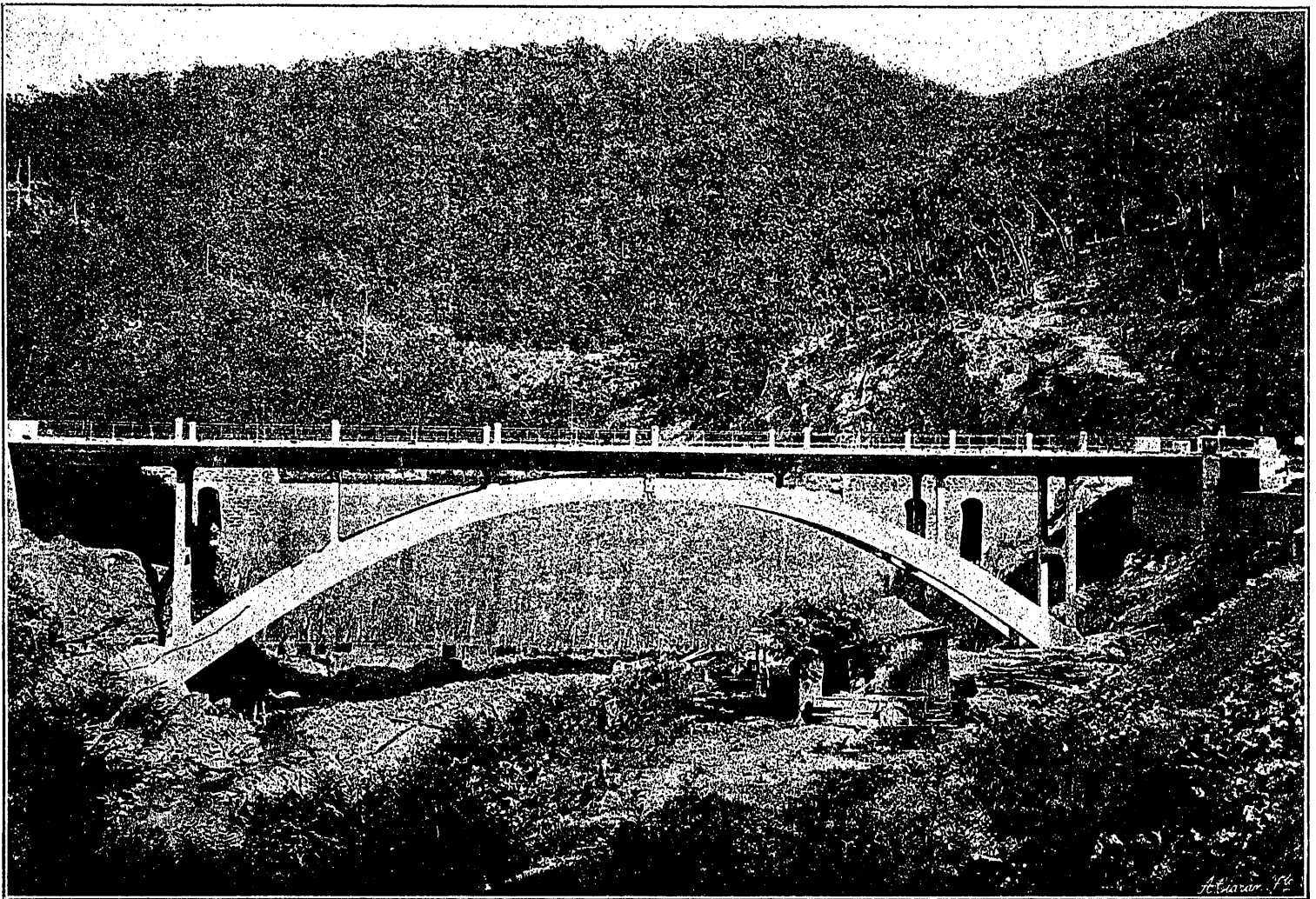
La curva (a) tiene puntos máximos definidos por las raíces de la ecuación derivada $10 x^3 - 18 x^2 + 9 x - 1 = 0$

que da $x = \begin{cases} 1 \\ 0,644 \\ 0,155 \end{cases}$; pero estos valores son por unidad, luego para la luz dada, $x = \begin{cases} 41,5 \text{ metros.} \\ 26,72 \text{ } \\ 6,43 \text{ } \end{cases}$

Los puntos en que corta al eje son:

$x = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 0,4 \end{cases}$ (raíz doble); cuyos valores absolutos son

$x = \begin{cases} 0 \\ 41,50. \\ 16,60 \end{cases}$



Por ser el rebajamiento $\varphi = \frac{8}{41,5} = \frac{1}{5,187} > \frac{1}{6}$, el radio ρ es muy pequeño, y por el momento podemos prescindir de él, sin perjuicio de que luego estimaremos su influencia y corregiremos el error debido á esta causa.

En ese caso, consideraremos los valores:

$$m = Pl \frac{10 x^4 - 24 x^3 + 18 x^2 - 4 x}{4};$$

$$H = 15 P \frac{x^4 - 2 x^3 + x^2}{4 \varphi}; \quad V = P (2 x^3 - 3 x^2 + 1)$$

Vamos á construir los lugares geométricos definidos por las ecuaciones.

- (a) $y = 10 x^4 - 24 x^3 + 18 x^2 - 4 x$
 (b) $y = 2 x^3 - 3 x^2 + 1$
 (c) $y = x^4 - 2 x^3 + x^2$

(*) Cálculo de estructuras.

Como en el presente proyecto, las fuerzas actúan por medio de los montantes, conviene calcular exactamente las ordenadas para las abscisas de los montantes, cuyos valores relativos son:

$$0; \frac{6,75}{41,50} = 0,1626; \frac{13,75}{41,50} = 0,331; \frac{20,75}{41,50} = 0,5$$

$$\frac{27,75}{41,50} = 0,669; \frac{34,75}{41,50} = 0,837; 1.$$

Los valores que toma la ordenada son:

$x_1 = 0$	$y_1 = 0$
$x_2 = 0,1626$	$y_2 = -0,2712$
$x_3 = 0,331$	$y_3 = -0,108$
$x_4 = 0,5$	$y_4 = +0,125$
$x_5 = 0,669$	$y_5 = +0,192$
$x_6 = 0,837$	$y_6 = +0,097$
$x_7 = 1$	$y_7 = 0$

La curva (b) tiene un máximo $y = 1$ para $x = 0$ y un mínimo $y = 0$ para $x = 1$.

Para las mismas abscisas de antes, tenemos la serie de ordenadas:

$$\begin{array}{ll} y_1 = 1 & y_4 = 0,5 \\ y_2 = 0,929 & y_5 = 0,257 \\ y_3 = 0,745 & y_6 = 0,072 \end{array}$$

La tercera curva (c) presenta para

$$x = \begin{cases} 0 & \text{mínimo.} \\ 1/2 & \text{máximo.} \\ 1 & \text{mínimo.} \end{cases}$$

Se demuestra fácilmente que es simétrica, respecto al punto medio de la luz, puesto que se puede poner su ecuación bajo la forma $y = x^2(1 - 2x + x^2)$ que se verifica lo mismo para x que para $1 - x$.

Para las abscisas citadas, resulta:

$$\begin{array}{l} y_0 = 0 \\ y_1 = 0,0185 \\ y_2 = 0,049 \\ y_3 = 0,0625 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} y_0 = 0 \\ y_1 = 0,0185 \\ y_2 = 0,049 \\ y_3 = 0,0625 \end{array}} \right\} \text{y sus simétricas.}$$

Con los valores calculados, podemos dibujar las tres líneas de influencia, representadas en los planos.

Viendo la curva de momentos, se comprende que las dos hipótesis más desfavorables para un arranque, son:

1.ª Cuando la sobrecarga se extiende desde él hasta el montante anterior á la clave. 2.ª Cuando actúa la sobrecarga desde la clave hasta el otro arranque.

La primera produce el mayor momento negativo y la segunda el máximo positivo.

Como los pilares tienen diferente longitud por ser ligeramente distintos de sección, las cargas que transmiten no son iguales.

Los pesos máximos que refieren son:

Pilares extremos	30.827 kilogramos.
Segundos pilares	29.250 »
Terceros	28.630 »
En la clave	28.327 »

En la primera hipótesis, el montante del arranque produce momento cero.

$$\text{El } 2.^\circ m_1 = 29.250 \times 41,50 \times \frac{-0,2712}{4} = -82.300,72 \text{ kg.-m.}$$

$$\text{El } 3.^\circ m_3 = 28.630 \times 41,50 \times \frac{-0,108}{4} = -32.079,90 \text{ »}$$

La clave, en que no hay más sobrecarga que las mulas que conducen el carro que está en el tramo anterior, sufre una carga total de 20.752 kilogramos y produce un momento

$$m_4 = +26.912,75 \text{ kg.-m.}$$

Los demás montantes están descargados, luego

$$m_5 = 20.199 \times 41,5 \times \frac{+0,192}{4} = +40.236,38 \text{ kg.-m.}$$

$$m_6 = 20.819 \times 41,5 \times \frac{+0,097}{4} = +20.951,71 \text{ »}$$

El máximo momento total en esta hipótesis es (sumando algebricamente):

$$M = -26.279,78 \text{ kg.-m.}$$

En la segunda hipótesis:

$$m_1 = 0$$

$$m_2 = 20.819 \times 41,5 \times \frac{-0,2712}{4} = -58.578,73$$

$$m_3 = 20.199 \times 41,5 \times \frac{-0,108}{4} = -22.632,96$$

$$\text{Cargado) } m_4 = 28.327 \times 41,5 \times \frac{+0,125}{4} = +36.736,58$$

$$\text{(Idem) } m_5 = 28.630 \times 41,5 \times \frac{+0,192}{4} = +57.030,95$$

$$\text{(Idem) } m_6 = 29.250 \times 41,5 \times \frac{+0,097}{4} = +29.436,45$$

$$\text{Total } M' = +41.992,29 \text{ kg. m}$$

Veamos ahora las reacciones.

Para la primera hipótesis resulta:

$$V_1 = 30.827 \text{ kg}$$

$$V_2 = 29.250 \times 0,929 = 27.173,25 \text{ kg.}$$

$$V_3 = 28.630 \times 0,745 = 21.329,35 \text{ »}$$

$$V_4 = 20.752 \times 0,5 = 10.376 \text{ »}$$

$$V_5 = 20.199 \times 0,257 = 5.191,14 \text{ »}$$

$$V_6 = 20.819 \times 0,072 = 1.498,97 \text{ »}$$

$$\text{Vertical total } V = 96.395,71 \text{ kg.}$$

Para la horizontal (siendo $\alpha = \frac{15}{4 \times 0,192}$):

$$H_1 = 0$$

$$H_2 = 29.250 \times \alpha \times 0,0185 = 10.568,17 \text{ kg.}$$

$$H_3 = 28.630 \times \alpha \times 0,049 = 27.398,91 \text{ »}$$

$$H_4 = 20.752 \times \alpha \times 0,0625 = 25.329,90 \text{ »}$$

$$H_5 = 20.199 \times \alpha \times 0,049 = 19.320,44 \text{ »}$$

$$H_6 = 20.819 \times \alpha \times 0,0185 = 7.494,84 \text{ »}$$

$$\text{Total } H = 90.112,26 \text{ kg.}$$

En la segunda hipótesis, un cálculo análogo conduce á los valores:

$$V' = 80.840 \text{ kg.}$$

$$H' = 99.341 \text{ kg.}$$

En la estimación de los valores de M y de H hemos prescindido del factor de inercia ρ . Debemos ver, ahora, el error producido, por esa causa, para compensarlo. Haremos la corrección en el momento solamente, pues en la reacción horizontal influye poquísimos y la corrección sería sustractiva.

Suponiendo, por un tanteo previo, que la sección en la clave sea un rectángulo de 80×110 centímetros, armado con 3 ● de 22 milímetros ($\alpha = 11 \text{ cm}^2$), el momento de inercia es

$$I = \frac{1}{12} a p^3 + 15 \times 2 \times 11 \times 50^2 = 8.873.333 + 825.000 = 9.698.333 \text{ en cm}^4 = 0,09698 \text{ en m}^4$$

$$\rho^2 = \frac{I}{\omega l^2} = 0,000.064.$$

En la fórmula del momento, el término suprimido en el numerador es:

$$-45 \rho^2 (x - 2x^2 + x^3).$$

El máximo de ese trinomio es para $x = \frac{1}{3}$ y vale

$$-0,00288 \times \frac{4}{27} = -0,000.43.$$

En el denominador se suprimió $45 \rho^2 = 0,00288$.

La fórmula verdadera daría

$$\frac{0,0363 \times \frac{-8}{81} - 0,000.43}{0,147 + 0,00288} = -0,027$$

y la aproximada $\frac{-\frac{8}{81}}{4} = -0,0247$.

El máximo error es 0,0023 que representa en relación con el aproximado, el $\frac{0,0023}{0,0247} = 0,093$, ó sea el 9,3 por 100.

Debemos aumentar en esa proporción el momento de la primera hipótesis y rebajarle al momento de la segunda hipótesis (por ser de signo contrario).

Pero, en rigor, para esta segunda posición, lo que debemos restar es una cantidad mucho menor, porque ese 9,3 por 100 es cuando la sobrecarga actúa en $x = \frac{1}{3}$ y para dicha hipótesis nunca actúa en esa abscisa.

En virtud de eso, aumentaremos el momento de la primera hipótesis, y poniéndose en condiciones muy desfavorables, no rebajaremos al de la segunda.

Los verdaderos momentos serán:

$$M = -26.279,78 \left(1 + \frac{9,3}{100}\right) = -28.723 \text{ kg.-m.}$$

$$M' = +41.992.$$

A estos valores y á las reacciones H , V hay que sumar los elementos homólogos que se producen por a temperatura y el peso propio.

Siendo

$$EI = E_h I_h + E_a I_a = 1.500.000.000 \times 0,08873333 + 22.500.000.000 \times 0,00825 = 318.724,995$$

para una variación de temperatura de $\pm 20^\circ$, con un coeficiente de dilatación de 0,00001, corresponde una deformación $\lambda = 0,0002$, y los valores del momento y reacciones por esta causa, valen

$$m_t = \frac{30 EI \lambda f}{45 \rho^2 l^2 + 4 f^2} = \pm 58.638 \text{ kg.-m.}$$

$$H_t = \frac{45 EI \lambda}{45 \rho^2 l^2 + 4 f^2} = \pm 10.994 \text{ kg.}$$

$$V_t = 0.$$

Para el peso propio es necesario conocer la sección, pero como por un tanteo hemos fijado en 110 centímetros el peralte en la clave, se puede suponer por exceso un promedio de 140 centímetros.

El peso total de cada arco será:

$$45 \times 0,8 \times 1,4 \times 2.400 = 120.960 \text{ kg.}$$

Este peso podemos suponerle repartido uniformemente por unidad de proyección, pues al establecer el teorema de Castigliano, se ha partido del supuesto de que las secciones varían por la relación $S = \frac{S_c}{\cos \alpha}$ siendo α el ángulo de la tangente á la directriz.

Los elementos producidos por este motivo son:

$$m_c = -45 \rho^2 \times \frac{\rho l}{12(45 \rho^2 + 4 f^2)} = -193 \text{ kg.-m.}$$

$$H_c = \frac{\rho f}{2(45 \rho^2 + 4 f^2)} = 77.707 \text{ kg.}$$

$$V_c = \frac{\rho l}{2} = 60.480 \text{ kg.}$$

Sumando algebricamente los efectos máximos producidos por todas las causas, tenemos:

$$\begin{aligned} 1.^{\text{a}} \text{ hipótesis... } M &= M + m_t + m_c = -87.554 \text{ kg.-m.} \\ H &= H + H_t + H_c = 156.825 \text{ kg.} \\ V &= V + V_t + V_c = 156.875 \text{ kg.} \end{aligned}$$

En H_t hemos puesto signo $-$, porque así se ha tomado para m_t .

$$\begin{aligned} 2.^{\text{a}} \text{ hipótesis... } M' &= +100.437 \text{ kg.-m.} \\ H' &= 188.042 \text{ kg.} \\ V' &= 141.320 \text{ kg.} \end{aligned}$$

Siendo $\alpha = 37^\circ 40'$ la inclinación de la tangente en el arranque, las máximas reacciones normal y tangencial á la sección serán:

$$1.^{\text{a}} \text{ hipótesis... } \begin{aligned} F_n &= H \cos \alpha + V \sin \alpha = 219.899 \\ F_t &= -H \sin \alpha + V \cos \alpha = 28.268 \end{aligned}$$

$$2.^{\text{a}} \text{ hipótesis... } \begin{aligned} F_n' &= H' \cos \alpha + V' \sin \alpha = 235.087 \\ F_t' &= -H' \sin \alpha + V' \cos \alpha = 2.109 \end{aligned}$$

La excentricidad en ambas hipótesis vale:

$$f = \frac{-87.554}{219.899} = -0,398 \text{ m.}$$

$$f' = \frac{100.437}{235.087} = +0,427 \text{ m.}$$

Adoptando en el arranque una sección de $80 \times 160 = 12.800$ centímetros cuadrados, armada simétricamente con 3 $\bullet$ de 22 milímetros en cada lado, la cuantía es

$$q = \frac{11,4}{12.800} = 0,000,89.$$

La excentricidad crítica vale:

$$e' = \frac{\eta}{6} \times \frac{1 + 63,5 q}{1 + 30 q} = \frac{160}{6} \times 1,028 = 27,34 \text{ cm.}$$

y como en las dos hipótesis $e' < f$, resulta que la sección trabaja á tensión y compresión.

Por el gráfico de flexión compuesta, para

$$\frac{f}{p} = \frac{39,8}{160} = 0,248 \quad \text{y} \quad \frac{f'}{p} = 0,267$$

corresponde una profundidad por unidad : $n = 0,77$ y $n' = 0,75$.

Las cargas máximas del hormigón y armaduras en las dos hipótesis, son:

$$\begin{aligned} H &= \frac{F_n}{ap} \times \frac{2n}{n^2 + 60qn - 30q} = 17,18 \times 2,53 = \\ &= 43,46 \text{ kg./cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H' &= \frac{F_n'}{ap} \times \frac{2n'}{n'^2 + 60qn' - 30q} = 18,37 \times 2,6 = \\ &= 47,7 \text{ kg./cm}^2 \end{aligned}$$

$$n_1 = \frac{70}{160} = 0,43$$

$$A = 15 H \frac{2n_1 - 1 + 2n}{2n} = 586 \text{ kg./cm}^2$$

$$A' = 15 H' \frac{2n_1 - 1 + 2n'}{2n'} = 644 \text{ kg./cm}^2.$$

Estas dos últimas cargas se refieren á las armaduras comprimidas; las de tensión son muchos menores.

Por las anteriores cifras vemos que la sección adoptada trabaja en buenas condiciones, sin que sea preciso modificarla.

De las cargas transversales no hay que preocuparse, pues el máximo valor es $\frac{28.268}{12.800} = 2,2 \text{ kg./cm}^2$

Vamos á estudiar la sección en la clave.

Conocidos que son ya los elementos de trabajo en el arranque, por la estática pueden determinarse los correspondientes á la clave.

Sus valores, así deducidos, son:

Primera hipótesis:

$$H_c = H = 156.825.$$

$$V_c = V - (30.827 + 29.250 + 28.630 + 20.752) = 47.416.$$

$$m_c = M - f H + V \frac{l}{2} - \frac{P}{2} \times \frac{l}{4} - 30.827 \times \frac{l}{2} - 29.250 \times 14 - 28.630 \times 7 = 34.440.$$

Segunda hipótesis:

$$H_c' = 188.042.$$

$$V_c' = 141.320 - (22.824 + 20.819 + 20.199 + 23.327) = 49.151.$$

$$m_c' = 100.437 - [H' + V' \frac{l}{2} - \frac{Pl}{8} - 22.824 \times \frac{l}{2} - 20.819 \times 14 - 20.199 \times 7] = 6.958.$$

Las excentricidades son: $l = \frac{34.440}{156.825} = 0,22; l' = 0,04.$

Para la sección que habíamos adoptado (al calcular el efecto de la temperatura): $s = 80 \times 110$ resulta $q = 0,0013.$

Por ser la excentricidad crítica

$$\epsilon = 0,17$$

en la primera hipótesis hay tracción y compresión y en la segunda, presión variable.

$$\text{Para } \frac{l}{p} = \frac{22}{110} = 0,2 \quad n = 0,93$$

luego la carga molecular del hormigón y armaduras valdrá

$$H = 17,82 \times \frac{2n}{n^2 + 60qn - 30q} = 37,42 \text{ kg./cm}^2$$

$$A = 15 H \frac{2n - 1 + 2n}{2n} = 539 \text{ kg./cm}^2$$

En la segunda hipótesis $n' = 2,9$

$$H' = \frac{H_c}{ap} \times \frac{2n'}{(2n' - 1)(1 + 30q)} = 25 \text{ kg./cm}^2$$

y las armaduras trabajan poco.

La sección en la clave podía, por lo tanto, haberse reducido un poco más, aunque no conviene, por no desviarse mucho de la relación entre las secciones y los cosenos de los ángulos de las tangentes á la directriz.

Queda ya definido el trasdós é intradós del arco, por las parábolas que pasan por los extremos de las secciones calculadas.

Arriostramientos.—Actuando el viento sobre el arco, provoca en él una resultante de flexión y torsión. Es necesario arriostar los dos arcos para que ambos resistan esa acción.

Si el viento actuara del mismo modo sobre ellos, las

riostras no trabajarían, pero como esto no ocurre, debían calcularse los arriostramientos como sometidos á la compresión que resulta de la diferencia entre las flechas horizontales que toman los arcos. Las piezas, así calculadas, tendrían dimensiones extraordinariamente pequeñas y sería preciso aumentarlas de sección para tener suficiente rigidez, pues, en efecto, aun suponiendo que cada riostra transmita íntegra la presión ejercida sobre el trozo de arco comprendido entre dos riostras, á razón de 270 kilogramos por metro cuadrado, la compresión en ella sería 2.646 kilogramos.

Hemos dado á esas piezas escuadría de 30×30 con 10 milímetros, que resisten mucho más que la cifra citada, colocándolas en donde arrancan los montantes verticales.

De todos modos, el conjunto de los dos arcos trabaja á flexión y torsión, siendo preciso asegurarse de su resistencia.

Como los arcos están unidos rígidamente al tablero, en la clave, la torsión se efectúa en cada semiarco.

La teoría que dedujimos al tratar de las vigas poligonales, podemos aplicarla del mismo modo al caso presente.

La resultante de la acción del viento sobre un semiarco vale:

$$F = 270 \times 1,4 \times 22,50 = 8.505 \text{ kg.}$$

y su punto de aplicación dista 0,80 metros de la cuerda del semiarco.

El momento máximo de torsión en un arranque será:

$$M = \frac{8.505 \times 0,80}{2} = 3.402, \text{ puesto que le resisten entre}$$

dos arranques.

La paralela á la cuerda del semiarco que pasa por el punto de la resultante intercepta una longitud de arco igual á 3,25 metros. Tomando un segmento de arco de 30 centímetros de longitud, la fuerza de tracción que debe neutralizar el efecto de la torsión en virtud de la fórmula (a) será

$$F = \frac{3,25 + 2,95}{4 \pi I_p} \times 2 \times 0,80 \times \int_{2,95}^{3,25} \frac{3,402}{3,25} x dx = \frac{16.874}{2 \times 13,87} (3,25^2 - 2,95^2) = 1.137 \text{ kg.}$$

Con un marco de 11 milímetros, trabajando á 12 kilogramos por milímetro cuadrado, tenemos una resistencia de 1.140 kilogramos.

Bastará, por lo tanto, que de 30 en 30 centímetros se coloquen marcos de ese diámetro.

De la flexión que simultánea con la torsión se produce no hay que temer nada, pues para ella es además elemento resistente el tablero; resultando cargas moleculares, por este efecto, que no llegan á 2 kg./cm².

