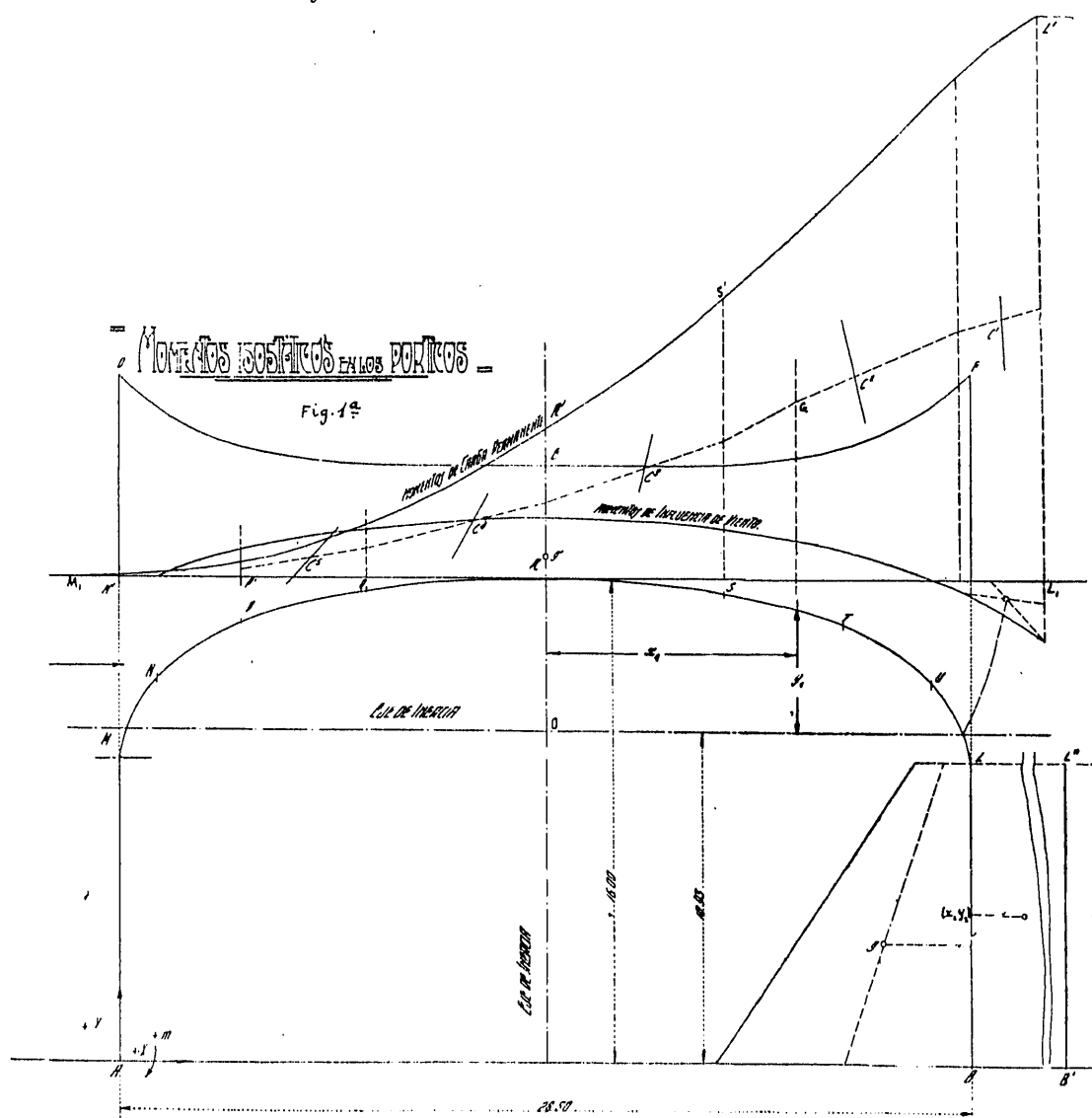


Estudio elástico de un pórtico curvo.

En los edificios industriales constituídos por grandes naves, y principalmente cuando están construídos con hormigón armado, es solución muy conveniente en muchos casos formar el edificio con cerchas continuas, rectas en las fachadas y curvas en la techumbre, formando pórticos empotrados en el cimiento, los cuales sostienen el forjado de cubierta.

efectos más importantes—la temperatura—sólo puede apreciarse cuando es conocida la rigidez mecánica de la sección.

Fijado, en virtud de lo dicho, el perfil de la fibra media del pórtico, para hacer el cálculo se pueden emplear varios métodos: el de las deformaciones de Ritter, el del trabajo elástico de Castigliano, el de



La curvatura del pórtico no debe ser arbitraria; prescindiendo de los casos en que, por necesidades de la obra, queda fijada, en general debe estudiarse de tal modo que el régimen de flexiones dé el máximo trabajo por compresión o que las flexiones máximas de los distintos elementos sean aproximadamente equivalentes, pues de ese modo hay un buen aprovechamiento del material empleando sección constante, lo cual facilita mucho la construcción y el cálculo. Solamente por tanteos previos puede conseguirse tal condición aproximada; pero en las construcciones estáticamente indeterminadas, los tanteos son inexcusables, ya que, por lo menos, uno de los

Möhr y el de Müller-Breslau. Ninguno es difícil tratándose de pórticos simples, pero el último resulta mucho más cómodo y menos complicado cuando la parte curva no tiene definición analítica o, aun teniéndola, no resulte sencilla de expresar.

El ejemplo que presentamos a continuación se refiere a un pórtico de 28,50 metros de luz y 16 de altura en el centro, que en breve se construirá, para cerrar una fábrica de cemento en explotación.

La aplicación del citado método a esa estructura consiste en hacerla estáticamente determinada, previamente, suponiendo un apoyo libre en un cimiento y una articulación en el otro, o bien, lo que es más

cómodo, dejar totalmente libre un extremo y suponer un empotramiento sólo en el otro.

En esas condiciones, y tomando como ejes de referencia los de inercia del pórtico, se demuestra—en los tratados de mecánica elástica Müller-Breslau, Zaffra, Möhrh, etc.—que las tres indeterminadas—empuje horizontal, vertical y momento—que se desarrollan en la estructura, en el arranque que se supuso suelto, cuando en él existe empotramiento, o, lo que es lo mismo, los valores de esas tres incógnitas que por la estática no son determinables, tienen por expresión:

$$X = \frac{\int Mrydl}{\int rydl}; \quad Y = \frac{\int Mrxdl}{\int rxdl}; \quad m = \frac{\int Mrdl}{\int rdl};$$

las cuales están referidas al origen de los ejes coordinados de referencia y cuyos signos dependen del sentido que convengamos a éstos y del sentido admitido para el momento flector que definamos como positivo.

En esas fórmulas, M es el momento flector en el punto (x, y) , estando la estructura suelta en un arranque; dl es el elemento diferencial de longitud, y r es la relación de momentos de inercia ($r = \frac{I_p}{I_a}$) del elemento que se tome como patrón al del elemento que se considera.

En el ejemplo presente, la fibra media del pórtico está formada por dos verticales de 10 metros de altura en las fachadas, enlazadas por una pieza curva, que salva la luz de 28,50 metros, compuesta de un arco central parabólico y dos laterales del mismo género, en la forma indicada en la figura 1.^a

Las dos parábolas laterales son tangentes a los lados verticales y *sensiblemente* tangentes a la central.

Con respecto a la tangente en el centro y a la vertical media, las ecuaciones de esas curvas son:

$$x^2 = 66,66y \text{ (desde P a T)} \quad \text{y} \\ y^2 - 12y + 4,765x - 31,9 = 0 \text{ (de M a P)}$$

habiéndose adoptado esos ejes transitorios sólo para que sirvan en el trazado de la monteá; pero los verdaderos ejes elásticos son los que pasan por el centro de gravedad de la línea quebrada que forma la estructura, a los que se refiere el cálculo.

Bien fácil es de calcular la posición de ese punto, y no será preciso detallar su determinación. Es el que dista 5,07 metros por bajo de la clave, y por simetría ya se ve que los ejes de inercia son la horizontal y vertical que pasan por él.

Suponemos que el pórtico tiene momento de inercia constante y, por tanto, $r = 1$; para los ejes coordinados adoptamos los sentidos positivos usuales en geometría—de izquierda a derecha y de abajo a arriba—, y para momentos, el sentido de las agujas del reloj. Con esas convenciones, los valores antes citados de las indeterminadas tienen los signos siguientes: $X = (+)$ $Y = (-)$ $m = (-)$.

Las acciones que actúan sobre la estructura son: el peso propio y de cubierta, el efecto de la temperatura y el empuje del viento. Además, la carga excentrica de un puente-grúa.

Por la curvatura que tiene el dintel, el peso propio no es constante por unidad de proyección, sino que es creciente de la clave a las verticales tangentes. Por el tanteo previo, asignamos una carga de 1 839 kilogramos por metro en la clave y 3 365 en la tangencia, según la ley DEL' representada en la figura, y una sección del pórtico de 130 por 33 centímetros, armada simétricamente con 92 cm.² de barras, lo cual da un momento de inercia total:

$$I = I_h + I_a = 0,0640 + 0,0693 = 0,133, \text{ en m}^4$$

Suponiendo suelta la estructura en el cimiento izquierdo y empotrada en el derecho, prescindiendo del peso del trozo recto AM, pues no da momentos finales, los pesos del dintel curvo, representados por las ordenadas de la curva DEF darán en cada punto un momento flector medido por el producto de la ordenada media multiplicado por la distancia del centro de gravedad al punto $M = p(x_g - x)$, siendo x_g la abscisa del centro del área de pesos y x la del punto.

Rectificando la longitud del dintel curvo y llevando sobre cada punto una ordenada representativa de ese momento en él y uniéndolos, se tendrá la ley de momentos isostáticos en el dintel, representada por la curva M, R' S' L', la cual se prolonga en el trozo del pilar BL por una paralela distante de éste el valor del momento $LL' = L, L'$ constante en toda su altura.

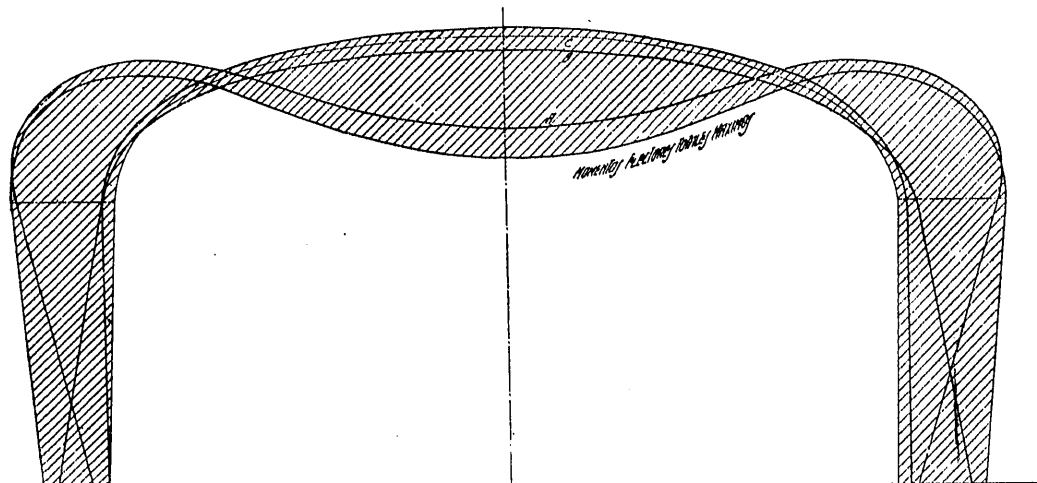


Fig. 2.

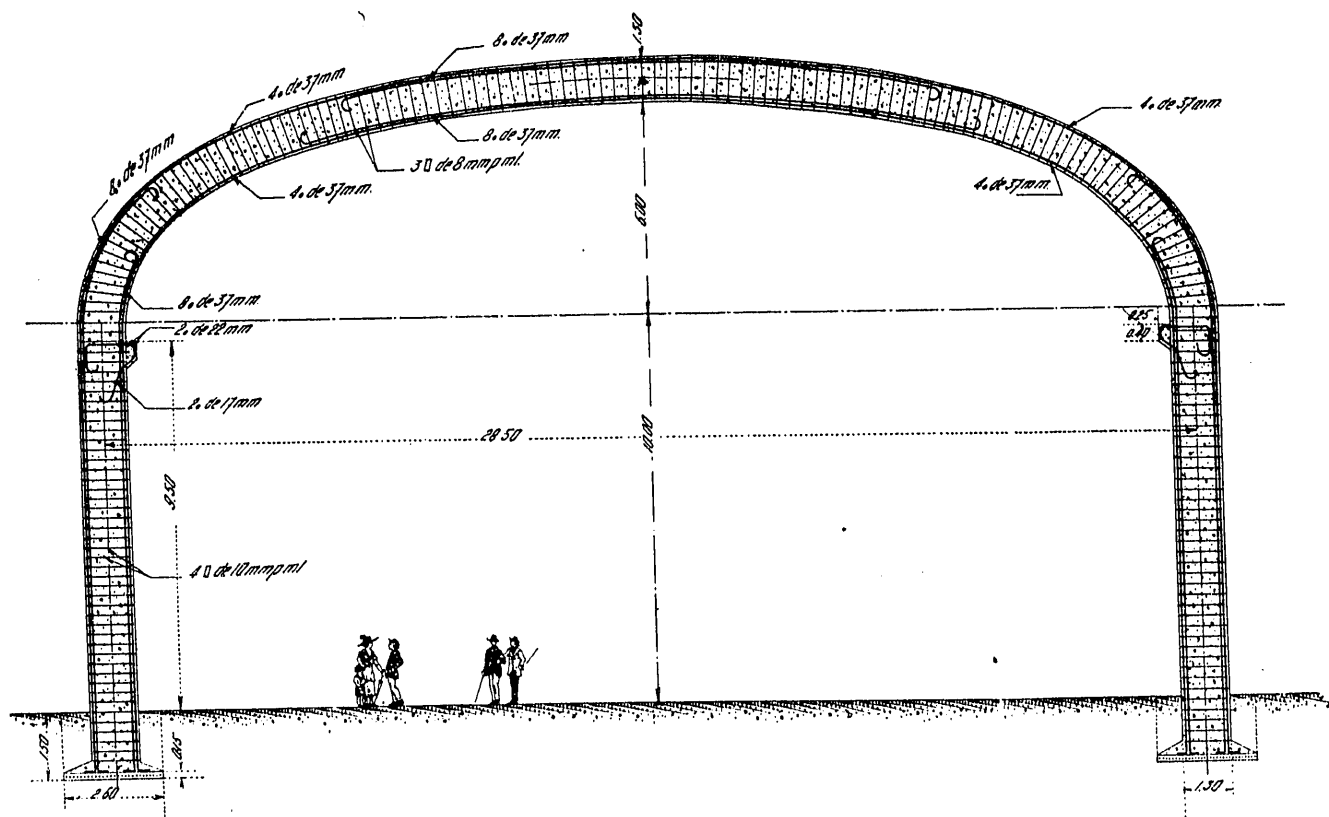


Fig. 3.

La $\int Mdl$ tiene por valor el área comprendida entre esa curva y su base, sumada con el área rectangular del trozo BL. Con los valores antes indicados, resulta:

$$\int Mdl = -10\,934\,000 - 8\,937\,210 = -19\,871\,210 \text{ m}^2 \text{ Kg [1]}$$

Se comprende que es necesario en los elementos curvos hacer la rectificación, porque si no, al llevar en normales sobre la curva los momentos, el área comprendida valdrá $\int (Mdl + M^2 d\varphi)$, siendo φ el ángulo de contingencia en vez de ser $\int Mdl$.

Hallando el centro de gravedad de esas áreas de momentos isostáticos, que se suponen concentradas en la fibra del pórtico y proyectadas sobre su base respectiva, las coordenadas de estos puntos, con respecto a los ejes de referencia, son: $x_1 = +8,30$, $y_1 = +4,05$, $x_2 = +14,25$ y $y_2 = -5,93$. De modo que las integrales de momentos valen:

$$\int Mxdl = -10\,934\,000 \cdot 8,30 - 8\,937\,210 \cdot 14,25 = -218\,107\,442 \quad [2]$$

$$\int Mydl = -10\,934\,000 \cdot 4,05 + 8\,937\,210 \cdot 5,93 = +8\,714\,955 \quad [3]$$

Los valores [1], [2] y [3] son los numeradores de las expresiones de X, Y, m.

Los denominadores están formados por las integrales $\int dl$, $\int x^2 dl$, $\int y^2 dl$. La primera es la longitud rectificada del pórtico, muy fácil de calcular, que en este caso vale $\int dl = 53,40$ metros.

Para la segunda y tercera se pueden, sin dificultad, emplear las ecuaciones de los elementos del pórtico, pero es suficientemente aproximado y mucho más rápido sustituir las parábolas del dintel por un

polígono inscrito y aplicar a cada trozo rectilíneo de coordenadas x_1 , x_2 , y_1 , y_2 las expresiones generales:

$$\int x^2 dl = \frac{1}{3} (x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2)$$

$$\int y^2 dl = \frac{1}{3} (y_1^2 + y_2^2 + y_1 y_2)$$

Aplicándolo a las dos ramas rectas AM, BI, y al polígono de los puntos MNPQR y su simétrico, resulta:

$$\int x^2 dl = 6\,816, \quad \int y^2 dl = 1\,333$$

Calculados ya los numeradores y denominadores, los valores de las tres indeterminadas en el origen son: $X = +6\,538 \text{ kg}$, $Y = +31\,990 \text{ kg}$, $m_0 = +372\,116 \text{ m. kg}$.

Trasladando al arranque izquierdo, tenemos el valor del empotramiento elástico en él, medido por las siguientes cifras:

$$X = +6\,538 \text{ kg}, \quad Y = +31\,990 \text{ kg}, \\ m_a = m_0 + Xx_0 + Yy_0 = -12\,409 \text{ m. kg.}$$

La influencia del viento suponemos producida por una resultante horizontal $P = 1\,650$ kilogramos (correspondiente a 100 kilogramos por metro cuadrado de proyección normal y teniendo en cuenta la disminución de intensidad por la convexidad), situada 13 metros sobre la rasante.

Operando de un modo exactamente análogo al citado antes para la carga permanente, resulta una ley de momentos isostáticos representados por la curva «Momentos de influencia de viento» (fig. 1.^a) y el trozo recto en la rama BL.

Sus áreas y momentos de ellas arrojan los valores:

$$\int Mdl = +54\,400, \quad \int Mxdl = +2\,007\,000, \quad \int Mydl = -1\,352\,922$$

Y como los denominadores de X, Y, m_0 son siem-

pre constantes para una misma estructura, las expresiones de éstas son:

$$X = -1015 \text{ kg.}, Y = -294 \text{ kg.}, m_o = -1018 \text{ m. kg.}$$

Trasladando al arranque izquierdo:

$$X = -1015 \text{ kg.}, Y = -294 \text{ kg.}, m_a = -7923 \text{ m. kg.}$$

La acción de la temperatura, en los pórticos de gran luz y altura, es siempre muy apreciable, tanto o más que la carga permanente, descentrando las resultantes de compresión de un modo considerable.

Por la aplicación de este mismo método de Müller-Breslau a un pórtico de coeficiente de elasticidad E y momento de inercia I , constantes ambos, deformado por la dilatación Δ unitaria en un elemen-

tura muchas horas, y en las gruesas aun así queda muy atenuado, a menos de forzar mucho la intensidad. Protegido, además, el pórtico por la cubierta, creemos será suficiente contar con una oscilación de $\pm 12,5^\circ$, y para el valor corriente de coeficiente de dilatación $\gamma = 0,000011$, tomar el valor de dilatación por unidad $\Delta = 12,5 \cdot \gamma = 0,000137$.

Contamos con que el sol incida a 45° , provocando dilatación sólo en un lado y parte de la cubierta.

Los numeradores de X e Y son las dilataciones o contracciones de la proyección de los elementos a que afecta sobre los dos ejes.

En este caso, $\int \Delta \cos \varphi dl = 27 \Delta$, $\int \Delta \sin \varphi dl = (+5,07 - 3,5 - 10,93) \Delta = -9,36 \Delta$, resultando,

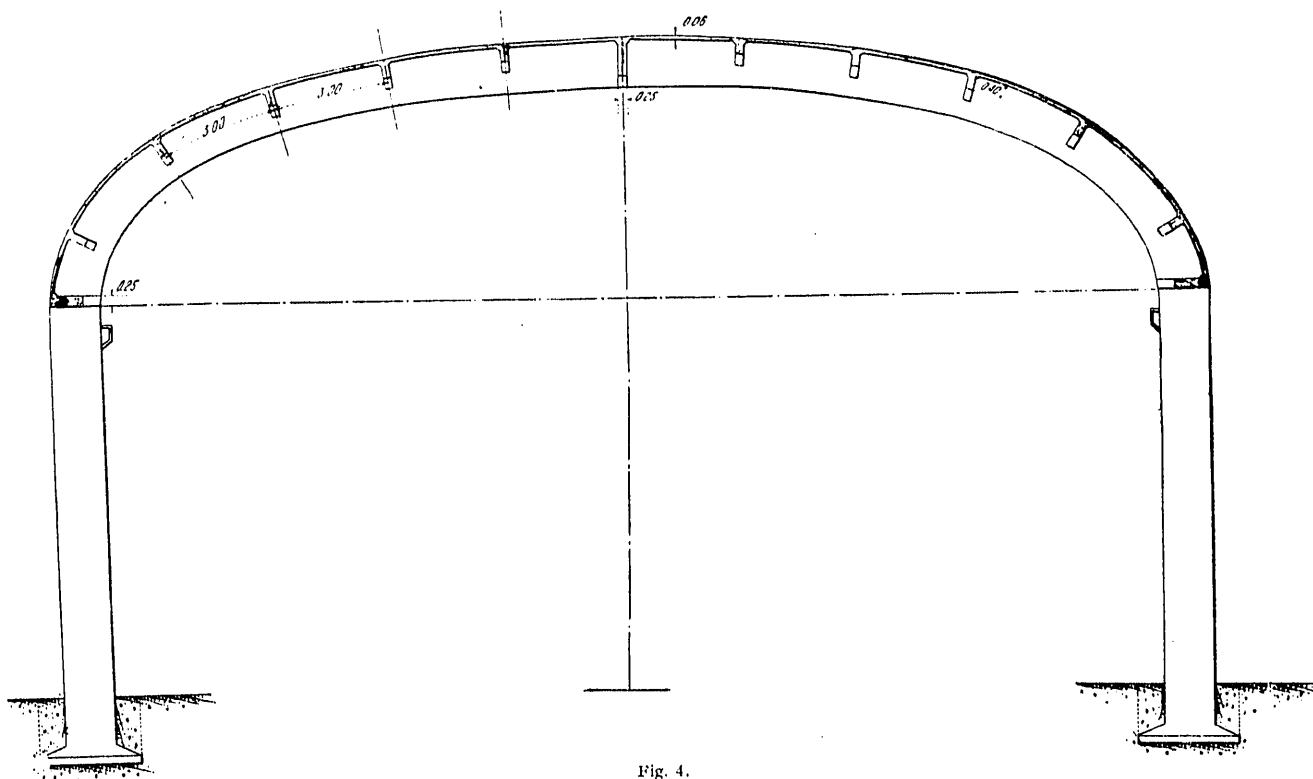


Fig. 4.

to dl , inclinado el ángulo φ respecto al eje ox de referencia, se llegan a determinar los siguientes términos, correspondientes al empuje en el arranque, trasladado al centro de inercia:

$$X = EI \frac{\int \Delta \cos \varphi dl}{\int y^2 dl}; \quad Y = EI \frac{\int \Delta \sin \varphi dl}{\int x^2 dl}; \quad m_o = 0$$

Para coeficiente E_h del hormigón hemos adoptado el valor 150 000 kilogramos : cm.^2 , que es corriente para estas piezas de hormigón armado con cargas corrientes, y para el del acero de las armaduras el de 2 200 000 kilogramos : cm.^2 .

Con lo dicho respecto al momento de inercia I al principio de este artículo, el producto EI vale:

$$EI = E_h I_h + E_a I_a = 1\,620\,600\,000$$

La dilatación—o contracción— Δ , por unidad de longitud, no debe ser la semiosciliación de temperaturas extremas del ambiente, pues las piezas delgadas de hormigón armado sólo toman en su interior las temperaturas exteriores cuando el foco de calor

finalmente: $X = 4\,495 \text{ kg.}$, $Y = 309 \text{ kg.}$; $m_o = 0$ que, como siempre, hay que trasladar al arranque, en el que da: $m_a = 44\,727 \text{ m. kg.}$

* * *

Para cada una de las causas: carga permanente, efecto del viento y acción de la temperatura, están calculados los valores de las indeterminadas X , Y , m_a , que fijan la posición de la resultante en el arranque y, por tanto, con ellas queda el pórtico estáticamente determinado, pudiendo representarse la ley de momentos y compresiones en cada punto con la misma facilidad que para una viga. En la figura 2.^a están dibujadas esas leyes y la resultante de ellas, que da la ley de máximos momentos. La determinación de las secciones es un problema sencillo de cálculo de una pieza a flexión compuesta.

Alfonso PEÑA Bœuf,
Ingeniero de Caminos.