Año LXXIII.-Núm. 2 432 Revista de Obras Públicas 1.° de julio de 1925

Cálculo simbólico vectorial con el operador vectorial lineal "giro-multiplicador"

Aplicación práctica a los problemas de las corrientes alternas

Introducción

La utilización de las cantidades imaginarias para el estudio de las corrientes alternas sinusoidales presenta diversos inconvenientes, entre los cuales pueden señalarse como más importantes:

1.° El dar forzosamente (aunque se trate de remediarlo en las definiciones previas) el carácter de un vector a la impedancia Z o a la admitancia Y, que vienen representadas en las fórmulas por expresiones imaginarias análogas a las que corresponden a los verdaderos vectores, **E** e **I**; pero ni la impedancia Z ni la admitancia Y pueden tener nunca significación vectorial, de magnitudes con dirección, y es importante prevenir toda posible causa de error en este respecto.

2.° El separar excesivamente el cálculo de su simbolización vectorial geométrica, con lo cual puede perderse de vista el valor físico de los diversos elementos que en cada momento entran en las fórmulas.

3.° El no prestarse bien este cálculo a una traducción geométrica inmediata de los resultados obtenidos en sus diversas etapas, no obstante ser esa representación las más de las veces el objeto perseguido principalmente por el ingeniero.

Ultimamente se ha tratado de evitar estas dificultades, sustituyendo, para el estudio de las corrientes alternas, el cálculo con imaginarias por otros procedimientos diferentes, más propiamente vectoriales. Es digno de especial mención el método propuesto por Natalis (*).

En el presente trabajo se propone, con ese mismo fin, un sistema de cálculo genuinamente vectorial, en el que sólo se hace uso de las operaciones de adición de vectores y de las originadas por un operador vectorial lineal, que viene a simbolizar las impedancias o admitancias.

Método operatorio

Convenciones. Sentido de giros

En todo lo que sigue se trata exclusivamente de vectores situados en un plano.

En ese plano se adopta como sentido positivo de giros el contrario al de las agujas de un reloj.

Para la escritura se representarán las magnitudes vectoriales por letras *grasas;* las mismas letras, en itálica, designarán los valores absolutos (módulos) de los vectores.

Los signos + y −, empleados con letras representativas de vectores, se entiende que simbolizan adiciones y sustracciones vectoriales (geométricas).

El operador «giro-multiplicador»

Con la expresión $z(\varphi)$ se indica un símbolo operatorio definido de la manera siguiente: «El operador

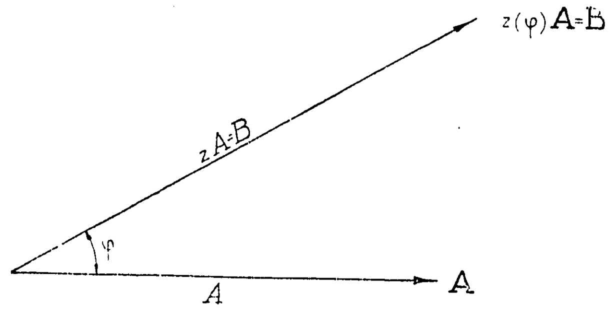


Fig. 1.ª

$z(\varphi)$ aplicado a un vector cualquiera **A**, le hace girar un ángulo φ en el sentido positivo y multiplica el valor absoluto del vector por z.» (Fig. 1.ª)

$$z(\varphi)\mathbf{A} = \mathbf{B}$$

Empleamos para ese tipo de operador la denominación «giro-multiplicador» con objeto de caracterizar las modificaciones que produce en los vectores a que se aplica

z = *multiplicador* del operador
φ = *giro* del operador

Sin perjudicar en nada a la generalidad de las consideraciones que siguen, podemos suponer, y supondremos, que los giros φ son siempre inferiores a 360°. Es decir, que para los efectos del giro simbolizado, $\varphi = \varphi + 360°$, o bien, $\varphi = \varphi - 360°$.

Tanto z como φ, pueden ser positivos o negativos; un valor de z negativo significa, en el vector a que se aplique, una dirección igual y contraria a la determinada por el giro φ; un valor de φ negativo, significa un giro en el sentido negativo.

El operador $z(\varphi)$ es evidentemente *continuo*, y a continuación se verán sus propiedades *distributivas*. Se trata, por consiguiente, de un *operador vectorial lineal*, que viene determinado por dos datos, z y φ.

Si dos operadores giro-multiplicadores tienen iguales separadamente los multiplicadores y los giros, los operadores son evidentemente iguales

Si

$$z_1 = z_2 \quad \text{y} \quad \varphi_1 = \varphi_2$$
$$z_1(\varphi_1) = z_2(\varphi_2)$$

(*) Natalis: *Die Berechnung von Gleich und Wechselstromsystemen.* Berlín, 1920.—Recientemente, una nueva edición considerablemente ampliada.

Esta condición, suficiente para la igualdad, no es, sin embargo, necesaria. En efecto, si $z_2 = -z_1$ y $\varphi_2 = -(180^o - \varphi_1)$, se verifica también la igualdad vectorial

$$z_1(\varphi_1)\mathbf{A} = z_2(\varphi_2)\mathbf{A}$$

o sea

$$z_1(\varphi_1) = z_2(\varphi_2)$$

Consecuencia: de la igualdad $z_1(\varphi_1) = z_2(\varphi_2)$, se deduce que

$$\begin{cases} z_2 = z_1 \\ \varphi_2 = \varphi_1 \end{cases}$$

o bien que

$$\begin{cases} z_2 = -z_1 \\ \varphi_2 = -(180 - \varphi_1) \end{cases}$$

Esta ambigüedad en la determinación por ecuaciones del operador $z(\varphi)$, aparte de no alterar en nada el resultado operacional vectorial obtenido, no tiene ningún inconveniente en la práctica, pues el signo y cuadrante del giro φ suelen venir fijados previamente por las condiciones del problema que se estudia. (Véase el ejemplo tercero, al final de este trabajo.)

Reglas para el cálculo con los operadores $z(\varphi)$

De la definición dada se deducen inmediatamente las reglas del cálculo simbólico con los operadores giro-multiplicadores $z(\varphi)$. No ha de olvidarse que estos operadores han de ir afectos a algún vector para que adquieran realidad los giros y multiplicaciones que representan. Pero esto no obsta para que pueda

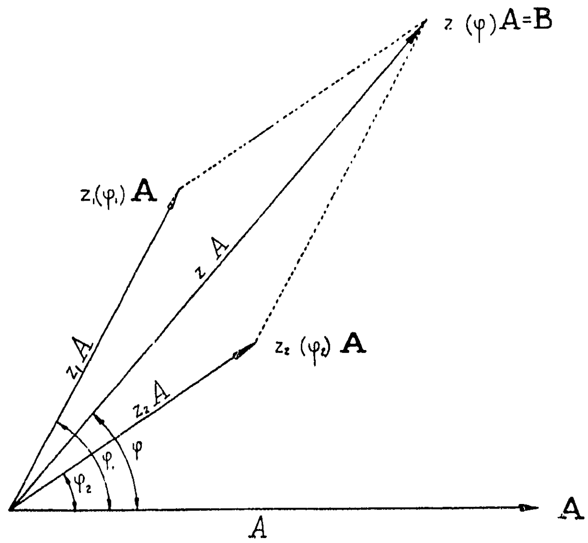


Fig. 2.ª

calcularse con los puros símbolos $z(\varphi)$, haciendo abstracción de los vectores que puedan estar unidos a ellos.

1.º Multiplicación por un escalar. El escalar multiplica únicamente al multiplicador, según la significación que a éste se le ha dado

$$a \times z(\varphi) = z(\varphi) \times a = az(\varphi) \qquad [1]$$

«El producto de un escalar por un operador (*) es otro operador con el mismo giro y cuyo multiplicador es el producto del antiguo multiplicador por el escalar.»

2.º Adición de operadores (fig. 2.ª)

$$z_1(\varphi_1)\mathbf{A} + z_2(\varphi_2)\mathbf{A} = [z_1(\varphi_1) + z_2(\varphi_2)]\mathbf{A} = z(\varphi)\mathbf{A} = \mathbf{B}$$
$$z_1(\varphi_1) + z_2(\varphi_2) = z(\varphi)$$

De la figura 2.ª se deduce fácilmente que

$$z = \sqrt{(z_1 \cos\varphi_1 + z_2 \cos\varphi_2)^2 + (z_1 \operatorname{sen}\varphi_1 + z_2 \operatorname{sen}\varphi_2)^2} \qquad [2]$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{z_1 \operatorname{sen}\varphi_1 + z_2 \operatorname{sen}\varphi_2}{z_1 \cos\varphi_1 + z_2 \cos\varphi_2} \qquad [3]$$

«La suma de dos operadores es otro operador, cuyo multiplicador y giro vienen dados por la fórmulas [2] y [3].»

De un modo análogo, se puede ver que

$$\Sigma z_k(\varphi_k) = z(\varphi)$$

siendo

$$z = \sqrt{(\Sigma z_k \cos\varphi_k)^2 + (\Sigma z_k \operatorname{sen}\varphi_k)^2} \qquad [4]$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\Sigma z_k \operatorname{sen}\varphi_k}{\Sigma z_k \cos\varphi_k} \qquad [5]$$

Las fórmulas [2], [3], [4], [5] son susceptibles de una sencilla construcción geométrica (fig. 3.ª), que se empleará corrientemente en las aplicaciones. Bas-

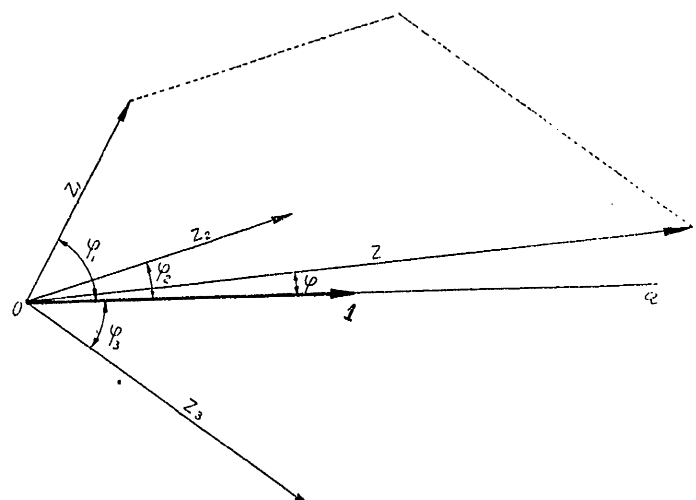


Fig. 3.ª

ta trazar una recta cualquiera, Oa, y por el punto O vectores de magnitud z_1, z_2, z_3, etc., formando con esa recta, en el sentido positivo, los ángulos φ_1, φ_2, φ_3, etcétera, respectivamente.

El vector resultante o suma geométrica, tiene entonces una magnitud igual al multiplicador z, y forma con OA un ángulo igual al giro φ.

Esta construcción equivale, en definitiva, a aplicar los diversos operadores sumandos a un vector unidad arbitrariamente elegido a partir de O en la dirección Oa.

(*) En adelante, al decir simplemente operador, se sobrentenderá que nos referimos al *giro-multiplicador*.

3.º Operadores con signo negativo. En el caso de que se verifique

$$z_1(\varphi_1) + z_2(\varphi_2) = 0 \qquad [6]$$

de las propiedades del operador suma de otros dos se deduce que entre los multiplicadores z_1 z_2 y los giros φ_1 φ_2 han de existir las siguientes relaciones

$$z_2 = -z_1 \quad \text{y} \quad \varphi_2 = \varphi_1 \qquad [7]$$

Pero la igualdad [6] puede también escribirse así

$$z_2(\varphi_2) = -[z_1(\varphi_1)] = -z_1(\varphi_1) \qquad [8]$$

De todo ello se deduce la siguiente consecuencia: «Un operador con signo negativo sólo cambia de signo en su multiplicador, permaneciendo inalterado el giro.»

4.º Sustracción de operadores. Según lo que acaba de verse, se obtiene para la sustracción de operadores

$$z_1(\varphi_1) - z_2(\varphi_2) = z_1(\varphi_1) + \left[-[z_2(\varphi_2)]\right] = z(\varphi)$$

de donde, fundándose en [2] y [3],

$$z = \sqrt{(z_1 \cos\varphi_1 - z_2 \cos\varphi_2)^2 + (z_1 \operatorname{sen}\varphi_1 - z_2 \operatorname{sen}\varphi_2)^2} \qquad [9]$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{z_1 \operatorname{sen}\varphi_1 - z_2 \operatorname{sen}\varphi_2}{z_1 \cos\varphi_1 - z_2 \cos\varphi_2} \qquad [10]$$

«La diferencia de dos operadores es otro operador, cuyo multiplicador y giro vienen dados por las fórmulas [9] y [10].»

Estas fórmulas pueden traducirse en una construcción geométrica, análoga a la antes aplicada para las [2], [3], [4] y [5].

Si $z_1 = z_2$ y $\varphi_1 = \varphi_2$, se verifica evidentemente que

$$z_1(\varphi_1) - z_2(\varphi_2) = 0$$

«El operador nulo aplicado a un vector cualquiera lo anula.»

5.º Iteración de operadores. Por iteración de operadores $z(\varphi)$ entendemos su aplicación repetida a un

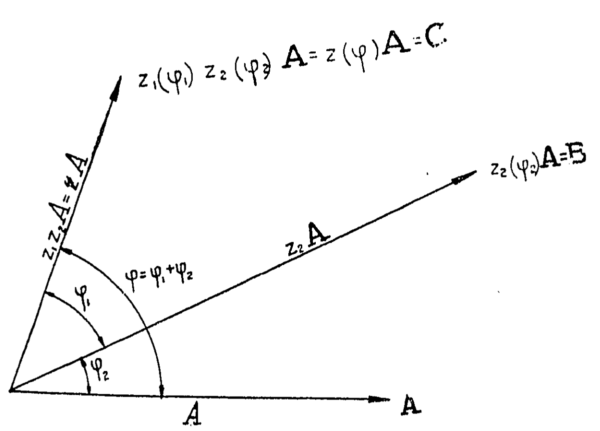


Fig. 4.ª

mismo vector. En el caso de dos operadores, por ejemplo, puede formarse primeramente el vector

$$z_2(\varphi_2)\mathbf{A} = \mathbf{B} \qquad \text{(fig. 4.ª)}$$

y luego el vector

$$z_1(\varphi_1)\mathbf{B} = z_1(\varphi_1)\,[z_2(\varphi_2)\mathbf{A}] = z_1(\varphi_1) z_2(\varphi_2)\mathbf{A} = z(\varphi)\mathbf{A} = \mathbf{C} \qquad [11]$$

El operador $z(\varphi)$, así definido (fig. 4.ª), es el resultado de la iteración de $z_1(\varphi_1)$ y $z_2(\varphi_2)$

$$z(\varphi) = z_1(\varphi_1) z_2(\varphi_2)$$

De estas convenciones, y examinando la construcción de la figura 4.ª, se deduce inmediatamente que

$$z = z_1 \times z_2 \qquad [12]$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \qquad [13]$$

«La iteración de dos operadores produce otro operador cuyo multiplicador es el producto de los multiplicadores, y cuyo giro es la suma de los giros.»

Este resultado demuestra la propiedad conmutativa de la iteración de dos operadores

$$z_1(\varphi_1) z_2(\varphi_2) = z_2(\varphi_2) z_1(\varphi_1)$$

propiedad que, por otra parte, es bien evidente, pues el orden empleado para los giros o multiplicaciones en nada puede alterar el resultado a que se llega.

En general, en el caso de varios operadores, se deducirá análogamente

$$\Pi z_k(\varphi_k) = z(\varphi)$$

$$z = \Pi z_k \qquad [14]$$

$$\varphi = \Sigma \varphi_k \qquad [15]$$

Si todos los operadores iterados son idénticos, las fórmulas se convierten en las siguientes

$$[z_i(\varphi_i)]^n = z(\varphi)$$

$$z = z_i^n \qquad [16]$$

$$\varphi = n\varphi_i \qquad [17]$$

«La potencia n en la iteración de un operador produce otro operador, cuyo multiplicador es la potencia n del dado y su giro n veces el giro primitivo.»

Este resultado puede generalizarse, para valores fraccionarios o negativos del exponente n.

Si este exponente n es igual a O, resulta

$$[z_i(\varphi_i)]^0 = z_i^0(o) = 1(o) \qquad [18]$$

Pero el operador $1(o)$ deja evidentemente invariable todo vector al que se aplique; llamaremos a este operador $1(o)$ el operador *identidad*. La igualdad [18] nos dice, por tanto, que:

«La potencia O en la iteración de un operador conduce al operador identidad.»

6.º Inversa de un operador. Por inversa de un operador $z_1(\varphi_1)$, se entiende otro operador

$$z_2(\varphi_2) = \frac{1(o)}{z_1(\varphi_1)} \qquad [19]$$

tal que, aplicado a un vector cualquiera **A**, y aplicando nuevamente al vector obtenido el operador

$z_1(\varphi_1)$, vuelve a encontrarse el primitivo vector **A**; es decir,

$$z_1(\varphi_1) \times z_2(\varphi_2)\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

o sea

$$z_1(\varphi_1) \cdot z_2(\varphi_2) = 1(o)$$

De esta definición, y recordando las propiedades de la iteración, resulta en seguida

$$z_2 = \frac{1}{z_1} \qquad [20]$$

$$\varphi_2 = -\varphi_1 \qquad [21]$$

«La inversa de un operador es otro operador cuyo multiplicador es la inversa del multiplicador primitivo y cuyo giro es igual y de signo contrario al del operador dado.»

7.º Iteración inversa de dos operadores. Por iteración inversa de dos operadores, $z_1(\varphi_1)$ y $z_2(\varphi_2)$, simbolizada en esta forma

$$z(\varphi) = \frac{z_1(\varphi_1)}{z_2(\varphi_2)} \qquad [22]$$

definiremos el operador que resulta de la iteración de $z_1(\varphi_1)$ y $\dfrac{1(o)}{z_2(\varphi_2)}$.

Por lo que antes se ha visto, se encuentra, efectuando el cálculo con los símbolos

$$z(\varphi) = z_1(\varphi_1) \times \frac{1(o)}{z_2(\varphi_2)} = z_1(\varphi_1) \times \frac{1}{z_2}(-\varphi_2)$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} \qquad [23]$$

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \qquad [24]$$

«Con la iteración inversa de dos operadores, se obtiene otro operador, cuyo multiplicador es el cociente de los multiplicadores, y cuyo giro es la diferencia de los giros.»

Si $z_1 = z_2$ y $\varphi_1 = \varphi_2$, la iteración inversa produce el operador identidad, como tenía que suceder, dada la definición anterior para el valor inverso de un operador.

* * *

Con lo indicado se dispone de las reglas esenciales para el cálculo simbólico con los operadores giro-multiplicadores $z(\varphi)$.

Con ellas puede resolverse cualquier cálculo complejo, en el que se combinen adiciones, iteraciones, iteraciones inversas, etc. Más adelante se mostrarán algunos ejemplos de este cálculo con los símbolos $z(\varphi)$.

Cálculo con vectores y operadores $z(\varphi)$

1.º Propiedad distributiva de los operadores $z(\varphi)$. Recordando la significación dada a estos operadores, se comprende que en su aplicación verifican la propiedad siguiente

$$z(\varphi)(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = z(\varphi)\mathbf{A} + z(\varphi)\mathbf{B} \qquad [25]$$

«Los operadores giro-multiplicadores disfrutan de la propiedad distributiva.»

2.º Propiedad conmutativa de los operadores $z(\varphi)$. Ya se vió anteriormente que

$$z_2(\varphi_2)[z_1(\varphi_1)\mathbf{A}] = z_1(\varphi_1)[z_2(\varphi_2)\mathbf{A}]$$

3.º Cociente de dos vectores. De la igualdad vectorial

$$z(\varphi)\mathbf{A} = \mathbf{B}$$

se deduce, en forma simbólica,

$$\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{A}} = z(\varphi) \qquad [26]$$

Llamaremos convencionalmente $\dfrac{\mathbf{B}}{\mathbf{A}}$ el cociente de los vectores **B** y **A**. De la igualdad [26] y de la figura 1.ª correspondiente resulta entonces que:

«El cociente de dos vectores es un operador que, aplicado al divisor, da el dividendo. Este operador tiene por multiplicador el cociente de los valores absolutos de los vectores, y por giro el ángulo que forma el vector **B** con el vector **A**, estando este ángulo medido desde **A** hasta **B**.»

Es evidente que el cociente de un vector por sí mismo produce el operador identidad

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{A}} = 1(o) \qquad [27]$$

4.º Igualdades vectoriales.

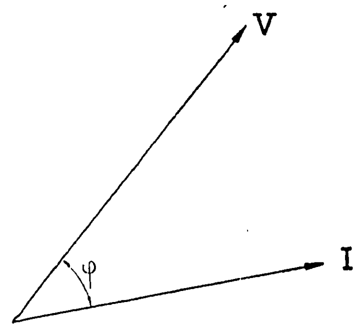
«Si se aplica, directa o inversamente, un mismo operador a los dos miembros de una igualdad vectorial, la igualdad subsiste y conserva su carácter vectorial.»

«Si se dividen los dos miembros de una igualdad vectorial por un mismo vector, la igualdad subsiste; pero en forma operacional.»

Aplicación a las corrientes alternas sinusoidales

Ley de Ohm vectorial

En un circuito de corriente alterna sinusoidal, que contiene resistencia R, inductancia L y capacidad C,



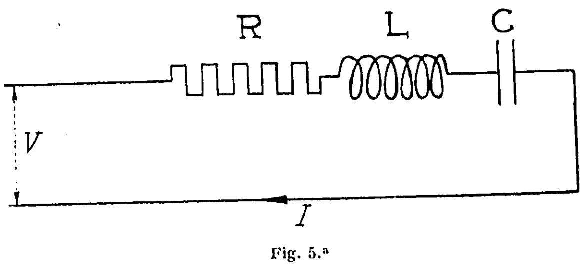


Fig. 5.ª

sabemos que entre el voltaje V en bornas y la intensidad I existe la relación

$$V = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}\ \mathbf{I}$$

estando además el vector **V** adelantado respecto al vector **I**, en el sentido positivo de giros (fig. 5.ª), un ángulo φ tal que

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

Formemos un operador «giro-multiplicador» $z(\varphi)$, que llamaremos *operador impedancia*, definido de la manera siguiente

$$\text{el multiplicador} \quad z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \qquad [28]$$

$$\text{el giro } \varphi \text{ siendo } \operatorname{tang} \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \qquad [29]$$

En este caso, es claro que las relaciones de magnitud y de posición entre los vectores **V** e **I**, vienen dadas con una simple igualdad vectorial, a saber

$$\mathbf{V} = z(\varphi)\mathbf{I} \qquad [30]$$

V = vector voltaje, $z(\varphi)$ = operador impedancia, **I** = vector intensidad.

La igualdad [30] nos da una expresión vectorial de la ley de Ohm para las corrientes alternas, que puede enunciarse así:

«En un circuito de corriente alterna, el vector voltaje en bornas **V**, es igual al que se obtiene aplicando al vector intensidad **I** el operador impedancia $z(\varphi)$.»

Impedancias en serie

Si existen varias impedancias en serie, se verificarán las relaciones siguientes

$$\mathbf{V}_1 = z_1(\varphi_1)\mathbf{I} \quad ; \quad \mathbf{V}_2 = z_2(\varphi_2)\mathbf{I} \quad ; \quad \mathbf{V}_3 = z_3(\varphi_3)\mathbf{I} \ldots$$

$\mathbf{V}_1 \quad \mathbf{V}_2 \quad \mathbf{V}_3 \ldots$ voltajes parciales

$\mathbf{I} \ldots$ intensidad

$z_1(\varphi_1) \quad z_2(\varphi_2) \quad z_3(\varphi_3)$ operadores impedancia parciales

El voltaje total, **V**, valdrá

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 + \ldots = [z_1(\varphi_1) + z_2(\varphi_2) + z_3(\varphi_3) + \ldots]\,\mathbf{I} = z(\varphi)\mathbf{I} \qquad [31]$$

$$z = \sqrt{(z_1 \cos \varphi_1 + z_2 \cos \varphi_2 + z_3 \cos \varphi_3 + \ldots)^2 + (z_1 \operatorname{sen} \varphi_1 + z_2 \operatorname{sen} \varphi_2 + z_3 \operatorname{sen} \varphi_3 + \ldots)^2}$$

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{z_1 \operatorname{sen} \varphi_1 + z_2 \operatorname{sen} \varphi_2 + z_3 \operatorname{sen} \varphi_3 + \ldots}{z_1 \cos \varphi_1 + z_2 \cos \varphi_2 + z_3 \cos \varphi_3 + \ldots}$$

«Los operadores de las impedancias parciales en serie, se suman para dar el operador impedancia resultante.»

Impedancias en paralelo

Si existen varias impedancias en paralelo, las ecuaciones vectoriales serán

$$\mathbf{V} = z_1(\varphi_1)\mathbf{I}_1 \quad ; \quad \mathbf{I}_1 = \frac{1(o)\mathbf{V}}{z_1(\varphi_1)} = \frac{\mathbf{V}\,(*)}{z_1(\varphi_1)} = \frac{1}{z_1}\,(-\varphi_1)\mathbf{V}$$

$$\mathbf{V} = z_2(\varphi_2)\mathbf{I}_2 \quad ; \quad \mathbf{I}_2 = \frac{1(o)\mathbf{V}}{z_2(\varphi_2)} = \frac{\mathbf{V}}{z_2(\varphi_2)} = \frac{1}{z_2}\,(-\varphi_2)\mathbf{V}$$

$$\mathbf{V} = z_3(\varphi_3)\mathbf{I}_3 \quad ; \quad \mathbf{I}_3 = \frac{1(o)\mathbf{V}}{z_3(\varphi_3)} = \frac{\mathbf{V}}{z_3(\varphi_3)} = \frac{1}{z_3}\,(-\varphi_3)\mathbf{V}$$

. . . .

$\mathbf{I}_1 \quad \mathbf{I}_2 \quad \mathbf{I}_3 \ldots$ intensidades parciales

V voltaje

$z_1(\varphi_1) \quad z_2(\varphi_2) \quad z_3(\varphi_3) \ldots$ operadores impedancia parciales

Llamaremos operadores *admitancia* a las expresiones inversas de los operadores impedancia, de la forma

$$a(\psi) = \frac{1(o)}{z(\varphi)} = \frac{1}{z}\,(-\varphi) \qquad [32]$$

siendo

$$a = \frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \qquad [33]$$

$$\psi = -\varphi \quad ; \quad \operatorname{tang} \psi = -\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \qquad [34]$$

De las ecuaciones anteriores se deduce entonces que la intensidad total **I** es

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 + \ldots =$$
$$= \left[\frac{1}{z_1}\,(-\varphi_1) + \frac{1}{z_2}\,(-\varphi_2) + \frac{1}{z_3}\,(-\varphi_3) + \ldots\right]\mathbf{V} =$$
$$= \frac{1}{z}\,(-\varphi)\mathbf{V} \qquad [35]$$

o bien

$$\mathbf{I} = [a_1(\psi_1) + a_2(\psi_2) + a_3(\psi_3) + \ldots]\,\mathbf{V} = a(\psi)\mathbf{V} \qquad [36]$$

siendo

$$a = \sqrt{(a_1 \cos \psi_1 + a_2 \cos \psi_2 + a_3 \cos \psi_3 + \ldots)^2 + (a_1 \operatorname{sen} \psi_1 + a_2 \operatorname{sen} \psi_2 + a_3 \operatorname{sen} \psi_3 + \ldots)^2}$$

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{a_1 \operatorname{sen} \psi_1 + a_2 \operatorname{sen} \psi_2 + a_3 \operatorname{sen} \psi_3 + \ldots}{a_1 \cos \psi_1 + a_2 \cos \psi_2 + a_3 \cos \psi_3 + \ldots}$$

(*) Para simplificar las notaciones puede escribirse la operación de giro-multiplicación inversa en esta forma, sobrentendiendo el símbolo $1(o)$ en el numerador, aplicado al vector.

«Los operadores de las admitancias parciales en paralelo se suman para dar el operador admitancia resultante.»

Caso particular

Si sólo hay dos impedancias en paralelo, las fórmulas se simplifican, obteniéndose estas relaciones

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = \left(\frac{1(o)}{z_1(\varphi_1)} + \frac{1(o)}{z_2(\varphi_2)}\right)\mathbf{V} =$$

$$= \left(\frac{1(o)z_2(\varphi_2) + 1(o)z_1(\varphi_1)}{z_1(\varphi_1)\,z_2(\varphi_2)}\right)\mathbf{V} = \left(\frac{z_1(\varphi_1) + z_2(\varphi_2)}{z_1(\varphi_1)\,z_2(\varphi_2)}\right)\mathbf{V}$$

$$\mathbf{V} = \frac{z_1(\varphi_1)\,z_2(\varphi_2)}{z_1(\varphi_1) + z_2(\varphi_2)}\,\mathbf{I} = z(\varphi)\mathbf{I} \qquad [37]$$

$$z(\varphi) = \frac{z_1(\varphi_1)\,z_2(\varphi_2)}{z_1(\varphi_1) + z_2(\varphi_2)} \qquad [38]$$

Ejemplos

Los ejemplos dados a continuación ilustran respecto a la aplicación práctica ingenieril del método operatorio explicado con los vectores y los operadores

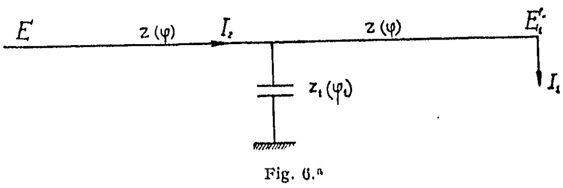


Fig. 6.ª

$z(\varphi)$. Esos ejemplos se refieren a diversos problemas de las corrientes alternas, que ordinariamente son resueltos mediante el empleo de las cantidades imaginarias.

En cada caso se acompaña la construcción geométrica operacional y vectorial, que corresponde al cálculo simbólico con los diversos operadores y vectores.

Es bien aparente, según estos ejemplos, la facilidad y sencillez que presenta la aplicación del método de cálculo que proponemos en los problemas de corrientes alternas.

Ejemplo primero. Línea con inductancia y capacidad. Esquema en T

Empleando las notaciones de la figura 6.ª, se obtiene como expresión del voltaje en el origen de la línea

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + z(\varphi)\mathbf{I}_1 + z(\varphi)\left(\mathbf{I}_1 + \frac{\mathbf{E}_1 + z(\varphi)\mathbf{I}_1}{z_1(\varphi_1)}\right) =$$

$$= \mathbf{E}_1 + z(\varphi)\mathbf{I}_1 + z(\varphi)\mathbf{I}_2 \qquad [39]$$

$$z = \frac{l}{2}\sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \quad ; \quad z_1 = \frac{1}{lC\omega}$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{L\omega}{R} \quad ; \quad \operatorname{tang}\varphi_1 = -\infty \quad (\varphi_1 = -90^\circ)$$

siendo l la longitud de la línea, R la resistencia por km, L la inductancia por km, y C la capacidad por km.

La figura 7.ª representa la construcción geométrica sencilla de la ecuación vectorial [39], que viene a ser como un sustentáculo escrito (algébrico) para esa construcción.

Ejemplo segundo. Línea trifásica desequilibrada

Se trata de situar el punto neutro O en el diagrama topográfico vectorial, siendo $\mathbf{E}_{12}$, $\mathbf{E}_{23}$, $\mathbf{E}_{31}$ los vol-

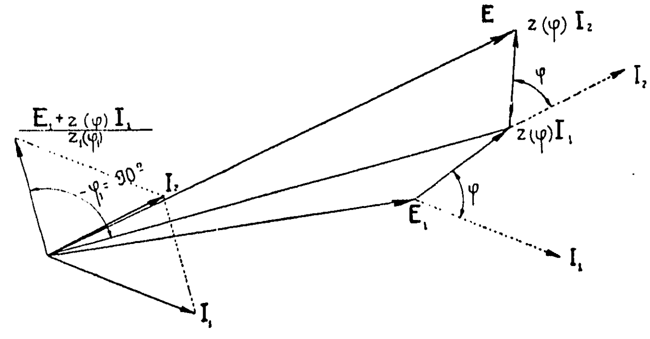


Fig. 7.ª

tajes entre hilos, y $z_1(\varphi_1)$, $z_2(\varphi_2)$, $z_3(\varphi_3)$ las impedancias representativas de las cargas existentes entre hilos y punto neutro (fig. 8.ª).

Adoptaremos como incógnita el voltaje $\mathbf{e}_1$.

Pueden establecerse las ecuaciones siguientes

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{E}_{21} \\ \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{E}_{13} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathbf{I}_1 = \dfrac{1}{z_1}(-\varphi_1)\mathbf{e}_1 = a_1(\psi_1)\mathbf{e}_1 \\ \mathbf{I}_2 = \dfrac{1}{z_2}(-\varphi_2)(\mathbf{e}_1 + \mathbf{E}_{21}) = a_2(\psi_2)(\mathbf{e}_1 + \mathbf{E}_{21}) \\ \mathbf{I}_3 = \dfrac{1}{z_3}(-\varphi_3)(\mathbf{e}_1 - \mathbf{E}_{13}) = a_3(\psi_3)(\mathbf{e}_1 - \mathbf{E}_{13}) \end{array}\right.$$

De la condición $\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 = 0$, se deduce

$$[a_1(\psi_1) + a_2(\psi_2) + a_3(\psi_3)]\,\mathbf{e}_1 + a_2(\psi_2)\mathbf{E}_{21} - a_3(\psi_3)\mathbf{E}_{13} = 0$$

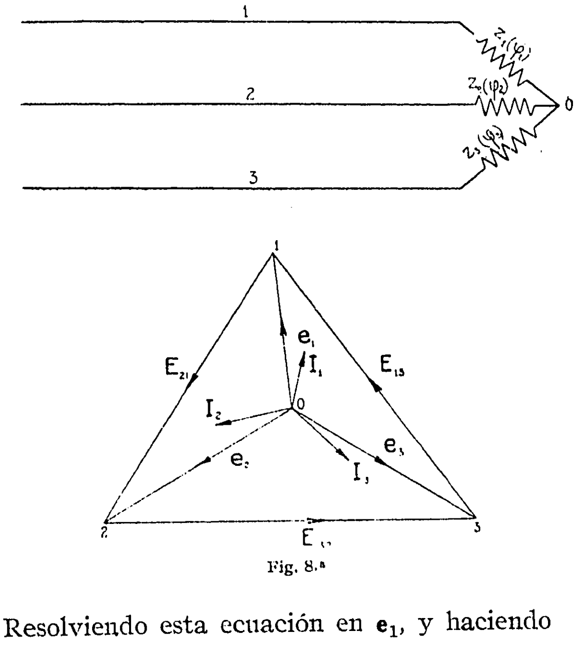


Fig. 8.ª

Resolviendo esta ecuación en $\mathbf{e}_1$, y haciendo

$$a_1(\psi_1) + a_2(\psi_2) + a_3(\psi_3) = a(\psi) \qquad [40]$$

se encuentra

$$\mathbf{e}_1 = \frac{a_3(\psi_3)\mathbf{E}_{13} - a_2(\psi_2)\mathbf{E}_{21}}{a(\psi)} \qquad [41]$$

En la figura 9.ª pueden verse las sencillas construcciones que corresponden a las igualdades [40] y [41], y que resuelven prácticamente el problema propuesto.

Ejemplo tercero. Bobina Petersen

Se estudia el caso de una tierra franca en el hilo 3 de una línea trifásica (fig. 10) alimentada por un transformador en estrella, cuyo punto neutro va conectado a tierra con interposición de una bobina Petersen. El problema consiste en determinar la intensidad que pasa del hilo 3 a tierra, y en calcular la inductancia necesaria en la bobina Petersen para que esa intensidad sea igual a cero. Se prescinde, en una

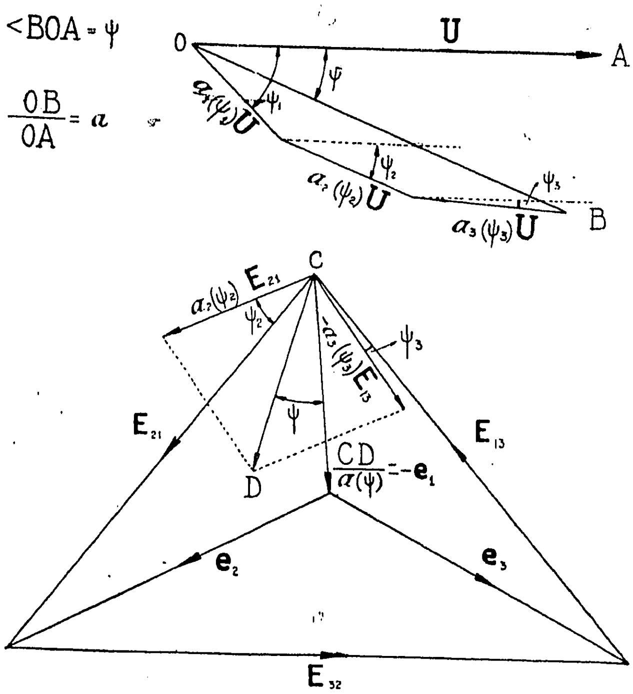


Fig. 9.

primera aproximación, de la resistencia óhmica de los circuitos.

Si llamamos C_1, C_2, C_3 las capacidades entre los hilos y la tierra, y L la inductancia de la bobina, los operadores impedancia señalados en la figura 10 tendrán los valores siguientes

$$z_1(\varphi_1) = \frac{1}{C_1\omega}\,(-\,90^\circ)$$

$$z_2(\varphi_2) = \frac{1}{C_2\omega}\,(-\,90^\circ)$$

$$z_3(\varphi_3) = \frac{1}{C_3\omega}\,(-\,90^\circ)$$

$$z(\varphi) = L\omega(90^\circ)$$

siendo, como siempre, ω = pulsación = $2\pi f$.

Para los tres circuitos en que obran las fuerzas electromotrices $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, podemos establecer las ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{e}_1 = z_1(\varphi_1)\mathbf{I}_1 + z(\varphi)\mathbf{I} \\ \mathbf{e}_2 = z_2(\varphi_2)\mathbf{I}_2 + z(\varphi)\mathbf{I} \\ \mathbf{e}_3 = z(\varphi)\mathbf{I} \\ \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 = \mathbf{I} \end{array}\right.$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \frac{\mathbf{e}_3}{z(\varphi)} \\ \mathbf{I}_1 &= \frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3}{z_1(\varphi_1)} \\ \mathbf{I}_2 &= \frac{\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3}{z_2(\varphi_2)} \\ \mathbf{I}_3 = \mathbf{I} - \mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2 &= \frac{\mathbf{e}_3}{z(\varphi)} - \frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3}{z_1(\varphi_1)} - \frac{\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3}{z_2(\varphi_2)} \end{aligned} \qquad [42]$$

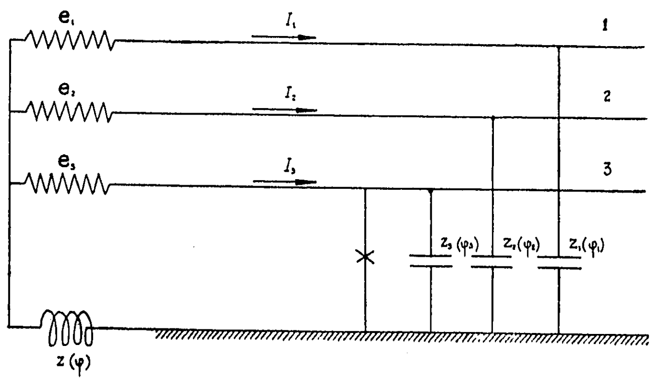


Fig. 10

La figura 11 reproduce la construcción gráfica de las igualdades [42].

Si se desea obtener $\mathbf{I}_3 = 0$, se ha de tener

$$\frac{1}{z(\varphi)} = \frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3}{\mathbf{e}_3 z_1(\varphi_1)} + \frac{\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3}{\mathbf{e}_3 z_2(\varphi_2)} \qquad [43]$$

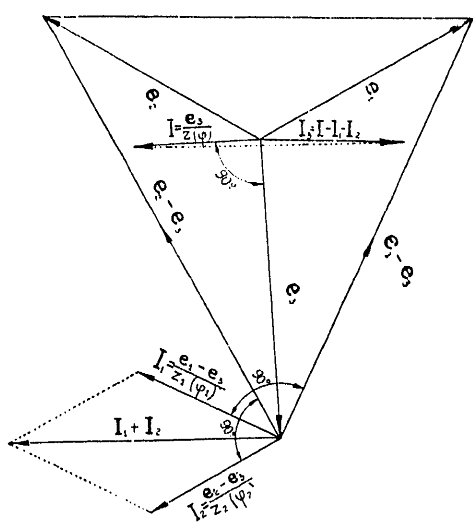


Fig. 11

Suponiendo ahora que

$$\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = 0$$

y que

$$z_1(\varphi_1) = z_2(\varphi_2) = z_3(\varphi_3) = z'(\varphi')$$

como aproximadamente suele suceder en la realidad, ($C_1 = C_2 = C_3 = C$) la ecuación [43] se simplifica convirtiéndose en

$$\frac{1}{z(\varphi)} = -\frac{3(o)}{z'(\varphi')} \qquad [44]$$

o sea

$$z(\varphi) = -\frac{z'}{3}(\varphi')$$

Resulta, por tanto, recordando que $z = L\omega$, $\varphi = 90^o$, $z' = \frac{1}{C\omega}$ y $\varphi' = -90^o$,

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{3C\omega} = L\omega \\ \varphi' = -(180 - 90^o) = -90^o \end{array}\right. \quad [45]$$

La autoinducción de la bobina Petersen que produce la resonancia, viene determinada por la conocida igualdad

$$L = \frac{1}{3C\omega^2}$$

Si esta igualdad no se verifica exactamente, existirá una corriente residuaria en la tierra fortuita del hilo 3, cuyo valor será, con las hipótesis simplificativas últimamente hechas

$$\mathbf{I}_3 = \frac{\mathbf{e}_3}{z(\varphi)} + \frac{3\mathbf{e}_3}{z'(\varphi')} = \frac{1}{L\omega}(-90^o)\mathbf{e}_3 + 3C\omega(90^o)\mathbf{e}_3$$

es decir,

$$\mathbf{I}_3 = \left(\frac{1}{L\omega} - 3C\omega\right)(-90^o)\mathbf{e}_3$$

El valor absoluto de esta corriente resulta ser

$$\mathbf{I}_3 = \left(\frac{1}{L\omega} - 3C\omega\right)\mathbf{e}_3$$

Pedro José LUCIA
Ingéniero de Caminos.

Electrificación de la rampa de Pajares (1)

por

Ricardo F. Hontoria y José María G. Lomas,
Ingenieros de Caminos

VIII

LOCOMOTORAS

Teniendo en cuenta la naturaleza del tráfico de la rampa de Pajares, en el que las mercancías constituyen un factor predominante y el servicio de viajeros posee una importancia relativamente pequeña, y ya que, por otra parte, no es posible dotar a este último de velocidades elevadas por la perturbación que introducirían los trenes rápidos en el servicio de mercancías previsto y por lo accidentado de la planta y perfil del trazado, se ha hecho adopción, como ya dijimos anteriormente (núm. 2 386 de la REVISTA) de un tipo único de locomotora, tanto para viajeros como para mercancías. Esta locomotora está constituída por dos bogies o carretones de tres ejes motores cada uno, tipo de máquina cuya notación es $C + C$, según la moderna nomenclatura; limitada la máxima velocidad asequible a 60 km por hora, no se ha creído necesaria la colocación de eje Bissel o guiador alguno, con lo que resulta adherente todo el peso de la locomotora y mejoran sus condiciones de arrastre.

La elección de esta locomotora tipo $C + C$ en lugar de la de cuatro ejes motores o tipo $B + B$, cuya sencillez es tan preconizada por la mayoría de las casas constructoras de material de tracción eléctrica, obedece a que por la Compañía del Norte se fijó como límite máximo de adherencia el coeficiente $\frac{1}{7}$ y a la imposibilidad de exceder de una carga por eje de 13,5 toneladas, limitación esta última impuesta por la resistencia de los puentes metálicos existentes en el trayecto electrificado; el acierto de esta elección ha sido confirmado por la experiencia, pues en condiciones climatológicas frecuentes en el puerto se han observado coeficientes de adherencia aun más bajos que el citado, haciéndose preciso acudir al aumento artificial de aquélla mediante el empleo de arena. Doce es el número de locomotoras necesarias para efectuar el servicio correspondiente a la primera parte (por hoy ampliamente suficiente) del programa de la electrificación, que consiste, como ya hemos dicho, en remolcar 6 600 toneladas brutas diarias en veinte circulaciones ascendentes de 330 toneladas.

Por virtud de disposición oficial, y de acuerdo con las leyes de protección a la industria nacional, se dividió el suministro de estas doce locomotoras en dos partes iguales, adjudicándose la construcción de seis locomotoras a la General Electric Co. de Schenectady (E. U. A.), representada por la Sociedad Ibérica de Construcciones Eléctricas, y encargando las otras seis a la Sociedad Española de Construcción Naval, que ha construído en sus talleres de Sestao toda la parte mecánica de la misma y montado los equipos eléctricos procedentes de la Westinghouse Mfg. Co.

Aunque las condiciones fundamentales de ambos tipos de locomotoras son idénticas, ya que al mismo servicio se destinan, las describiremos por separado, pues presentan disposiciones esencialmente diferentes, sobre todo en cuanto a los equipos eléctricos se refiere.

Locomotoras de la General Electric Co.

Características generales.—Son estas locomotoras de fabricación enteramente americana, procediendo

(1) Véanse los números 2 385, 2 386, 2 387, 2 392, 2 395, 2 402 y 2 408 de la REVISTA, páginas 88, 103, 127, 216 y 273 del tomo I de 1923, y 110 y 241 del tomo I de 1924.