Algunas notas sobre las curvas de las carreteras

Todo conductor de automóvil, *al ver llegar una curva*—se supone que marcha sobre carretera—, ha de prepararse, e instintivamente se prepara, en los supuestos de que conoce su profesión y de que la desempeña correctamente, supuestos que con demasiada frecuencia son falsos, a los efectos del cambio brusco de curvatura del trazado y a los que se derivan de la aparición que ha de hacer fatalmente la fuerza centrífuga tan pronto como el cambio de dirección se inicie. Si nuestro personaje *conoce el terreno que pisa*, verá llegar la curva con tranquilidad relativa, nunca absoluta, y maniobrará con toda la corrección que le permitan las circunstancias del momento, para entrar en ella, recorrerla y salir *sin novedad* y sin que los viajeros *pasen un mal rato;* todo ello por aquello de que la experiencia es madre de la ciencia.

Si el conductor no conoce la carretera que recorre, cada curva de ésta constituirá para él un problema que ha de resolver en segundos: bien, seguramente, si es prudente, previsor, sereno y experto; regular, con muchas probabilidades de mal, si le falta alguna de estas cualidades. Desconoce en tal caso la *calidad* de la curva, la visibilidad que hay en ella, si está o no peraltada y, en caso afirmativo, la forma en que se ha establecido el peralte y la velocidad que ha servido de base para fijar su magnitud, así como el estado del pavimento. Para que las probabilidades de resolver el problema satisfactoriamente sean muchas, el conductor procura recorrer una curva de radio variable, infinito en los puntos de entrada y de salida, que sitúa en las alineaciones rectas correspondientes, finito y mínimo, claro que el mayor posible, en el centro, y procura también que dicha curva esté toda ella en la mitad de la carretera opuesta al vértice del ángulo que forman aquéllas, por temor de que la carretera no esté peraltada en la curva y conserve en ésta la sección bombeada de las rectas.

Resulta de lo expuesto lo que todos tenemos bien sabido; esto es, que la mayoría de las curvas de las carreteras constituyen hoy día *zonas de gran peligro* para los que circulan por ellas, peatones, vehículos de tracción animal, caballerías, automóviles, etc., y que, por tanto, los ingenieros que las tienen a su cargo han de preocuparse de establecerlas en forma tal que el calificativo que antes les hemos dado no tenga razón de ser en lo que ello sea posible en la realidad, lo cual ocurrirá cuando en todo accidente automovilista pueda afirmarse sin vacilación que la culpa de él no la tuvo la carretera. Es de todo punto evidente que ha de concurrir otra circunstancia, y es la de que cada país establezca las curvas de sus carreteras con una instrucción única, a la que se dé una gran publicidad, a fin de que los automovilistas sepan a qué atenerse en sus excursiones.

Veamos ahora cómo se han de proyectar, primero, y construir, después, las curvas de las carreteras para que *al verlas llegar* un conductor de automóvil las reciba con la misma tranquilidad que si fueran alineaciones rectas, en lo que esto es posible.

Cuatro son los elementos de toda curva que han de ser objeto de gran atención por parte del ingeniero.

I. La curvatura.
II. La sección transversal.
III. El ancho.
IV. La visibilidad.

I. La curvatura

Hasta hace pocos años las alineaciones rectas de todas las carreteras del mundo se enlazaban entre sí con curvas circulares cuyos radios tenían, y tienen, valores numéricos muy diferentes, desde unos cuantos metros hasta centenares de éstos, y en algunos casos, millares. En los puntos de tangencia de unas y otras alineaciones, rectas y curvas, el radio de curvatura del trazado pasa bruscamente de un valor infinito a otro finito, o al revés, circunstancia que no tuvo importancia alguna antes de que circulasen automóviles por las carreteras; hoy día la tiene, y grande, muy especialmente si el valor del radio de la curva es de los que exige imperiosamente el establecimiento de peralte, porque entonces se presenta la cuestión relativa a la situación del origen de éste, que colocado en la recta o en la curva da lugar a una solución defectuosa, en el primer caso por establecer peralte donde no es necesario, y en el segundo por faltar donde debe existir.

Con objeto de que no sea brusco el tránsito de las alineaciones rectas a las curvas, y viceversa, desde hace algún tiempo, no mucho, se ha propuesto, y se ha llevado a la práctica también, la aplicación en carreteras de los procedimientos que se emplean en ferrocarriles para enlazar las alineaciones rectas con las curvas circulares, con objeto de que el paso del radio de curvatura infinito de las primeras al finito de las segundas se haga de una manera gradual, mediante el establecimiento entre unas y otras de parábolas cúbicas o de radioides, procedimientos que con todo rigor y detalle se exponen en la obra de M. Leber *Calculs de raccordements paraboliques dans les tracés de Chemins de fer.*

Sobre la preferencia que procede conceder a dichas curvas dice aquel ilustre ingeniero lo que sigue:

«Es indiscutible que, por lo que se refiere a las aplicaciones de carácter práctico, son admisibles, indistintamente, las cuatro curvas, así como que ha de merecer la preferencia la que exija cálculos más sencillos y operaciones más fáciles sobre el terreno para el trazado o replanteo.

»La ordenada de la radioide de abscisas se expresa en función de la abscisa por medio de una fórmula sencilla que contiene funciones elípticas de primera y de segunda especie con argumento 90º, para las cuales Legendre preparó una tabla.

»La ecuación de la radioide de cuerdas en coordenadas polares es muy sencilla y corresponde a la lemniscata de Bernouilli. Esta curva constituye la mejor solución que es posible imaginar, porque la relación entre el radio de curvatura y el vector es sencillísima y permite calcular rápidamente las coordenadas polares, o las rectilíneas, que corresponden a un radio de curvatura dado. Con un teodolito cuyo anteojo permita medir distancias se puede replantear la lemniscata mencionada, con coordenadas polares, con la mayor sencillez posible.

»La ecuación de la radioide de arcos contiene la longitud de este elemento, y como consecuencia de ello, las expresiones de las coordenadas rectilíneas de un punto son integrales cosenopotenciales o senopotenciales. Aunque esta curva, desde el punto de vista matemático, es la que mejor resuelve el problema, constituye la peor solución del mismo por lo complicadísimas que son las relaciones entre las coordenadas de un punto y entre éstas y el radio de curvatura.

»Las dos primeras radioides tienen relaciones complicadas entre las coordenadas rectilíneas de un punto; por el contrario, es muy sencilla la que liga éstas con el radio de curvatura. La radioide de cuerdas tiene, además, la ventaja de que es una curva muy conocida, cuyo trazado es sumamente sencillo; merece la preferencia entre las radioides.

»La parábola cúbica tiene una ecuación muy sencilla en coordenadas rectilíneas y es muy complicada la relación entre éstas y el radio de curvatura, sin que existan razones de gran peso para preferirla a la radioide de cuerdas.»

Pablo Adam, ingeniero de Puentes y Calzadas, publicó en el tomo X (1895) de los *Anales de Puentes y Calzadas* un artículo cuyo objeto era, palabras de su autor:

«... demostrar que la lemniscata de Bernouilli es de aplicación tan sencilla, por lo menos, como la parábola cúbica, en el caso frecuente de enlaces de alineaciones rectas con curvas circulares, tanto en líneas en construcción como en las construídas.»

En dicho artículo se calculan las fórmulas necesarias para establecer el enlace, y se acompañan las tablas numéricas correspondientes para los dos casos de radio o de centro conservado y para valores del primero comprendidos entre 200 y 850 metros, de metro en metro. También forma parte del artículo la tabla para replantear la lemniscata

$$p = 190\sqrt{\operatorname{sen} 2\theta}$$

desde $\theta = 0^\circ$ hasta $\theta = 3^\circ$.

Es de todo punto evidente que, en carreteras, por lo menos, no existe razón alguna que se oponga a que la curva que ha de enlazar dos alineaciones rectas consecutivas tenga el radio de curvatura variable en toda su longitud, desde un valor infinito en cada uno de los puntos de tangencia hasta un valor finito, y mínimo en el punto correspondiente a la bisectriz del ángulo que forman aquéllas. Así, la entrada en las curvas, lo mismo que la salida de ellas, se hará por los automóviles muy suavemente, y en su recorrido no se presentará la menor dificultad, puesto que el peralte, caso de que sea necesario, también será variable, desde un valor cero en los dos primeros puntos hasta un máximo en el tercero.

Lo expuesto constituye, sin duda alguna, el motivo de que en varios países, en alguno reglamentariamente, se haya sustituído la circunferencia por la lemniscata de Bernouilli para enlazar las alineaciones rectas consecutivas de las carreteras; las propiedades de la segunda curva permiten que pueda trazarse sobre el terreno con rapidez, muy sencillamente y con gran precisión.

Aquella lemniscata es una curva tan conocida, que nos limitaremos en este escrito a exponer sus propiedades más importantes en relación con su aplicación en las carreteras, sin demostrarlas, naturalmente. Quien desee un conocimiento completo de ella debe acudir a la obra de Gomes Teixeira sobre curvas, y a la de Leber, antes mencionada.

Las secciones de la superficie de revolución llamada «toro» por planos paralelos a su eje y tangentes interiormente, se denominan *lemniscatas;* se clasifican en dos grupos, elípticas e hiperbólicas, por ser las primeras la podar de una elipse, y las segundas, la de una hipérbola; cuando ésta es equilátera, la lemniscata correspondiente es la de Bernouilli; las ecuaciones de una y de otra son, respectivamente:

$$x^2 - y^2 = a^2$$

$$(x^2 + y^2) = a^2(x^2 - y^2)$$

En coordenadas polares, la de la segunda curva es:

$$p^2 = a^2 \cos 2\theta$$

y si el eje polar es la tangente a la curva en el punto doble

$$p^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$$

Esta última ecuación es la que utilizaremos.

La lemniscata de Bernouilli tiene la forma dibujada en la figura 1.ª, en la que $OE = a$. El punto O

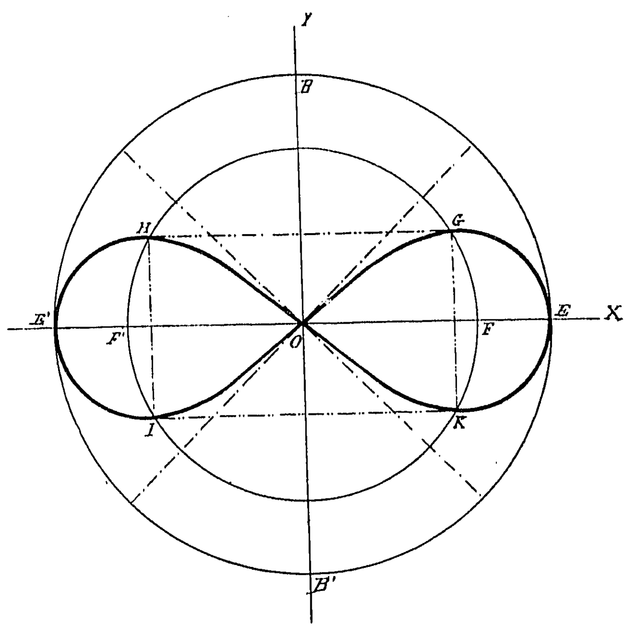

Fig. 1.ª

es doble con dos inflexiones y en él las tangentes forman entre sí el ángulo de 90°, cuya bisectriz es OE. Los puntos F y F' son focos con coordenadas $\left(O; \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ y tienen la propiedad de que el producto de las distancias a ellos de un punto de la curva es constante e igual a $\frac{a}{2}$. Los puntos G, H, I, K, en los que la tangente es horizontal, están en la circunferencia que con centro en O pasa por los focos; sus coordenadas son:

$$x = \pm \frac{1}{4} a\sqrt{6} \qquad y = \pm \frac{1}{4} a\sqrt{2}$$

El ángulo V, figura 2.ª, que forma la tangente con

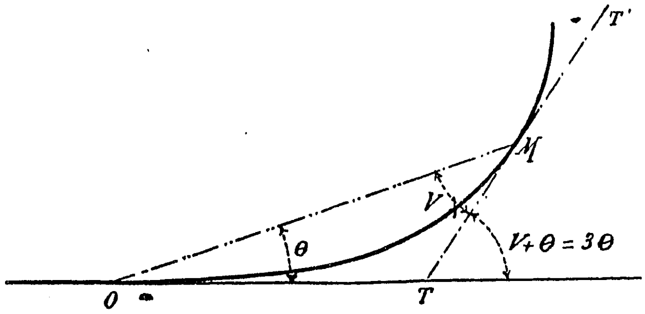

Fig. 2.ª

el radio vector es doble del que forma este último con el eje polar.

El valor del radio de curvatura, en coordenadas polares, se calcula con la fórmula siguiente:

$$R = \frac{a^2}{3p} = \frac{p}{3 \text{ sen } 2\theta} = \frac{p}{3 \text{ sen } V}$$

La longitud del arco de lemniscata depende de una integral elíptica de primera especie.

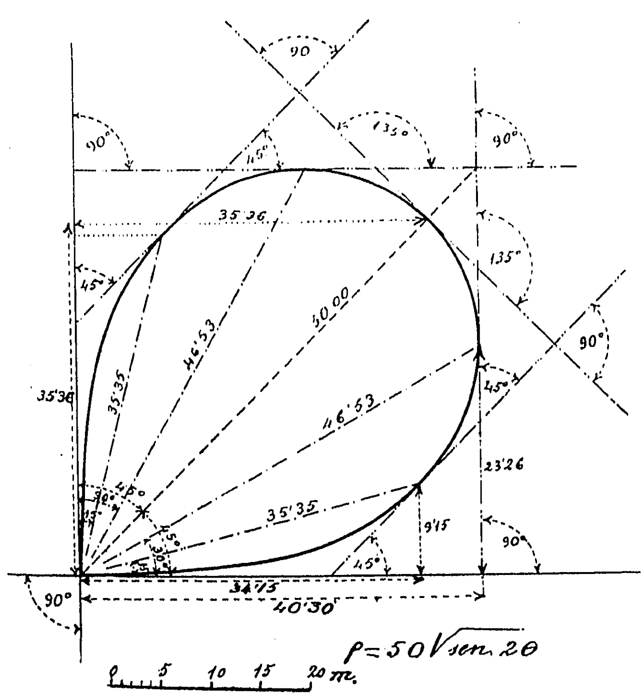

Fig. 3.ª

En la figura 3.ª se ha dibujado una de las ramas de la lemniscata

$$p = 50 \sqrt{\text{sen } 2\theta};$$

la unidad de longitud es el metro. Están acotadas en esta unidad las magnitudes más interesantes de la curva.

Con lo expuesto hay más que suficiente para entrar en la explicación del procedimiento para emplear la lemniscata en el enlace de las alineaciones rectas de las carreteras.

En la figura 4.ª, O_1B es un arco de lemniscata limitado por su centro O_1 y por un punto cualquiera B; A_1O_1VA' es la tangente en O_1; BC es la tangente en B; VBB' es la normal, y O_1B el radio vector; con relación a VB' se ha dibujado el arco simétrico del O_1B, que tiene en O_1' su centro y cuyas tangente y normal en B son, respectivamente, la prolongación de CB y la recta VB'; ésta es, además, la bisectriz del ángulo A_1VA_2; la del suplementario $A'VA_2$ es VB'. Entre los ángulos marcados

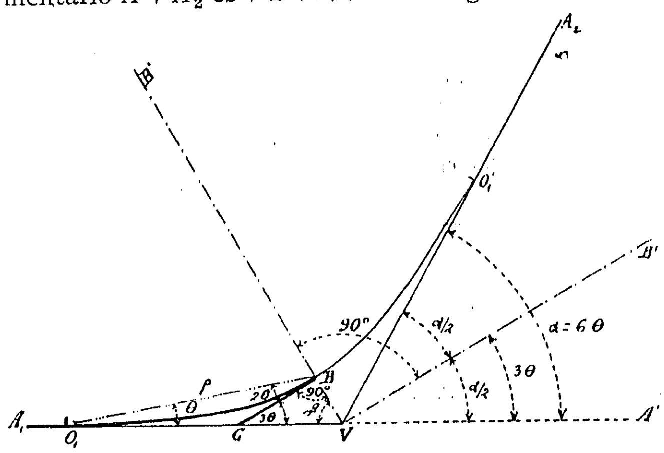

Fig. 4.ª

en la figura existen las relaciones acotadas, facilísimo de comprobar; de la misma figura se deduce

$$\theta = \frac{\alpha}{6}$$

$$\text{sen } \beta = \text{sen}\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\text{sen } O_1BV = \text{sen } O_1BB' = \text{sen } (90^\circ - 2\theta) = \text{sen}\left(90^\circ - \frac{\alpha}{3}\right)$$

$$O_1B = p = a\sqrt{\text{sen } 2\theta} = a\sqrt[3]{\text{sen } \frac{\alpha}{3}}$$

$$VO_1 = p\,\frac{\text{sen}\left(90^\circ - \frac{\alpha}{3}\right)}{\text{sen}\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} \qquad [1]$$

$$VB = p\,\frac{\text{sen } \frac{\alpha}{6}}{\text{sen}\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

Estas fórmulas, con muy ligeras explicaciones, constituyen el preámbulo de las instrucciones redactadas para el servicio de carreteras del Gobierno de Egipto y del Municipio de El Cairo por el ingeniero F. G. Royal-Dawson, profesor de Ferrocarriles y de Carreteras en la Escuela Real de Ingenieros de dicha capital.

Sirven, además, aquellas fórmulas para resolver el problema inverso: dadas dos alineaciones rectas, A_1V y VA_2, cuyo vértice es V y cuyo ángulo es α, determinar las longitudes VO_1 y VB con las que se sitúan el origen y el extremo del arco de lemniscata que ha de constituir la mitad de la curva de enlace de aquellas alineaciones; la otra mitad es el arco simétrico con relación a la bisectriz VBB'.

El valor numérico de la constante a depende de las circunstancias que presidan el trazado de la carretera.

De aquí en adelante a las magnitudes análogas a VO_1 las denominaremos tangentes, y a las que lo sean a VB, bisectrices.

Veamos ahora el procedimiento práctico para proyectar, trazar y replantear la lemniscata de Bernouilli.

a) *Al estudiar el trazado en el campo.*—Señalados los vértices y medidos los ángulos de las alineaciones, la configuración del terreno y el espíritu que presida el trazado indicarán las magnitudes que, entre ciertos límites, habrán de tener las tangentes y la bisectriz en cada uno de aquéllos, y en vista de ellos se elegirá la lemniscata que por el valor numérico de la constante a y con aplicación de las fórmulas [1] resuelva la cuestión, trabajo que necesariamente ha de hacerse con auxilio de tablas o de gráficos, a fin de que en él se empleen muy pocos minutos. Con tal objeto hemos preparado la tabla, que llamamos I, de la que se incluye a continuación su principio, en la que el ángulo de las alineaciones, en grados sexagesimales, constituye su única entrada; en la tabla están la tangente y la bisectriz correspondientes a ángulos de un número entero de grados, entre 1º y 120º, de la lemniscata

$$p = 100\sqrt{\text{sen } 2\theta}$$

TABLA I

Angulo de las alineaciones — α	Tangente — M	Bisectriz — M	Angulo de las alineaciones — α	Tangente — M	Bisectriz — M
1°	5,30	0,22	28°	40,95	3,37
2°	10,31	0,06	29°	41,72	3,56
3°	13,22	0,12	51°	57,29	8,87
4°	15,22	0,18	52°	57,97	9,17
26°	39,39	3,01	53°	58,66	9,45
27°	40,17	3,19	54°	59,34	9,75

Se ha elegido la constante 100 para que la tabla pueda servir para las curvas en las que dicha constante sea un múltiplo o un divisor sencillo de 100, puesto que los valores de las tangentes y de la bisectriz son directamente proporcionales a la constante. Si además de los puntos extremos y central de la curva conviniera señalar algún punto intermedio entre ellos, se recurriría a la tabla II, de la que más adelante se tratará.

b) *En el gabinete.*—El dibujo de la lemniscata en el papel por el procedimiento de trazar radios vectores y llevar sobre ellos las magnitudes que les correspondan es largo, lo mismo que el de abscisas y ordenadas; es más breve emplear plantillas, sin que por ello se pierda nada en precisión. Un número relativamente pequeño de ellas será suficiente para las necesidades corrientes.

c) *Replanteo de la lemniscata al construir la carretera.*—Puede hacerse con coordenadas polares o con las rectilíneas; se ha dado preferencia a las primeras porque con ellas el procedimiento que ha de emplearse es muy rápido y muy preciso, mucho más que el que exigen las segundas. Para su aplicación expedita se ha preparado la tabla II, aplicable directamente a la lemniscata de constante 100 metros, y mediante operaciones aritméticas sencillísimas a las que tengan constantes cuyo valor numérico sea un múltiplo o un divisor sencillo de 100, por ser proporcionales a la constante a las magnitudes que en aquélla se consignan.

Los ángulos que figuran en la segunda columna corresponden a radios vectores que miden un número entero de metros; empiezan en 0º y terminan en 20º = 120/6; su ley de variación es la necesaria para que las longitudes de las cuerdas sean, aproximadamente, cinco metros. En la tabla están también estas longitudes, sus sumas a partir del origen, el radio de curvatura en cada punto y lo que convencionalmente llamaremos radio medio en el arco limitado por el origen y por cada uno de los puntos de la tabla.

TABLA II

PUNTOS DE LA CURVA			CUERDAS		RADIOS DE CURVATURA	
Número de orden	Angulo polar — θ	Radio polar — M	Longitud — M	Sumas — M	En cada punto — M	Medio — M
0						
1	4′ 15″	5	5	5	666,67	666,67
2	17′	10	5	10	333,33	500
3	38′ 15″	15	5	15	222,22	407,41
15	16° 36′	74		76,43	45,05	145,84
16	18° 44′	78	4,96	81,39	42,74	139,55
17	20°	81	3,46	84,85	41,15	135,54

Para replantear la lemniscata sobre el terreno se hace estación con un teodolito en el origen de la curva, tangente de entrada o de salida; con el anteojo y con una mira se señalan sucesivamente las direc-

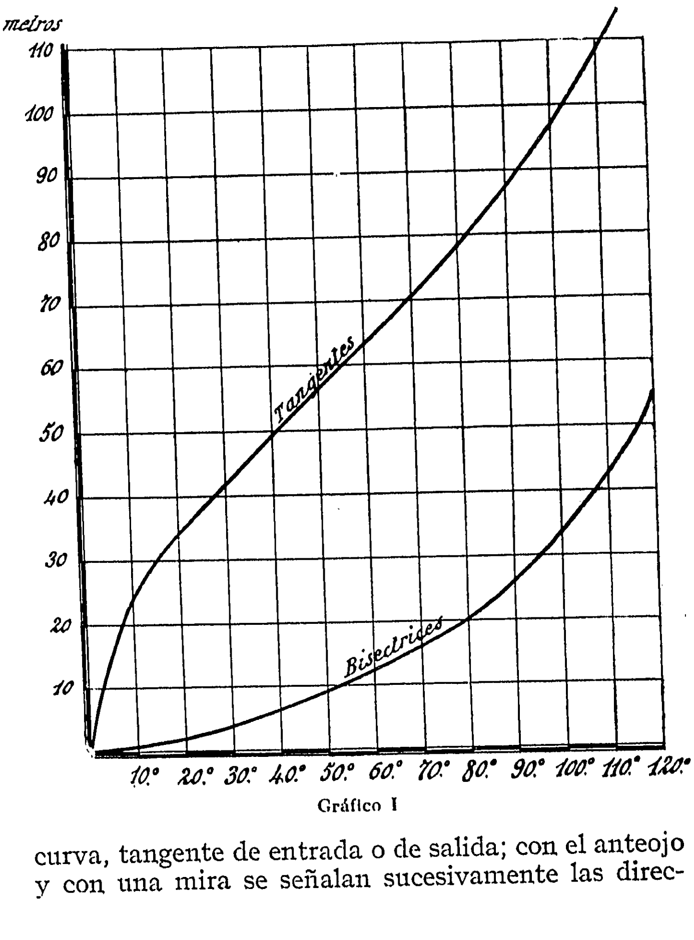

Gráfico I

ciones consignadas en la tabla II, situando la segunda a la distancia que le corresponda en cada una de aquéllas. Se facilitaría extraordinariamente el replanteo de la curva con un teodolito cuyo limbo horizontal no estuviera dividido en la forma corriente, sino que a uno y otro lado de una línea de fe tuviera diez y siete rayas que correspondieran a los ángulos de la tabla y marcadas con los números de orden que respectivamente tienen en ella.

Si las alineaciones rectas forman ángulos que no están medidos por un número entero de grados, pueden obtenerse los correspondientes valores de la tangente y de la bisectriz por el cálculo directo o por medio de un gráfico que hemos preparado en escala bastante grande, reproducido a continuación en escala muy pequeña, lo que es suficiente en la mayoría de los casos (gráfico I).

Para replantear puntos de la lemniscata correspondientes a ángulos vectoriales que no estén en la tabla, se hace el cálculo directo de sus elementos, o se recurre al gráfico II, que es una reproducción del que hemos dibujado en escala muy grande.

En la figura 5.ª se ha dibujado un enlace con lemniscata de dos alineaciones rectas que forman entre sí el ángulo 120°. A_1V y VA_1' son las aristas exteriores del paseo, también exterior, en la curva de la carretera. En la tabla I encontraríamos los valores

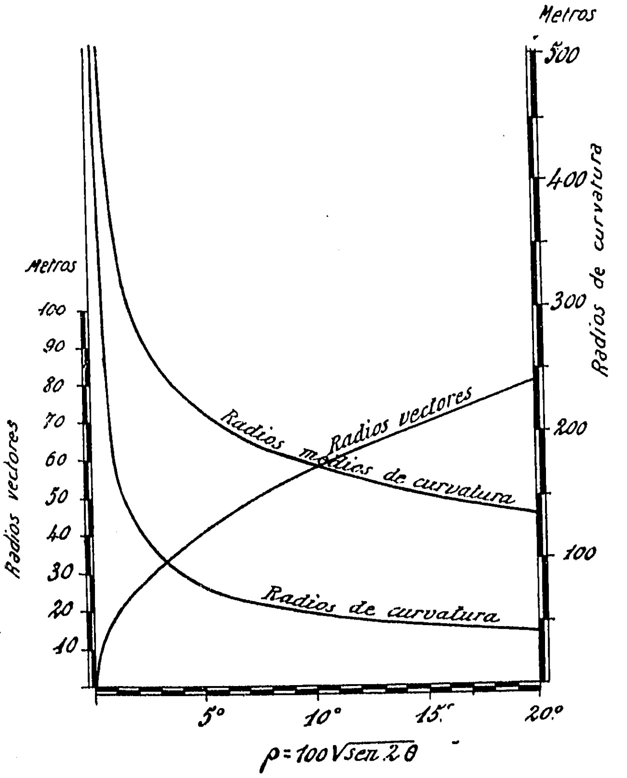

Gráfico II

de la tangente y de la bisectriz, que para la lemniscata $a = 50$ m, son, respectivamente, 61,41 y 27,42 m. Con estos elementos y con la plantilla correspondiente se han dibujado los arcos de la curva T_1B y $T_1'B$. Para dibujar la arista exterior del paseo interior, en la curva, se traslada paralelamente a sí misma,

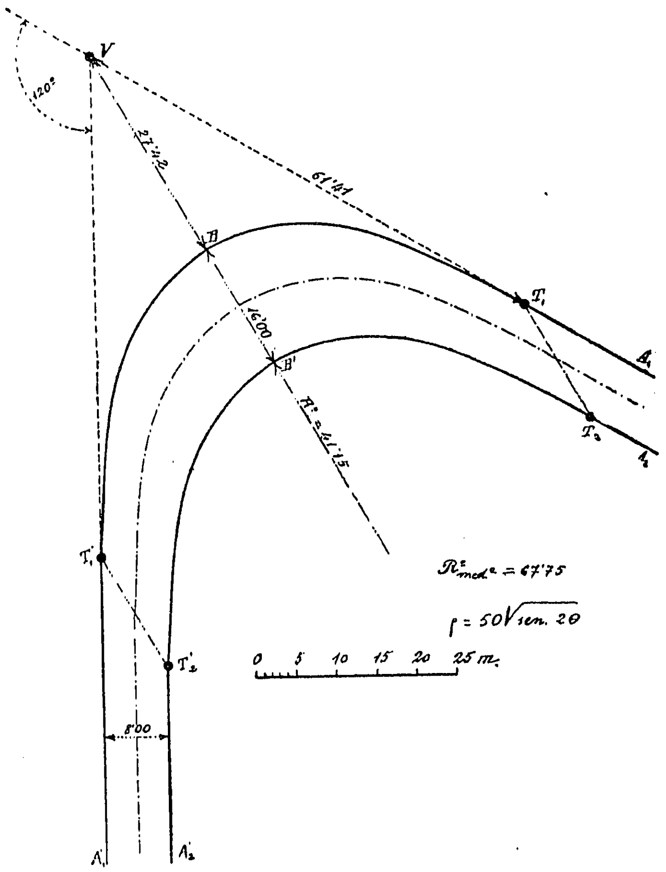

Fig. 5.ª

y en dirección de la bisectriz, la lemniscata antes dibujada; la magnitud de este traslado es

$$T_1T_2 = BB' = T_1'T_2' = \frac{8}{\operatorname{sen}\dfrac{180^\circ - \alpha}{2}} = \frac{8}{\operatorname{sen} 30^\circ} =$$

$$= \frac{8}{0,5} = 16 \text{ m}$$

Con esta manera de proceder se obtiene automáticamente el sobreancho variable en la zona de la curva, creciente desde los puntos de tangencia hacia el de la bisectriz, y no hay pretexto para circular por la mano contraria, por ser idénticos los radios interior y exterior, en el supuesto, naturalmente, de que el pavimento de la curva no tenga bombeo, de que sea una superficie reglada con inclinación hacia el interior de la misma.

De lo dicho en los párrafos que anteceden se llega a la conclusión de que las alineaciones rectas consecutivas de las carreteras deben enlazarse con lemniscatas de Bernouilli, sin combinación con ninguna otra curva circular, excepto cuando los radios de éstas puedan ser muy grandes y muy pequeño el ángulo de las alineaciones.

B. OLIVER Y ROMÁN
Ingeniero de Caminos