

IV. Visibilidad

En los desmontes en curva, sobre todo si ésta es de radio pequeño y de gran longitud, puede ocurrir que dos vehículos que marchen en la misma o en opuesta dirección no se vean a la distancia necesaria para maniobrar correctamente y sin el menor riesgo de alcance o de choque, especialmente cuando las velocidades son grandes.

Para que la circulación por tales curvas se haga con seguridad y tranquilidad se ensancha el desmonte por el lado interior, corriendo el talud desde la altura de 1,20 sobre el pavimento lo que sea necesario para que dos vehículos que marchen por el mismo lado de la carretera se vean hasta que la distancia que los separe sea, por ejemplo, 125 m.

En la figura 8.<sup>a</sup>, *abb'a'* es la trayectoria que recorre el centro de gravedad de un automóvil que circula por la media carretera de su derecha, esto es, reglamentariamente; si desde una posición cualquiera, *b*, se traza la cuerda *bb'* con longitud de 125 m, todo el volumen que corresponde al segmento

circular limitado por dicha cuerda y por el arco de curva interior ha de ser excavado para que desde *b* se vea *b'*; la envolvente de las rectas análogas a *bb'* limitará el corrimiento necesario del talud del desmonte para obtener la visibilidad deseada.

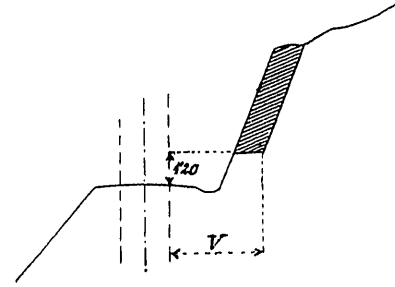


Fig. 9.<sup>a</sup>

Si *bb'* se designa por *D*,

$$\frac{D^2}{4} = V^2 R \qquad V = \frac{1}{8} \frac{D^2}{R}$$

puesto que siempre *V* es muy pequeño con relación a *R*.

En la figura 9.<sup>a</sup> se ha dibujado una sección transversal de lo que representa la 8.<sup>a</sup>.

B. OLIBER Y ROMÁN  
Ingeniero de Caminos

## Repartición del peso en los vehículos de cuatro ejes

La tensión de los resortes permite, como es sabido, variar la repartición del peso de un vehículo entre sus ejes, pero claro está que no puede realizarse una determinada repartición si no está conforme con las condiciones que las ecuaciones estáticas imponen; el

problema tiene, por eso, dos etapas: primero hay que escoger una distribución conveniente entre las posibles, o, si se quiere, hacer posible una repartición conveniente, y en segundo lugar hay que realizar la distribución escogida, graduando los tensores de la suspensión.

Nos proponemos estudiar la primera parte del problema en el caso de un vehículo de cuatro ejes.

\* \* \*

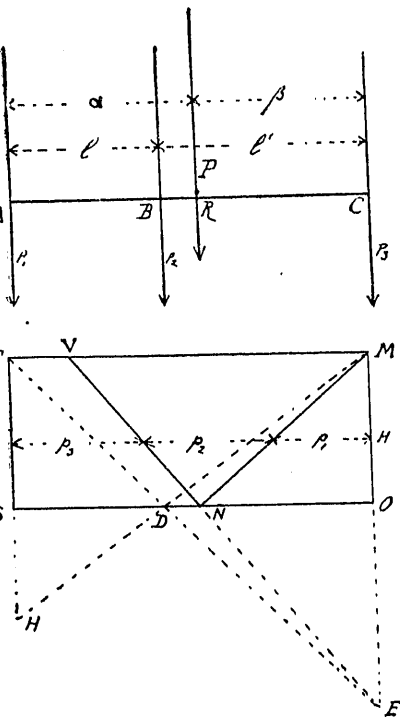


Fig. 1.<sup>a</sup>

El caso de tres ejes nos servirá de punto de partida: si suponemos un vehículo (fig. 1.<sup>a</sup>) de peso *P* sobre tres ejes, *A*, *B*, *C*, que distan entre sí *l*, *l'*, y llamamos *p*<sub>1</sub>, *p*<sub>2</sub>, *p*<sub>3</sub> a los pesos que gravitan

sobre los tres ejes y  $\alpha$ ,  $\beta$  a las distancias del centro de gravedad a las verticales de los ejes extremos, tendremos las ecuaciones

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 &= P \\ p_1(l + l') + p_2 l' &= P \cdot \beta \end{aligned} \qquad [1]$$

de las que se deduce, en función de *p*<sub>2</sub>,

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{P\beta}{l + l'} - p_2 \frac{l'}{l + l'} \\ p_3 &= \frac{P\alpha}{l + l'} - p_2 \frac{l}{l + l'} \end{aligned} \qquad [2]$$

Tomemos, en un sistema de coordenadas cartesianas *NOM*, como abscisas *OM* los valores de *p*<sub>2</sub> y como ordenadas *ON* los correspondientes de *p*<sub>1</sub>, pudiendo ser distintas las escalas; el lugar geométrico de los valores de *p*<sub>1</sub> será una recta *MN*, en la que

$$OM = \frac{P\beta}{l'} \qquad ON = \frac{P\beta}{l + l'}$$

Si a continuación de las ordenadas *p*<sub>1</sub> llevamos, en su misma escala, los valores de *p*<sub>2</sub>, obtendremos como lugar la recta *NV*, en la cual  $MV = \frac{P\beta}{l'}$ . Comple-

tando el rectángulo *OMTS* con *OS* = *MT* = *P*, el segmento de ordenada comprendido entre *NV* y *ST* será igual a *p*<sub>3</sub>, y así, cualquier ordenada queda dividida por las rectas *MN* y *NV* en tres segmentos, que representan los valores de las tres componentes *p*<sub>1</sub>, *p*<sub>2</sub>, *p*<sub>3</sub>.

Las rectas *OS* y *MT* limitan la región en que las

tres componentes son positivas; el punto  $N$  divide a  $OS$  en la relación

$$\frac{ON}{NS} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{CR}{RA}$$

y el  $V$  en la relación

$$\frac{MV}{VT} = \frac{\beta}{l' - \beta} = \frac{CR}{RB}$$

Mientras el centro de gravedad se proyecta en  $R$  dentro del tramo  $BC$ ,  $MN$  pasa por  $M$  y  $NV$  por un punto  $E$  a una distancia tal que  $\frac{OE}{OM} = \frac{l'}{l}$ .

Cuando el centro de gravedad esté en la vertical del punto  $B$  donde está el eje central, el diagrama se convierte en el  $MDT$ , siendo  $\frac{SD}{OD} = \frac{l}{l'}$ , y si quedase dentro del tramo inmediato, sus dos lados pasarían por los puntos  $T$  y  $H$ , siendo  $\frac{SH}{ST} = \frac{l}{l'}$ .

\* \* \*

Otra suerte de diagrama puede establecerse trazando un triángulo equilátero (fig. 2.<sup>a</sup>) cuya altura represente el valor del peso  $P$  del vehículo; las dis-

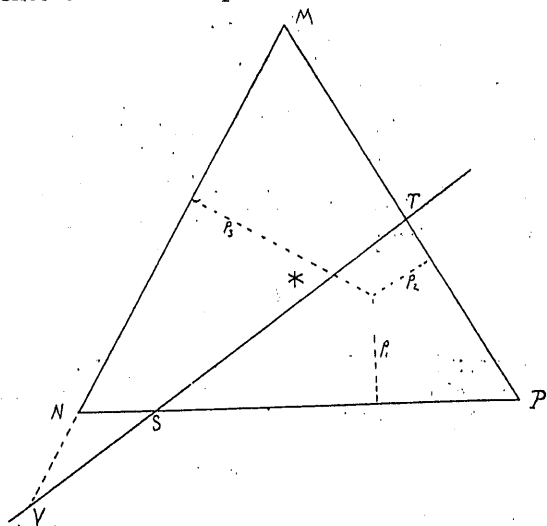


Fig. 2.<sup>a</sup>

tancias de un punto cualquiera, del interior del triángulo, a sus tres lados, tienen una suma igual a  $P$  y pueden, por consiguiente, representar las tres componentes del peso  $\phi_1\phi_2\phi_3$ . La segunda de las ecuaciones [1] limita los puntos cuya repartición es posible a los de una recta  $ST$  definida por las relaciones

$$\frac{MT}{TP} = \frac{\alpha}{\beta} \quad \frac{SP}{NS} = \frac{\beta}{\alpha - l} \quad \frac{VN}{VM} = \frac{\alpha - l}{\alpha}$$

Por otra parte, de las igualdades

$$PM = PN \quad \frac{PT}{PM} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \quad \frac{PS}{PN} = \frac{\beta}{l'}$$

deducimos

$$\frac{PT}{TS} = \frac{l'}{l + l'}$$

lo que nos dice que, al variar la posición del centro de gravedad en el vehículo, se desplaza en el diagrama la recta  $ST$ , conservando su dirección.

\* \* \*

Supongamos ahora un vehículo de cuatro ejes  $A, B, C, D$  (figura 3.<sup>a</sup>), y sean  $l, l', l''$  las distancias de estos ejes,  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$  los valores de las componentes que sobre ellos gravitan y  $\alpha, \beta$  las distancias de la vertical del centro de gravedad a los ejes extremos; tendremos las ecuaciones

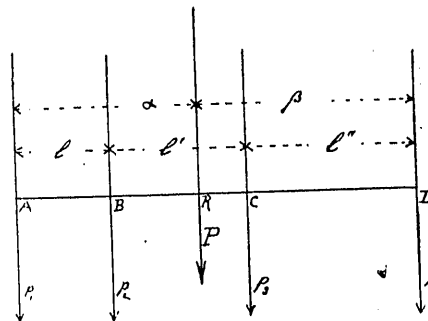


Fig. 3.<sup>a</sup>

$$\begin{aligned} \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 &= P \\ \phi_1(l + l' + l'') + \phi_2(l' + l'') + \phi_3 l'' &= P\beta \end{aligned} \quad [3]$$

de donde, en función de  $\phi_2$  y  $\phi_3$ ,

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{P\beta}{l + l' + l''} - \phi_2 \frac{l' + l''}{l + l' + l''} - \phi_3 \frac{l''}{l + l' + l''} \\ \phi_4 &= \frac{P\alpha}{l + l' + l''} - \phi_2 \frac{l}{l + l' + l''} - \phi_3 \frac{l + l'}{l + l' + l''} \end{aligned} \quad [4]$$

Sobre un sistema de ejes coordenados  $OMNS$  (figura 4.<sup>a</sup>) en el que  $ON$  representa la componente  $\phi_2$ ,  $OM$  la  $\phi_3$  y  $OA$  la  $\phi_1$ , el lugar geométrico de  $\phi_1$  será el plano  $ABRN$ ; si tomamos  $OS = P$  en el sistema de ejes  $STUA$ , en el que  $\phi_2$  se mide sobre  $SV$ ,  $\phi_3$  sobre  $ST$  y  $\phi_4$  sobre  $SA$ , el lugar de  $\phi_4$  será el plano  $TVCA$ ; si por  $RN$  y  $TV$  hacemos pasar planos paralelos a  $OS$ , formaremos un prisma cuya base  $OMRN$  abarcará todos los puntos a que correspondan valores positivos para las cuatro componentes; si por uno de ellos,  $H$ , hacemos pasar una paralela a  $OS$ , la parte interceptada entre  $OMRN$  y  $ABRN$  será  $\phi_1$ , la interceptada entre  $ACVT$  y  $SUVT$  será  $\phi_4$  y la parte intermedia será la suma de  $\phi_2$  y  $\phi_3$ , que se podrán también separar por un plano  $ABDC$ . En cada una de las caras del prisma, una de las componentes es igual a cero, y vemos dibujarse un diagrama como el de la figura 1.<sup>a</sup>; las cuatro aristas, en las que dos de las componentes son cero,

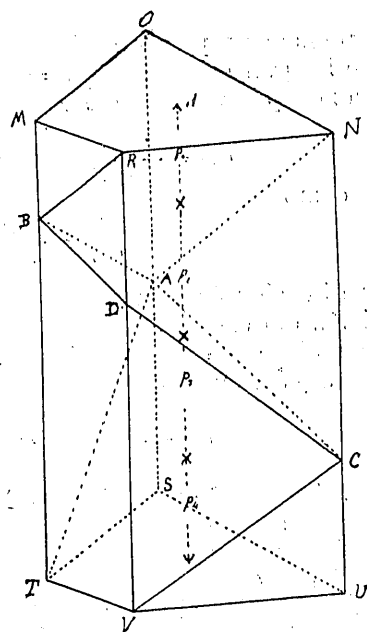


Fig. 4.<sup>a</sup>

quedan divididas por los puntos  $A, B, C, D$ , según las relaciones

$$\frac{OA}{AS} = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \frac{MB}{BT} = \frac{\beta - l'}{\alpha}, \quad \frac{NC}{CU} = \frac{\beta}{\alpha - l}, \quad \frac{RD}{DV} = \frac{\beta - l''}{\alpha - l}$$

Como los valores de  $\phi_2$  y  $\phi_3$  son las coordenadas del punto  $H$  sobre los ejes  $MON$ , los dos volúmenes centrales del prisma de la figura 4.<sup>a</sup> no son necesarios, y sólo necesitaremos conocer la base del prisma y la posición de los planos  $ABRN$  y  $ACVT$ .

Si  $FOG$  (fig. 5.<sup>a</sup>) son los ejes coordenados cuyas abscisas representan los valores de  $\phi_3$  mientras las

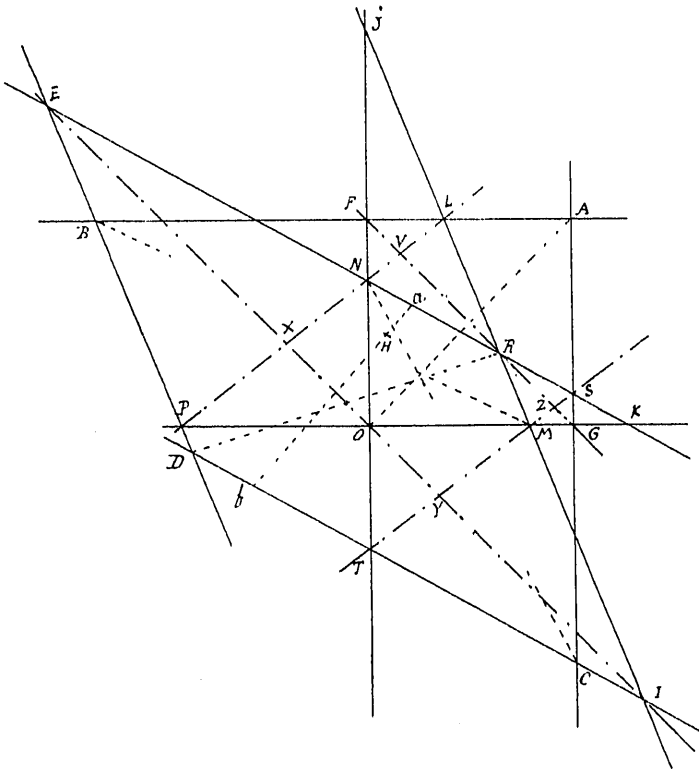


Fig. 5.<sup>a</sup>

ordenadas representan los de  $\phi_2$ , el lugar geométrico de los puntos en que  $\phi_1 = 0$  será, según las ecuaciones [3], una recta  $NK$ , en la que

$$\frac{ON}{NK} = \frac{P\beta}{l' + l''}, \quad \frac{OK}{NK} = \frac{P\beta}{l''}$$

y como

$$\frac{ON}{OK} = \frac{l''}{l' + l''}$$

la dirección de esta recta es independiente de la posición del centro de gravedad. Igualmente obtendremos el lugar correspondiente a  $\phi_4 = 0$ , que será la recta  $JM$ , en la que

$$\frac{OJ}{JM} = \frac{P\alpha}{l}, \quad \frac{OM}{JM} = \frac{P\alpha}{l + l'}$$

formándose el cuadrilátero  $OMRN$ , que encierra los puntos a los que corresponden cuatro componentes positivas y que coincide con la base del prisma de la figura 4.<sup>a</sup>.

Para hallar el valor de  $\phi_1$  que corresponde a un punto  $H$ , buscaremos el lugar de los puntos en los que  $\phi_1 = P$ , que será la recta  $DI$ , paralela a  $NK$  y definida por

$$NT = \frac{P(l + l' + l'')}{l' + l''}$$

valor independiente de la posición del centro; tendremos entonces, en una transversal cualquiera,  $a b$

$$\frac{Ha}{ab} = \frac{\phi_1}{P}$$

Trazando la recta  $ED$  lugar de  $\phi_4 = P$ , en la que

$$PM = \frac{P(l + l' + l'')}{l + l'}$$

y las  $FA$  y  $AG$ , que representan igualmente los lugares de  $\phi_2 = P$  y  $\phi_3 = P$ , formaremos el cuadrilátero  $ABDC$ , que envuelve al  $OMRN$  y resuelve el problema de determinar las cuatro componentes que corresponden a cada punto del plano.

Las cuatro parejas de rectas paralelas que forman los polígonos  $ABDC$  y  $OMRN$  forman cuatro paralelogramos (uno cuadrado), cuyas diagonales  $PL, FG, ST, IE$  son dos a dos paralelas y pasan por los cuatro vértices  $O, M, R, N$ . En efecto,  $PL$ , por unir  $P$ , en el cual  $\phi_2 = 0, \phi_4 = P$ , con  $L$ , en el que  $\phi_4 = 0, \phi_2 = P$ , es el lugar de los puntos en que  $\phi_1 + \phi_3 = 0$ ; pasará, por consiguiente, por el punto  $N$ , en el cual separadamente  $\phi_1 = 0, \phi_3 = 0$ , y siendo  $TS$  el lugar en que  $\phi_2 + \phi_4 = 0$ ,  $PL$  y  $TS$  serán paralelas, pues si se encontrasen, en el punto de encuentro la suma  $\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4$  sería igual a cero, lo que no es posible, por ser siempre igual a  $P$ .

El punto  $R$  divide a  $FG$  en la proporción

$$\frac{FR}{RG} = \frac{l' + l''}{\beta - l'}$$

es decir, en la misma proporción en que la vertical del centro de gravedad divide al tramo central  $l'$ ; al variar de posición el centro, variará el punto  $R$ , pero sin salir de la diagonal  $FG$  y arrastrando en su movimiento al paralelogramo  $ERID$ , cuya diagonal  $EI$  pasará siempre por  $O$ , dividiéndose en la proporción

$$\frac{EO}{OI} = \frac{\beta}{\alpha}$$

y esto permite rectificar fácilmente el diagrama cuando es preciso retocar la posición del centro de gravedad sobre el vehículo.

\* \* \*

Se puede llegar a un resultado análogo por un procedimiento distinto. Si  $FGEI$  (fig. 6.<sup>a</sup>) es un tetraedro regular, en el que la altura representa el

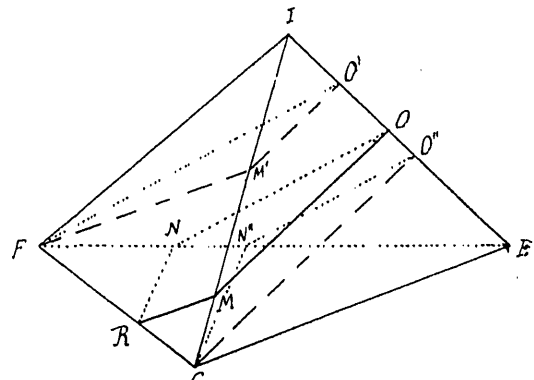


Fig. 6.<sup>a</sup>

peso  $P$  del vehículo, en un punto cualquiera de su interior, la suma de las cuatro distancias a las caras

es igual a  $P$ ; la segunda ecuación estática [3] limita los puntos cuyo reparto es posible a los de cierta sección plana  $MONR$ , que vamos a determinar.

Desarrollando el tetraedro sobre una de sus caras y señalando la componente a que cada una corresponde (fig. 7.<sup>a</sup>), observaremos que si  $M$  es un punto

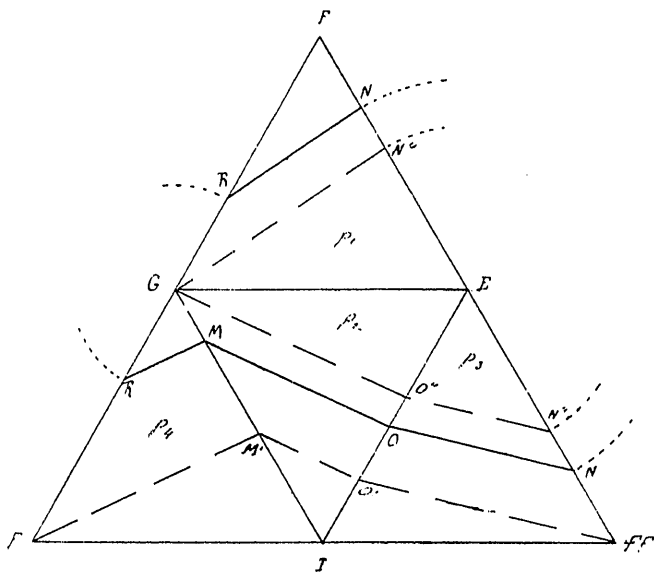


Fig. 7.<sup>a</sup>

de la sección buscada, por estar en la arista  $GI$ , corresponderá a  $p_2 = 0$ ,  $p_4 = 0$ , y, por consiguiente, según las ecuaciones [4],

$$p_3 = \frac{P\alpha}{l+l'} \quad p_1 = \frac{P(\beta-l'')}{l+l'}$$

y como las distancias a las otras dos caras son proporcionales a los dos segmentos  $MG$  y  $MI$ ,

$$\frac{MG}{MI} = \frac{\beta-l''}{\alpha}$$

y del mismo modo obtendremos

$$\frac{NF}{NI} = \frac{\alpha-l}{\beta} \quad \frac{OE}{OI} = \frac{\beta}{\alpha} \quad \frac{RF}{RG} = \frac{\alpha-l}{\beta-l''}$$

Las cuatro relaciones  $\frac{GM}{GR}$ ,  $\frac{IO}{IM}$ ,  $\frac{EO}{EN}$ ,  $\frac{FN}{FR}$  tienen valores independientes de la posición del centro de gravedad, lo que demuestra que, al cambiar ésta, el plano de la sección se mueve paralelamente; esto nos permite hallar fácilmente la sección, haciendo coincidir sucesivamente el centro de gravedad con las verticales de los dos ejes centrales, con lo cual la sección pasará por  $F$  o  $G$ , reduciéndose a un triángulo. En las figuras 6.<sup>a</sup> y 7.<sup>a</sup> encontramos los triángulos  $FM'O'$  y  $GO''N''$ , correspondientes, respectivamente, a  $\alpha = l$  y  $\beta = l''$ , y determinados por las relaciones

$$\frac{M'G}{M'I} = \frac{l'}{l} \quad \frac{O'E}{O'I} = \frac{l+l''}{l} \quad \frac{N''F}{N''I} = \frac{l'}{l''} \quad \frac{O''E}{O''I} = \frac{l''}{l+l'}$$

estos triángulos se pueden construir fácilmente, pues-

to que de la figura 7.<sup>a</sup> podemos tomar sus tres lados.

Teniendo en cuenta que los ángulos en  $O$  de los tres polígonos  $FM'O'$ ,  $RNOM$ ,  $GN''O''$  (figuras 6.<sup>a</sup> y 7.<sup>a</sup>) son iguales, podremos proyectarlos de modo que coincidan, lo que se consigue proyectando oblicuamente el tetraedro sobre el plano de la sección de modo que la arista  $IE$  (fig. 6.<sup>a</sup>) se proyecte en el punto  $O$  (fig. 8.<sup>a</sup>), las caras  $IEG$  y  $IEF$  sobre  $OG$  y  $OF$  y la arista  $FG$  sobre  $FG$ . Para conseguir esto basta construir los triángulos  $OGN''$ ,  $OM'F$  con sus tres lados, deducidos de la figura 7.<sup>a</sup> y de modo que tengan el ángulo  $O$  común; determinado después el punto  $R$  por la relación ya conocida

$$\frac{RF}{RG} = \frac{\alpha-l}{\beta-l''}$$

conocemos el polígono  $RMON$ , puesto que sus lados  $RN$  y  $RM$  han de ser paralelos a  $GN''$  y  $FM'$ .

Conocida así la sección, podemos suponer proyectado el tetraedro en la dirección de la arista  $FG$ , que se proyectará en  $R$ ; la proyección de  $IE$  pasará por  $O$  y será paralela a  $FG$ , por serlo los planos proyectantes; la proyección del tetraedro será, por consiguiente,  $ERI$ .

Por corresponder al punto  $F$   $p_1 = 0$ ,  $p_3 = 0$ ,  $p_4 = 0$  y, por consiguiente,  $p_2 = P$ , el lugar de los puntos en que  $p_2 = P$  será  $FA$  paralela a  $OM$  en la que  $p_2 = 0$ ; por razón análoga, los lugares de

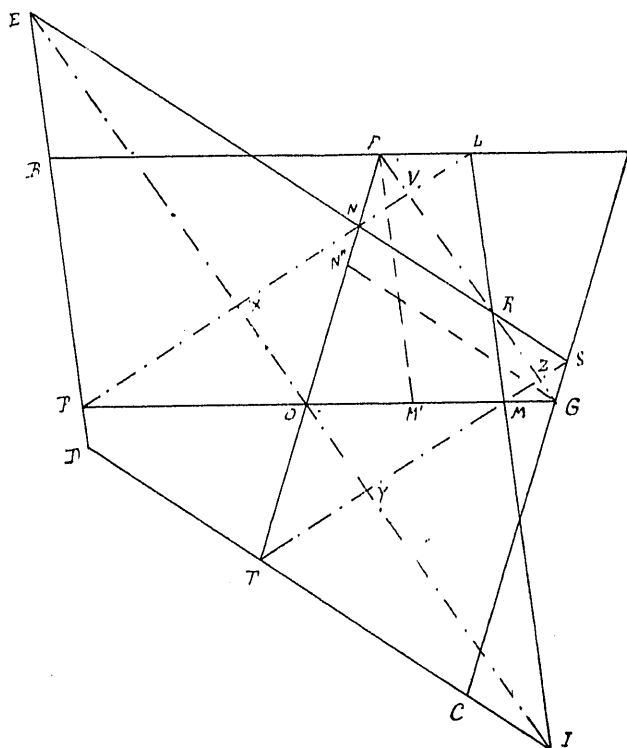


Fig. 8.<sup>a</sup>

$p_3 = P$ ,  $p_1 = P$ ,  $p_4 = P$  serán  $AG$ ,  $ID$  y  $DE$ , formándose así el polígono  $ACDB$ .

Pero al comparar esta traza con la de la figura 5.<sup>a</sup> veremos que la construcción es la misma y que se trata de propiedades proyectivas que nos permitirán hacer el diagrama sin necesidad de pasar por el estereograma correspondiente. Tomaremos, pues, un

triángulo cualquiera,  $OFG$  (fig. 8.<sup>a</sup>); tomaremos los puntos  $M'$  y  $N''$ , de modo que

$$\frac{M'G}{M'O} = \frac{l'}{l} \quad \frac{N''F}{N''O} = \frac{l''}{l'}$$

trazando  $FM'$  y  $GN''$ ; tomaremos después el punto  $R$ , de modo que

$$\frac{RF}{RG} = \frac{\alpha - l}{\beta - l''}$$

y trazando  $RN$  y  $RM$  paralelas a  $GN''$  y  $FM'$  tendremos el polígono  $RMON$ , cuyos lados corresponden a la anulación de cada una de las cuatro componentes; trazando luego  $EI$  paralela a  $FG$  para cerrar el triángulo  $REI$  y haciendo pasar por  $F, G, I, E$ , los cuatro lados del polígono  $ACDE$ , cuyos lados corresponden a la anulación simultánea de tres de las componentes, tendremos el modo de determinar los valores de éstas para cada punto. Al cambiar en el vehículo la posición del centro de gravedad, si fijamos el paralelogramo  $FOGA$ , el  $REDI$  deslizará paralelamente, de modo que  $R$  quede sobre  $FG$  y  $O$  sobre  $EI$ .

Las otras dos diagonales  $PL$  y  $TS$  forman con  $FG$  y  $EI$  un paralelogramo de dimensión invariable, que podría servir de base a la traza, puesto que conocemos la posición de los cuatro puntos  $R, M, O, N$  sobre sus lados; pero el procedimiento sería menos cómodo, por tener que alterar a la vez los cuatro puntos al cambiar la posición del centro de gravedad.

\* \* \*

Existe siempre una posición del centro de gravedad en la que

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{P}{4}$$

y que, según las ecuaciones [4], corresponde a

$$\alpha = \frac{3l' + 2l'' + l'''}{L}$$

$$\beta = \frac{l + 2l' + 3l''}{L}$$

si (fig. 5.<sup>a</sup>) trazamos las segundas diagonales de los paralelogramos  $AO, DR, BM, NI$ , las cuatro pasarán, en este caso, por el punto en cuestión.

Pero esta posición del centro de gravedad puede no ser posible, y entonces hay que buscar cuál sea la repartición más conveniente entre las que pueden realizarse. Así en el caso de la figura 9.<sup>a</sup>, en que las

cuatro diagonales, en la posición que suponemos más favorable del centro de gravedad, forman un cuadrilátero central  $ABCD$ , si trazamos el polígono  $O'N'R'G'$ , que corresponde a un valor de la componente  $\pi_1$ , menor que  $\frac{P}{4}$ , todos los puntos interiores tendrán sus componentes mayores que  $\pi_1$ ; el polígono que corresponde a un valor  $\pi_2$ , mayor que  $\frac{P}{4}$  afecta la disposición del  $O''N''R''G''$ , orientado como el polígono  $ABDC$  de la figura 8.<sup>a</sup>; la parte común a ambos polígonos abarca los puntos en que las cuatro componentes están comprendidas entre  $\pi_1$  y  $\pi_2$ . Como los límites  $\pi_1$  y  $\pi_2$  no diferirán mucho en la práctica de  $\frac{P}{4}$ , el polígono puede quedar dispuesto

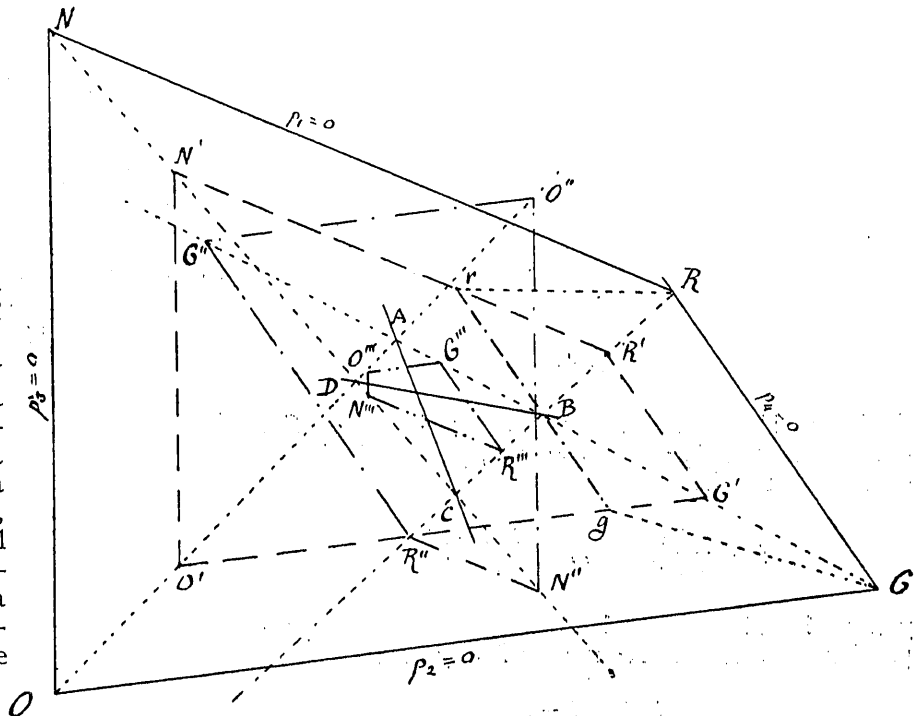


Fig. 9.<sup>a</sup>

como el  $O'''N'''R'''G'''$  de la figura 9.<sup>a</sup>, y entonces dos de sus lados son límites inferiores y los otros dos superiores.

Los cuatro puntos  $A, B, C, D$ , donde se cruzan las diagonales, corresponden a la igualdad de tres de las componentes, y las diagonales  $AC$  y  $BD$  a las igualdades  $p_1 = p_2$  y  $p_3 = p_4$ .

En ocasiones deberá corresponder a ciertos ejes, mejor dicho, a puntos de apoyo que pueden representar grupos de ejes unidos por balancines o por carretones, un peso superior, múltiplo a veces, del correspondiente a los demás; el procedimiento de utilización del diagrama no varía, bastando trazar los polígonos  $O'N'R'G'$ , etc., de modo que no correspondan al mismo valor de las cuatro reacciones, sino a valores en la proporción deseada. Así (fig. 9.<sup>a</sup>), si  $p_4$  ha de ser doble que cualquiera de las otras componentes, el polígono límite, en vez de ser el  $O'N'R'G'$ , será el  $O'N'rg'$ , y las diagonales  $RB$  y  $GB$  se reemplazarán por las  $Rr'$  y  $Gg'$ .