

Rectificaciones fotográficas

I

y como

$$O_1F_1 = O_2F_2 = f \quad B_1F_1 = \alpha \quad B_2F_2 = \beta$$

El objetivo fotográfico tiene un ideal, inasequible como todos los ideales, y al que sólo puede aproximarse a fuerza de complicaciones: compuesto con lentes de varias materias y formas, centradas rigurosamente sobre un eje, y dotado de diafragmas que sólo permiten utilizar ciertas direcciones de rayos luminosos, puede admitirse, con aproximación suficiente, que los puntos situados en un plano perpendicular al eje óptico tienen sus imágenes en otro plano paralelo al primero, y que las distancias α y β de estos dos planos a dos puntos fijos sobre el eje (focos) obedecen a la fórmula de Newton

$$f^2 = \alpha\beta$$

en la que f es una constante del objetivo (distancia focal principal).

Si el plano de la figura 1.^a pasa por el eje óptico

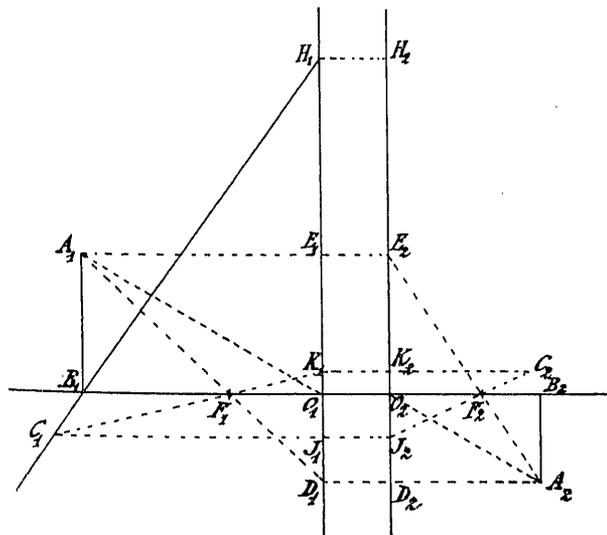


Fig. 1.^a

del objetivo, que suponemos centrado en O , y F_1 y F_2 son sus focos, la imagen de un punto A_1 de este plano se formará en A_2 , punto que se obtiene por la construcción siguiente: trácese A_1E_2 paralela al eje hasta encontrar a la línea O_2H_2 normal al eje a la distancia $F_2O_2 = f$, y después la A_2E_2 , que pasa por el foco F_2 ; trácese luego la A_1D_1 , que pasa por el foco F_1 , hasta encontrar a la H_1D_1 normal al eje a la distancia $F_1O_1 = f$, y después D_1A_2 , paralela a dicho eje; la intersección de E_2A_2 y D_1A_2 determinará el punto buscado A_2 .

En efecto, proyectando A_1 y A_2 sobre el eje en B_1 y B_2 , formaremos los triángulos $A_1B_1F_1$, $F_1O_1D_1$, $E_2O_2F_2$, $F_2A_2B_2$, en los cuales

$$\frac{A_1B_1}{B_1F_1} = \frac{O_1D_1}{F_1O_1} \quad \frac{E_2O_2}{O_2F_2} = \frac{A_2B_2}{F_2B_2} \quad [1]$$

y observando que $A_1B_1 = E_2O_2$ y $A_2B_2 = O_1D_1$, encontramos dividiendo

$$\frac{O_2F_2}{B_1F_1} = \frac{F_2B_2}{F_1O_1}$$

encontramos $f^2 = \alpha\beta$, o sea la fórmula de Newton.

Si referimos el punto A_1 al sistema coordenado $H_1O_1B_1$ haciendo $O_1B_1 = x_1$, $A_1B_1 = y_1$, mientras la imagen A_2 es referida al sistema $D_2O_2B_2$ haciendo $O_2B_2 = x_2$, $B_2A_2 = y_2$, la relación de Newton se escribirá

$$(x_1 - f)(x_2 - f) = f^2$$

o también bajo las formas equivalentes

$$x_1x_2 = f(x_1 + x_2) \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f}$$

Por otra parte, las ecuaciones [1] demuestran que

$$\frac{x_1 - f}{f} = \frac{f}{x_2 - f} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

de donde se deduce el paralelismo de A_1O_1 con O_2A_2 .

Se forma así entre los puntos del plano y sus imágenes una correspondencia homográfica en la que a los puntos de una recta B_1H_1 deberán corresponder los de otra recta, que se podrá determinar fijando dos puntos; esta proposición puede demostrarse directamente observando que si C_1 es un punto de B_1H_1 , los triángulos $H_1O_1B_1$ y $H_1J_1C_1$ darán

$$\frac{H_1O_1}{O_1B_1} = \frac{H_1J_1}{J_1C_1} = \frac{O_1J_1}{J_1C_1 - B_1O_1}$$

o bien, en virtud de la relación de Newton,

$$\frac{H_1O_1}{f} - \frac{H_1O_1}{O_2B_2} = \frac{H_1J_1}{f} - \frac{H_1J_1}{K_2C_2}$$

de donde

$$\frac{H_1J_1}{K_2C_2} - \frac{H_1O_1}{O_2B_2} = \frac{O_1J_1}{f}$$

pero los triángulos $J_2O_2F_2$ y $J_2K_2C_2$ nos dan

$$\frac{O_2J_2}{O_2F_2} = \frac{K_2J_2}{K_2C_2}$$

y, por consiguiente,

$$\frac{H_1O_1}{O_2B_2} = \frac{H_1K_1}{K_2C_2}$$

y si trazamos H_1H_2 paralela al eje, esta relación nos demuestra que el punto C_2 está sobre la recta H_2B_2 .

Si suprimimos en la figura 1.^a la faja comprendida entre O_1H_1 y O_2H_2 , tendremos en la figura 2.^a transformada la homografía en una homología, en la cual el centro es O y el eje OH . El sistema es también homológico en el espacio, puesto que los puntos del plano proyectados en A_1B_1 tienen su imagen sobre el que se proyecta en A_2B_2 , y los del plano A_1O la tienen sobre la prolongación del mismo plano OA_2 .

y, por consiguiente, la recta intersección A_1 tendrá su imagen proyectada en A_2 y al plano B_1H corresponderá el que se proyecta en HB_2 . La homología tiene por centro el centro O del objetivo y su plano central es el OH , normal en O al eje óptico.

II

Todos los puntos del plano proyectado en B_1H (figura 2.^a) tienen sus imágenes en el HB_2 ; si traza-

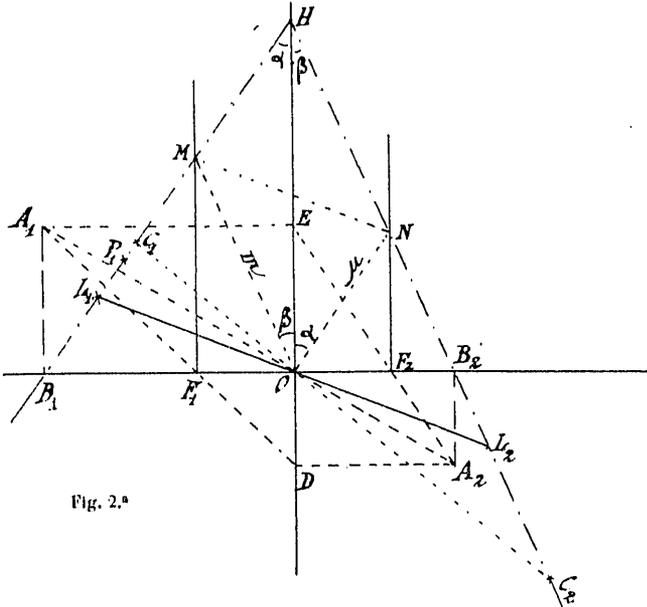


Fig. 2.^a

mos por el foco F_1 un plano normal al eje óptico B_1B_2 , cortará al HB_1 según una recta proyectada en M , cuya conjugada es la recta en el infinito del plano HB_2 , puesto que los rayos luminosos que parten de un punto del plano MF_1 salen paralelos del objetivo; la recta OM es, por consiguiente, paralela a HB_2 , y por la misma razón ON es paralela a B_1H y la figura $OMHN$ es un paralelogramo. Si trazamos por O una paralela a la diagonal MN , los cuatro triángulos L_1MO , MON , MHN , ONL_2 serán iguales, y siendo $OL_1 = OL_2$, la recta proyectada en L goza de la propiedad de que su imagen es superponible, puesto que los puntos correspondientes quedan en ambas en las mismas distancias; solamente goza de igual propiedad la recta proyectada en H , que, aunque fuera del alcance del objetivo, geoméricamente coincide con su imagen; ambos puntos L_1 y H equidistan de M , mientras H y L_2 equidistan de N , siendo ambas distancias iguales a ON y OM .

Si C_1 y C_2 son un par de puntos correspondientes sobre las rectas HB_1 y HB_2 del plano de la figura, los triángulos OC_1M y C_2ON nos darán:

$$\frac{NC_2}{ON} = \frac{OM}{MC_1}$$

o sea

$$NC_2 \times MC_1 = OM \times ON$$

El producto de las distancias de los dos puntos M y N a dos puntos conjugados es, pues, constante; contando las distancias desde los puntos L_1 y L_2 , y recordando que $ML_1 = ON$ y $NL_2 = OM$, tendremos la relación

$$\frac{ON}{L_1C_1} - \frac{OM}{L_2C_2} = 1$$

Si colocamos en el plano HB_1 una fotografía, el objetivo O la reproducirá en el HB_2 , pero completamente transformada, puesto que todos los haces de rectas paralelas en HB_1 serán en HB_2 convergentes en puntos de la recta proyectada en N , y, al contrario, todos los haces de rectas cuyos vértices estén sobre la recta M tienen por imágenes haces paralelos; además, fuera de los puntos H y L , uno de los cuales, por lo menos, no será alcanzado por el objetivo, todas las dimensiones resultarán alteradas, unas en más y otras en menos; solamente cuando HB_1 sea normal al eje óptico B_1B_2 la fotografía se reproducirá en forma homotética (ampliación o reducción) o idéntica (reproducción simple).

Si trasladamos las dos fotografías de modo que coincidan las dos rectas L_1 y L_2 punto a punto, y hacemos girar una de ellas un ángulo cualquiera alrededor de la recta común, al proyectar el conjunto sobre un plano perpendicular a ambas, como en la figura 3.^a, las dos fotografías volverán a formar un sistema homológico; trazando, en efecto, por M y N dos paralelas a ML y NL , y trazando por su intersección V una transversal cualquiera VA_2 , los triángulos VA_1M y VA_2N nos darán:

$$\frac{NA_2}{NV} = \frac{MV}{MA_1}$$

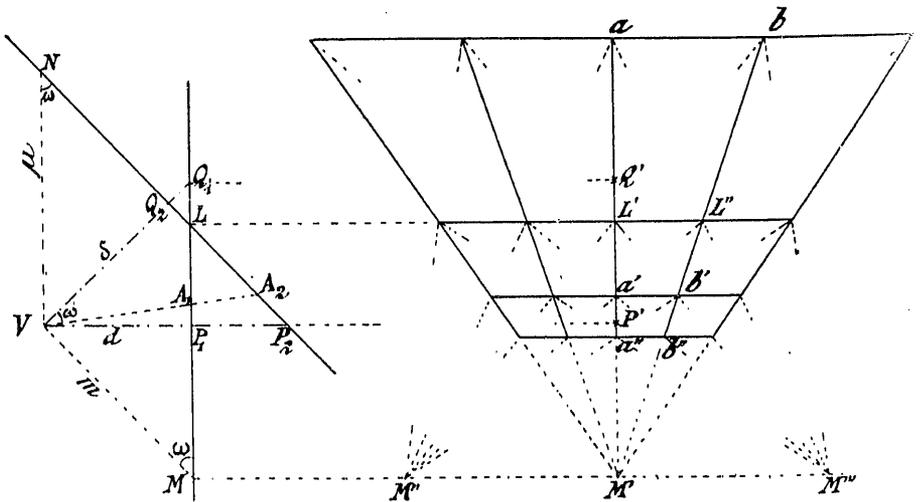


Fig. 3.^a

de donde

$$NA_2 \times MA_1 = MV \times NV$$

relación que indica que los puntos A_1 y A_2 son homólogos, y que V es el centro de homología, mientras el eje es la recta común L .

Resulta de aquí que si la fotografía dada ML ha sido obtenida desde el punto V , como ambas fotografías son secciones del mismo haz, cuyo vértice es V , la fotografía reproducida será idéntica a la que hubiéramos obtenido desde el mismo punto V sobre NL .

Pero para esto es preciso que cuando gire LN alrededor de ML , al pasar el punto V sobre la normal a ML en P_1 , quede a la distancia $VP_1 = d$, que sirvió para impresionar la fotografía ML , y esto exige que en la figura 2.^a, si P_1 es el punto principal, se verifique $OM^2 - MP_1^2 = d^2$, puesto que el triángulo VP_1M de la figura 3.^a es rectángulo y tiene sus lados iguales a las tres distancias que figuran en esta relación; si ésta no se verificase, la fotografía que obtendríamos en HB_2 (fig. 2.^a) no podría coincidir con ninguna obtenida directamente.

Para la práctica de la operación necesitamos precisar la posición relativa de las dos fotografías, la LM que poseemos y la LN que deseamos. Sobre la fotografía ML deberemos fijar la recta intersección L ; la recta trazada por el punto principal normalmente a L será el eje de la fotografía, que coincide con la recta ML situada en el plano de la figura; el punto M será también preciso, o por lo menos su distancia al punto principal P , que llamaremos r , pero podremos en su lugar hacer uso de la distancia MV de dicho punto al de vista V , a la que llamaremos m , o bien del ángulo de las dos fotografías igual al VMP_1 de la figura 3.^a; estos parámetros están ligados por las relaciones

$$\text{tang } \omega = \frac{d}{r}; \quad \cos \omega = \frac{r}{m}; \quad \text{sen } \omega = \frac{d}{m}$$

La nueva fotografía NL tendrá una distancia $VQ_2 = \delta$, en general diferente de d , y análogamente llamaremos ρ a la distancia NQ_2 y μ a la VN , resultando de esto que

$$\frac{\delta}{d} = \frac{\rho}{r} = \frac{\mu}{m}$$

encontramos también

$$P_1L = \mu - r \quad Q_2L = m - \rho$$

y, por último, el nuevo punto principal Q_2 corresponde en la fotografía primitiva a un punto Q_1 a la distancia

$$P_1Q_1 = s = \frac{d^2}{r} = d \text{ tang } \omega$$

del primitivo punto principal P_1 ; análogamente llamaremos σ a la distancia

$$Q_2P_2 = \frac{\delta^2}{\rho} = \delta \text{ tang } \omega$$

en la nueva fotografía, verificándose entre ambas la relación $\frac{\sigma}{s} = \frac{\delta}{d}$. Estas distancias s y σ miden el descentramiento producido por la rectificación.

Al colocar (fig. 2.^a) la fotografía frente al objetivo O para su reproducción, el eje debe quedar sobre la recta HB_1 y las distancias OM y ON deben ser, respectivamente, iguales a m y μ , lo mismo que las VM y VN de la figura 3.^a; si llamamos f a la distancia focal del objetivo O , tendremos:

$$OH = \sqrt{m^2 - f^2} + \sqrt{\mu^2 - f^2}$$

$$\text{sen } B_1HO = \frac{f}{\mu}$$

$$\text{sen } B_2HO = \frac{f}{m}$$

El punto M de la fotografía debe quedar sobre el designado por la misma letra en la figura 2.^a; es decir, sobre la recta MF_1 paralela a HO que pasa por el foco F_1 . El punto B_1 donde enfila el eje del objetivo queda determinado por

$$P_1B_1 = m \frac{\cos B_2HO}{\cos B_1HO} - r$$

este punto B_1 coincide con L cuando $d = \delta$, siendo entonces simétrica la figura 2.^a respecto de OH .

La distancia focal f necesita ser menor que m y μ para que la reproducción sea posible; la ampliación de la fotografía primitiva, aumentando m en igual proporción, podrá hacer posible el empleo de un objetivo determinado.

El ángulo del objetivo O deberá ser suficiente para alcanzar la totalidad de la fotografía, contando con el descentramiento; si C_1 es el borde de la fotografía y llamamos K a la distancia MC_1 , el ángulo C_1OB_1 , que es mitad del ángulo necesario, se determinará por la relación

$$\text{tang } C_1OB_1 = \frac{m \cos B_2HO - K \cos B_1HO}{(\mu + K) \text{sen } B_1HO} =$$

$$= \frac{\mu \sqrt{m^2 - f^2} - K \sqrt{\mu^2 - f^2}}{(\mu + K)f}$$

Cuando la oblicuidad ω que se trata de corregir es muy grande, el descentramiento, además de las dificultades materiales que ocasiona, exagera los efectos de perspectiva, por lo que la operación sólo se aplicará útilmente, en casos extremos, a los objetos planos o casi planos; el límite práctico, fuera de los casos excepcionales, parece ser el que lleve el descentramiento hasta colocar el punto principal hacia el borde de la fotografía. En estas grandes oblicuidades puede también hacerse la operación parcialmente, corrigiendo por partes la oblicuidad; así se facilita la operación, pero no se evitan los defectos, a los que hay que añadir los que se acumulan con las sucesivas reproducciones fotográficas.

III

Para asegurar la buena colocación de la fotografía frente al objetivo que ha de reproducirla, puede seguirse el procedimiento de trazar, sobre un facsímil de la fotografía, una red de líneas que en la reproducción formen una cuadrícula perfecta, cosa fácil de comprobar.

Supongamos que la cuadrícula que ha de formarse sobre LN (fig. 3.^a) tenga una fila de nudos sobre el eje ML y otra sobre la intersección L ; rebatiendo el plano LM sobre el de la figura, tendremos una fila en LL' en su magnitud verdadera, y además las líneas serán convergentes en M' a la distancia $M'L' = ML = \mu$; las diagonales convergerán a su vez en M'' y M''' a la distancia $M'M'' = M'M''' = m$.

Como la recta MM' puede estar a una distancia demasiado grande, conviene trazar la red de trapezios sin utilizarla, y a este fin, si llamamos x a LA_1 e y a LA_2 , recordando que $MA_1 \times NA_2 = m \cdot \mu$, y que, por consiguiente,

$$\frac{\mu}{LA_1} - \frac{m}{LA_2} = 1$$

encontraremos:

$$x = \frac{\mu y}{m + y}$$

y si damos a y valores múltiples, positivos o negativos, del lado de la cuadrícula $L'L''$, los valores de x serán las distancias del punto L' a los diversos nudos $a, a', a'' \dots$ de la línea $L'M'$, por donde pasan las líneas paralelas a LL' .

Por otra parte,

$$\frac{L'a'}{a'b'} = \frac{\mu}{m} \quad \frac{L'a''}{a''b''} = \frac{2\mu}{m}, \text{ etc.}$$

lo que determina también las distancias $a'b', a''b'' \dots$

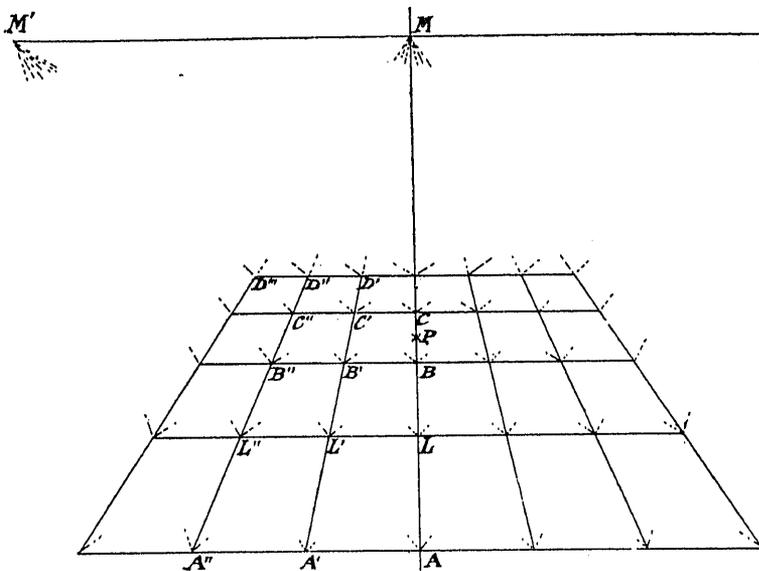


Fig. 4.a

de los nudos en cada fila, permitiendo fijar todo el trazado a partir del punto L' .

Pero no es esto todo: la proporción de los lados de un trapecio tiene por valor $\frac{a'a''}{a''b''} = \frac{a'M'}{m}$ y no depende para nada del valor de δ , sino solamente de la posición del punto a' sobre la fotografía; al variar δ cambia el punto L , pero la red sigue siendo la misma y será más cómodo trazarla para el caso en que δ sea igual a d , extendiéndola por la región útil.

Esta operación se hace fácilmente; si P (fig. 4.a) es el punto principal, haciendo $PL = m - r$ tendremos el punto L , y trazando el eje ML y la intersección LL'' observaremos que por ser iguales LM y MM' las diagonales que pasan por L forman ángulos de 45° con dichas rectas; las fórmulas establecidas más arriba nos dan, llamando l al lado de la cuadrícula:

$$BL = BB' = \frac{ml}{m + l} \quad CL = CC' = \frac{2ml}{m + 2l}, \text{ etc.},$$

y, por consiguiente,

$$CC' = \frac{CL}{2} \quad DD' = \frac{DL}{3}, \text{ etc.}$$

Sobre esta red trapezoidal dibujaremos el contorno de la fotografía, determinado por los puntos P y L ,

y la parte comprendida en él es la que nos servirá para la colocación correcta de la fotografía ante el objetivo. Esta colocación, a menos de disponer de un aparato complicado y costoso, sólo podrá hacerse por tanteos, para los cuales es indispensable variar las distancias OB_1 y OB_2 (fig. 2.a), los ángulos OHB_1 y OHB_2 y la posición sobre su plano no sólo de la fotografía HB_1 , para que el punto M quede en su sitio preciso, sino la de la superficie sensible, para que recoja la imagen en el lugar en que se forme, que no será el más céntrico frente al objetivo; en las cámaras fotográficas no podremos mover la superficie sensible y tendremos que descentrar el objetivo, alterándose con ello las distancias OB_1 y OB_2 ; en cambio, si procedemos por proyección, será la fotografía original la que no podrá cambiarse de posición ante el condensador, y el resultado es el mismo: complicación y dificultad de los tanteos. Si éstos no se hacen metódicamente, podrá llegarse con facilidad a que los ángulos de la cuadrícula sean rectos, pero no será tan fácil conseguir que las mallas sean cuadradas, y si quedan rectangulares se produce una deformación de la perspectiva que anula todo el carácter documental de la fotografía.

IV

Otro procedimiento puede consistir en determinar las dimensiones del trapecio que ha de ser imagen del rectángulo que limita la fotografía primitiva, y cuyos lados suponemos paralelos y normales al eje; señalado el punto principal P y haciendo $PL = m - r$ tendremos la línea AB que ha de producirse sin variación de escala, y si L' es la imagen de L tendremos $A'B' = AB$. Por otra parte, los

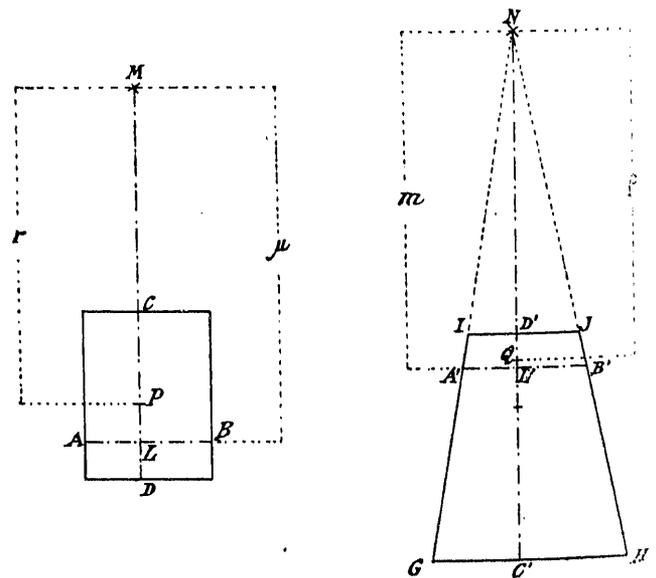


Fig. 5.a

lados paralelos del rectángulo que pasan por A y B darán por imágenes rectas concurrentes en N a la distancia $NL' = m$. Señalado el punto M a la distan-

cia $MP = r$ tendremos, para los puntos C_1D y sus imágenes $C'D'$,

$$MC \times NC' = m\mu$$

$$MD \times ND' = m\mu$$

de donde

$$C'D' = NC' - ND' = m\mu \left(\frac{I}{MC} - \frac{I}{MD} \right) = \frac{m\mu \cdot CD}{MC \cdot MD}$$

además, en los triángulos NIJ , $NA'B'$, NGH :

$$\frac{IJ}{ND'} = \frac{A'B'}{NL'} = \frac{GH}{NC'}$$

de donde

$$IJ = \frac{\mu \cdot AB}{MB} \quad GH = \frac{\mu AB}{MC}$$

$$IJ = \frac{\mu AB}{MD} \quad GH = \frac{\mu AB}{MC}$$

Las tres dimensiones $C'D'$, IJ y GH del trapezio son proporcionales a μ , y al variar δ los distintos trapezios serán semejantes entre sí; si lo trazamos para $\delta = d$ la relación de semejanza con éste será, en cada caso, $\frac{\delta}{d}$. Para $d = \delta$, el valor de $C'D'$ es mayor que el de CD ; si se quiere conservar la altura de la fotografía, habrá de disminuirse su distancia en la relación:

$$\frac{\delta}{d} = \frac{MC \cdot MD}{m^2}$$

Obtenida la nueva fotografía, las dimensiones del trapezio pueden servirnos para comprobar la operación, puesto que de las fórmulas anteriores puede deducirse:

$$MD = \frac{GH \times CD}{GH - IJ} \quad MC = \frac{IJ \times CD}{GH - IJ} \quad m = \frac{AB \times C'D'}{GH - IJ}$$

y de éstas:

$$\mu = \frac{GH \times MC}{AB} = \frac{IJ + MD}{AB}$$

y conocida así la posición del punto M y, por consiguiente, el valor de r , veremos si se verifica la relación necesaria $m^2 = d^2 + r^2$, que nos comprobará que la operación está bien hecha y que la perspectiva obtenida es exacta; en caso contrario, la fotografía habrá sufrido la *deformación rectangular* de que antes hemos hablado, y la operación deberá repetirse.

La oblicuidad de los planos HB_1 y HB_2 de la figura 2.^a hace que por un lado los alabeos de la fotografía se hagan más visibles, a menos que la coloquemos entre cristales, y, por otra parte, que el examen de la imagen en el cristal esmerilado se dificulte mucho por la oblicuidad de los rayos luminosos, por lo cual es preferible hacer la operación por proyección, y en este caso es más cómodo el procedimiento del trapezio que el de la cuadrícula.

V

La principal aplicación de lo expuesto es la rectificación de las fotografías de monumentos, en las que ha sido preciso inclinar la máquina, quedando

las verticales concurrentes, con daño de la estética.

El plano de la figura 3.^a es entonces vertical y perpendicular a la superficie sensible, y contiene al punto de vista y al principal de la fotografía. El plano de la nueva fotografía es vertical y perpendicular al de la figura y la intersección común es, por consiguiente, horizontal. Si se conocen las condiciones en que la fotografía primitiva ha sido hecha,

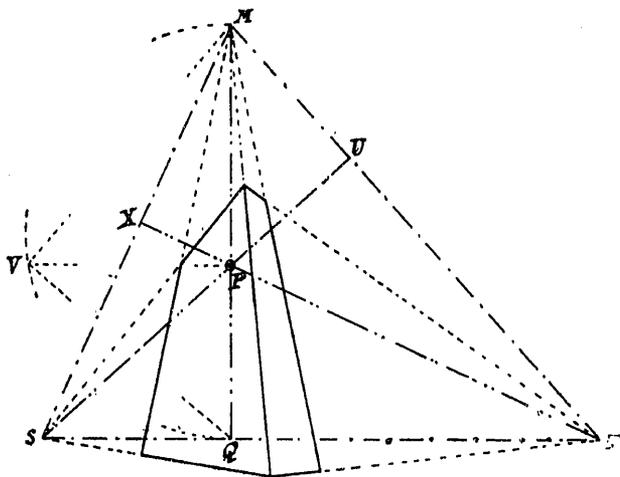


Fig. 6.ª

podremos señalar en ella el punto principal P ; el punto M será el de concurso de las verticales, y la distancia entre ambos es la que hemos llamado r ; el conocimiento de r y d nos determina todos los elementos que podamos necesitar.

Si se desconocen las condiciones en que se hizo la fotografía, podremos, en general, determinarlos, tratándose de monumentos en las que existen, además de las líneas verticales, otras horizontales en direcciones perpendiculares entre sí. En la figura 6.^a

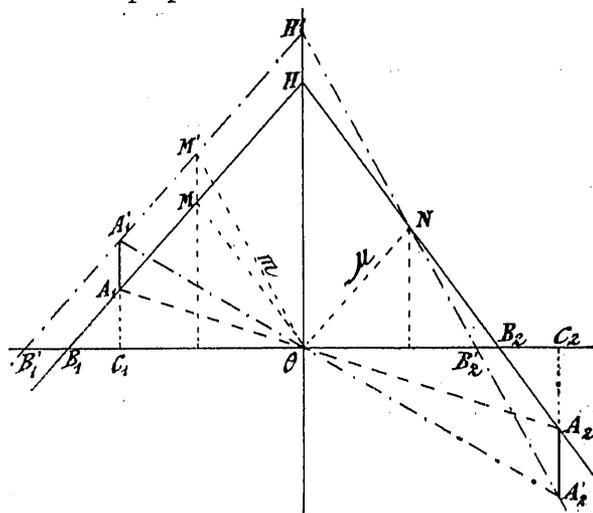


Fig. 7.ª

los puntos de concurso de las tres direcciones perpendiculares entre sí forman el triángulo MST , que será la intersección de un triedro trirectángulo, cuyo vértice es el punto de vista; la proyección de este vértice, que coincide con el punto principal, es el punto de concurso de las tres alturas del triángulo MST . Siendo rectángulo el triángulo, según el cual corta al triedro el plano normal al de la figura

por MQ , lo podremos rebatir, y trazando el semicírculo MVQ y la perpendicular PV , la sección será el triángulo MVQ , en el cual

$$PV = d \quad VM = m \quad PM = r \quad PQ = s$$

Si el punto M , como sucede en las oblicuidades pequeñas, queda fuera de los límites del dibujo, podremos trazar el semicírculo sobre TX o SU , determinando así d , y como PQ es igual a s , tendremos:

$$r = \frac{d^2}{s} \quad \text{long } \omega = \frac{s}{d} \quad m = \frac{d}{s} \sqrt{d^2 + s^2}$$

También se puede calcular o construir VQ obser-

de la fotografía ocupará la posición A_1 o la A'_1 , puesto que la distancia AM es invariable; la imagen de este punto será la A_2 o la A'_2 , siendo $A_2A'_2$ paralela a OH , puesto que lo es la $A_1A'_1$. Las fotografías reproducidas en NA_2 o en NA'_2 tendrán ambas sus verticales paralelas, pero la NA'_2 estará aumentada en la dirección NA'_2 , mientras en la dirección normal a la figura la escala es igual, puesto que

$$\frac{A_1O}{A_2O} = \frac{A'_1O}{A'_2O}$$

Resulta de esto que la fotografía errónea ha sufrido la *deformación rectangular*, limitada en este caso por la aproximación con que se estime el valor de m .

Sirva de ejemplo la figura 8.^a, que representa una fotografía de la iglesia toledana de San Miguel, obtenida en placa de 10×15 , con una distancia de 160 milímetros y con una inclinación que, por la convergencia de las líneas, resulta ser de $12^\circ 30'$. La rectificación, hecha con un objetivo de 190 mm, da por resultado la figura 9.^a, en la que ha desaparecido la convergencia.

Otro ejemplo es el de la figura 10, que representa la parte superior de la torre de San Román, en Toledo, hecha también sobre placa de 10×15 , con una distancia de 167 mm; la convergencia de las líneas revela una oblicuidad de $33^\circ 10'$, imposible de corregir en una sola operación, por lo que la hemos obtenido en tres operaciones sucesivas, corrigien-

do en cada una un tercio del ángulo de oblicuidad, con el resultado que puede verse en las figuras 11, 12 y 13.

vando que el triángulo que se proyecta en SPT es rectángulo en el espacio, y así, trazando sobre ST un semicírculo, la parte interceptada de QM será igual a QV y además tendremos:

$$QV = \sqrt{SQ \times QT}; \quad \cos \omega = \frac{d}{VQ}$$

Para las operaciones sucesivas será conveniente recortar la fotografía según las direcciones perpendiculares entre sí MQ y ST .

Si la determinación de estos elementos es imposible, habrá que hacer una hipótesis plausible, que podrá ser, a falta de otra mejor, la de suponer el punto principal en el centro y la distancia igual a la diagonal de la placa; el error producido así en d y en r se traduce en un error en m , es decir, en la distancia OM de la figura 2.^a; y si suponemos (fig. 7.^a) que OM es el valor verdadero y OM' el erróneo, un punto A



Fig. 8.ª



Fig. 9.ª

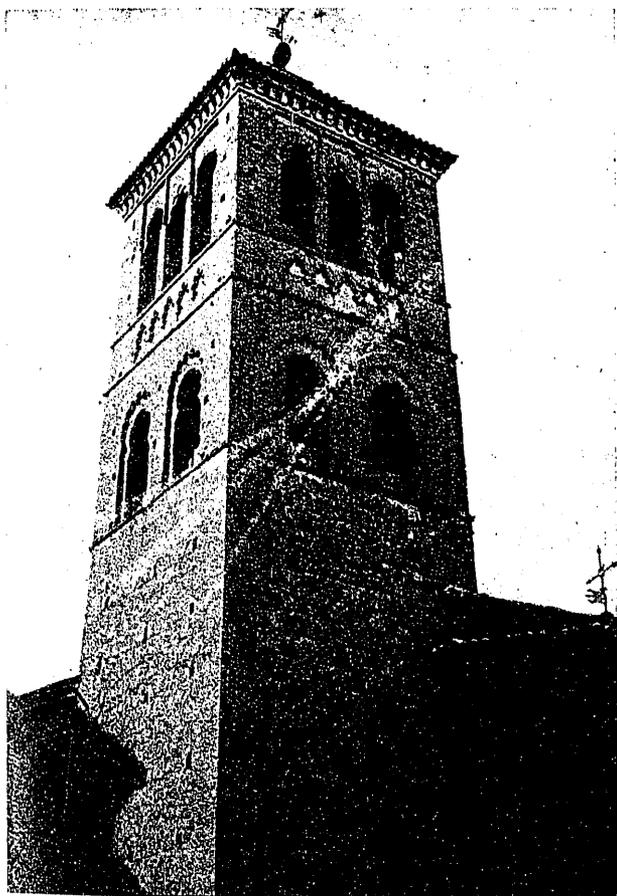


Fig. 10

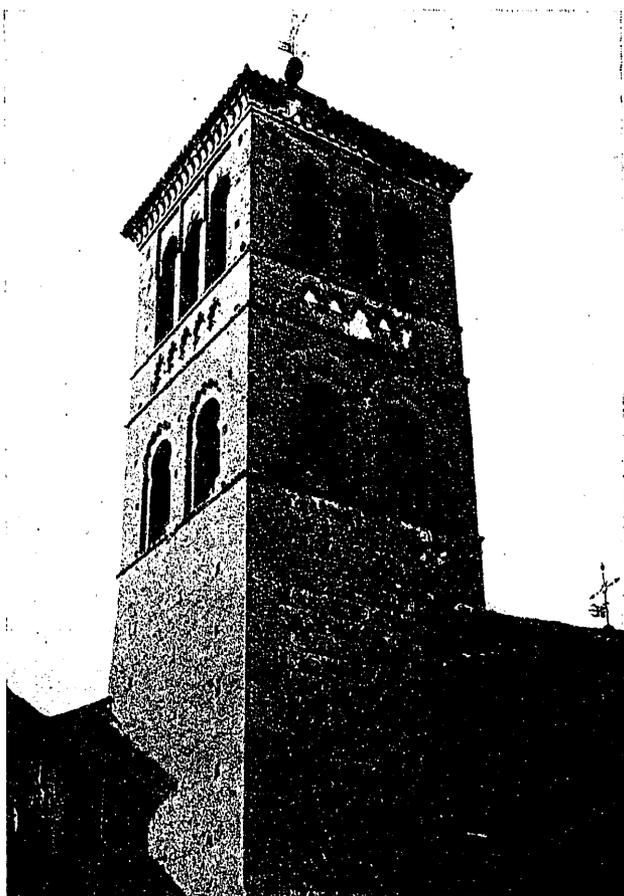


Fig. 11

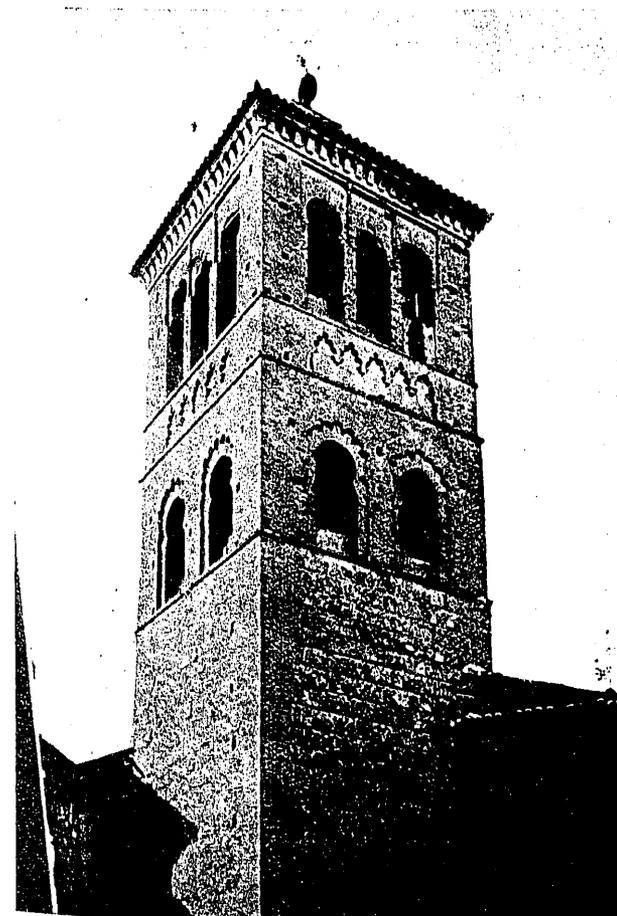


Fig. 12

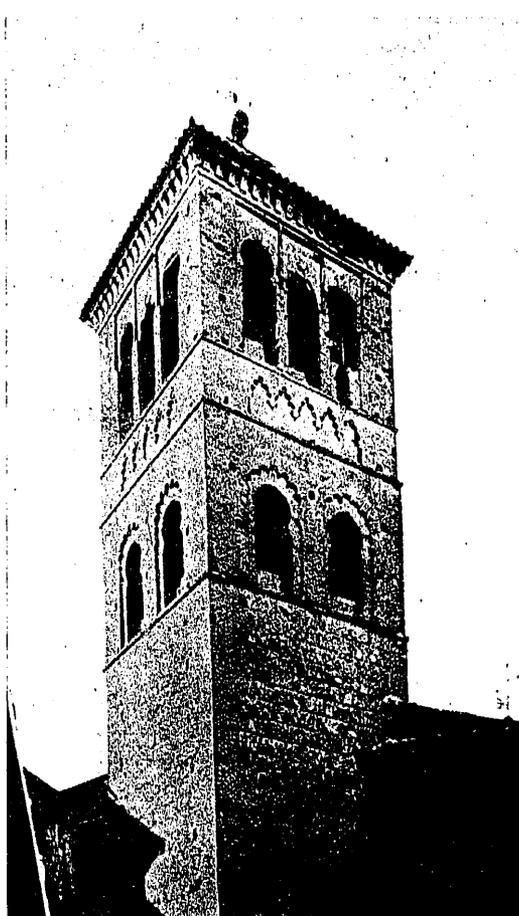


Fig. 13

Las tres operaciones sucesivas no son iguales entre sí, como podría suponerse, por variar en cada una la posición del punto principal; para su ajuste hemos seguido el procedimiento de fijar la deformación del rectángulo de la fotografía primitiva, para ángulos de $1/3$, $2/3$ y $3/3$ del de oblicuidad, encontrando las dimensiones del cuadro siguiente:

	Altura	Base mayor	Base menor	Distancia principal	Descentramiento
Fotografía primitiva....	150	100	100	167	0
Primera operación.....	150	107	90	165	25
Segunda operación.....	150	111	78	148	60
Tercera y última.....	150	111	63	119	85

Como se ve, hemos conservado la altura de la fotografía, disminuyendo su distancia, porque en caso contrario la fotografía hubiera sido cada vez más alta, a medida que disminuía la oblicuidad. El punto principal va descendiendo en cada operación hasta quedar, en la última, fuera de la imagen.

Otra aplicación del procedimiento es la colocación

de frente de una fachada oblicua, problema que sólo difiere del anterior en que el giro se hace sobre un eje vertical en vez de horizontal.

Cabe también hacer ambas cosas a la vez, haciendo el giro sobre un eje cualquiera, para lo cual necesitamos conocer la traza, sobre la fotografía, del plano paralelo al que ha de quedar de frente, trazado por el punto de vista. Si en la figura 6.^a pretendemos que quede de frente el plano lateral izquierda del sólido representado, la traza en cuestión será la *MS*, traza del plano proyectado en *SPM*; el eje de la fotografía es entonces el *TX*, y la oblicuidad

$\text{long } \omega = \frac{d}{PX}$. La operación exigirá el encuadre

de la fotografía dentro de un rectángulo de lados paralelos a las direcciones *TX* y *MS*.

Como el descentramiento se produce, en este caso, en dirección oblicua a la posición natural de la fotografía primitiva, la alteración de la perspectiva será más sensible; pero si el objeto es utilizar la proyección de una fachada, se podrá evitar el defecto suprimiendo en la fotografía todo lo que no sea la fachada misma. Claro está que cuanto más plana sea la fachada más aceptable será el resultado.

Antonio PRIETO
Ingeniero de Caminos

T a r m a c a d a m

En los riegos superficiales y entre ellos en el alquitranado, usado principalmente en esta provincia de Vizcaya, cuando desaparece en algún punto o trozo la capa protectora queda al descubierto piedra suelta, por habersele limpiado al alquitranar el recebo, por cuya circunstancia los baches iniciados se profundizan rápidamente. Estos baches son más incómodos que los ordinarios de macadam porque éstos se desvanecen en los bordes que son del mismo material, y en aquéllos los bordes, defendidos aún por el alquitrán superficial, son duros e incómodos.

Se evita el primer defecto, y en consecuencia el segundo, ligando entre sí todo el firme o la capa de revestimiento superior, y si se ha podido llegar a alquitranar superficialmente las carreteras es natural pensar en dar un paso más y hacer tarmacadam.

Mas al intentar hacer este afirmado se observa que las instrucciones de ejecución son muy precisas; se considera indispensable calentar la piedra y muy conveniente el empleo de mecanismos costosos, y si a esto se añade que algunos ensayos han resultado deficientes, no es de extrañar el retraimiento en ejecutar tales firmes, pues en la mayor parte de los casos no se dispone de consignación suficiente para tales perfeccionamientos.

Se advierte, sin embargo, que si el alquitrán superficial se adhiere perfectamente a piedra usada y barrida y, por tanto, algo empolvada, mejor se adherirá a piedra recién machacada y limpia.

Por todo lo expuesto, hice en esta provincia, en septiembre de 1925, un ensayo de tarmacadam con los elementos sencillos usados en el alquitranado superficial: calderas corrientes y amasaderas de hierro, y a causa del buen resultado de este ensayo se han hecho hasta hoy unos catorce kilómetros de

este revestimiento en carreteras de mucho tránsito, unas veces sobre afirmado ordinario y otras en sustitución de adoquinado antiguo sobre arena. Se describirán las labores y características en tres trozos diferentes.

Ensayo.—*Carretera de Bilbao a Portugalete.*—Trozo de 200 metros, entre los kilómetros 8 y 9; ancho del firme, 6 metros, con una línea de tranvía y una acera de 1,20 metros; distancia del cordón al carril próximo, 4 metros; afirmado anterior, escoria de Alto Horno, con espesor de 40 centímetros; trozo sombrío.

Circulación el 4 de noviembre de 1929, desde las siete de la mañana a las siete de la tarde: Tranvías, 200, de 9 a 13 toneladas de tara; camiones y autobuses, 80; camionetas y automóviles de turismo, 177; otros vehículos, 121. Total, 578 vehículos.

Las obras se hicieron sin interrumpir el tránsito.

El tarmacadam se extendió solamente en la zona sin tranvía, por ser los carriles ligeros y de poca fijeza.

Se escarificó el firme para obtener la profundidad necesaria de 10 cm; se extendieron tres capas de escoria de Alto Horno impregnadas de alquitrán de 6, 4 y 2 cm, las que se apisonaron sucesivamente con rodillo ordinario de 12 toneladas, y se extendió por último arena gruesa sin impregnar. Los dos primeros tamaños de escoria estaban preparados desde unos tres meses antes y acopiados en montón al aire libre en la proximidad de la obra; el guijo de la tercera capa se impregnó momentos antes de su empleo.

Al apisonar después de extender esta última capa se formaba delante de las ruedas un burlete de piedra de unos 15 cm de altura, con apariencia de hallarse