

# Teoría del arco<sup>1</sup>

## VIII

### Determinación de los esfuerzos que actúan

#### El cálculo

##### VALIDEZ DE LOS MÉTODOS DE CÁLCULO ACTUALES

Los métodos de cálculo actualmente auténticos son los que derivan de la Teoría de la Elasticidad; sin embargo, éstos empiezan a perder validez en la aplicación a las estructuras de hormigón y hormigón armado, al tener en cuenta otra propiedad de este material, la *plasticidad*, que es su capacidad de aumentar la deformación sin incremento de los esfuerzos que la iniciaron.

Pero hasta el presente no se han reunido los suficientes datos empíricos para organizar una nueva teoría<sup>2</sup>, teniendo en cuenta la plasticidad, por lo que subsisten las correspondientes a la consideración única de las propiedades elásticas, que, además, como hemos visto en la exposición de los resultados experimentales, sirve, por lo menos, para los casos corrientes.

Dentro de las teorías elásticas podemos tomar dos caminos: aplicación restringida o aplicación integral de los principios de la Elasticidad. En el primer caso llegamos a la teoría de las piezas prismáticas con sus dos hipótesis anejas: proporcionalidad de las tensiones y las deformaciones (ley de Hooke) y conservación de las secciones planas (hipótesis de Navier), y se utiliza el procedimiento de las secciones para determinar en las principales las resultantes de las tensiones correspondientes. En el segundo caso se plantean las ecuaciones diferenciales fundamentales de la teoría de la Elasticidad y se resuelven de modo que satisfagan a las condiciones del contorno, llegándose a la determinación de las tensiones principales en cualquier punto del sólido.

Voy a analizar el modo de aplicación de estas teorías, aclarando al mismo tiempo las limitaciones de cada una de ellas.

##### PROBLEMAS QUE PLANTEA EL CÁLCULO DE UNA ESTRUCTURA

Establecí en el segundo artículo<sup>3</sup> que los problemas planteados en el cálculo de una estructura son:

- 1) Determinación de los esfuerzos que actúan.
- 2) Distribución de las tensiones en el interior de la estructura.
- 3) Organización del material para resistir estas tensiones.

Aplicaré esta ordenación al caso particular del cálculo de un arco.

Los esfuerzos que actúan son debidos a causas exteriores y a causas interiores. Estas últimas son las restricciones de la sustentación, y los esfuerzos a que dan lugar se denominan reacciones, pues son los que habría que aplicar para poder considerar la estructura aislada en el espacio. Entre las causas exteriores podemos distinguir dos clases: las que producen directamente esfuerzos que se denominan exteriores, pues son independientes de las condiciones de sustentación (peso propio, cargas y sobrecargas), y las que producen reacciones indirectamente, pues sólo actúan a través de las restricciones de sustentación (retracción de fraguado, cambios termohigrométricos, asientos de los apoyos, etc.).

Veamos la manera de tener en cuenta cada uno de estos esfuerzos:

*Peso propio.*—Depende de las dimensiones y del material de la estructura; por consiguiente, para fijarlo hay que partir de una solución previa. Esta necesidad de definir la estructura de antemano existe también para los esfuerzos hiperestáticos, como luego veremos, y no debe considerarse como un defecto metodológico, pues cada caso concreto representa una interpolación o, en último extremo, una extrapolación en la teoría del tipo considerado, que se perfecciona en segunda instancia por una redistribución del material, de acuerdo con los resultados del cálculo.

Los pesos específicos que se consideran corrientemente son:

Piedra ... ..	2 200 a	2 800 kg/m <sup>3</sup>
Ladrillo ... ..		1 750 "
Hormigón en masa ... ..		2 400 "
Hormigón armado ... ..		2 500 "
Acero ... ..		7 800 "

En puentes metálicos se suele tomar un peso uniformemente repartido por metro lineal.

Claro está que este esfuerzo es sólo digno de tenerse en cuenta cuando se trata de arcos en plano vertical; no así, como ocurre en las presas, cuando el arqueamiento es horizontal.

*Cargas y sobrecargas.*—Distingo entre cargas y sobrecargas según su régimen de actuación.

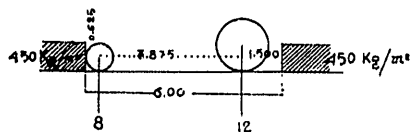
En las cargas considero los elementos de la obra que son meramente funcionales; pesan y no resisten; así en los puentes: tablero, pavimento, barandilla, etcétera; casi siempre pueden reducirse a pesos uniformemente distribuidos por metro lineal.

En las sobrecargas considero los esfuerzos originados por elementos ajenos a la estructura. Pueden concretarse en fuerzas continuas o aisladas, fijas o móviles; así, en un acueducto, el peso del agua uniformemente repartido; en un arco de presa, el empuje del agua distribuido en su trasdós, y en un puente de carretera, una aglomeración de vehículos. En este último caso, lo mismo que en el de puentes para ferrocarril, es preciso hacer un estudio especial de la sobrecarga, tanto en cuanto a los vehículos a considerar como en cuanto a su repartición transversal y longi-

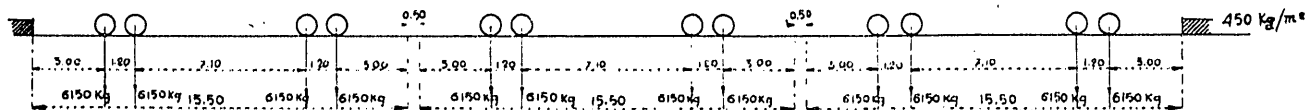
<sup>1</sup> Véase la REVISTA del 15 de febrero último, página 77.

<sup>2</sup> El intento de Straub en *Plastic Flow in Concrete Arches* (ver Bibliografía) no pasa de ser un ensayo, como ya lo advierte su autor.

<sup>3</sup> Ver R. O. P., año 1931, núm. 17, pág. 355.



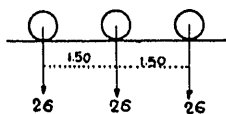
Tren tipo para carreteras



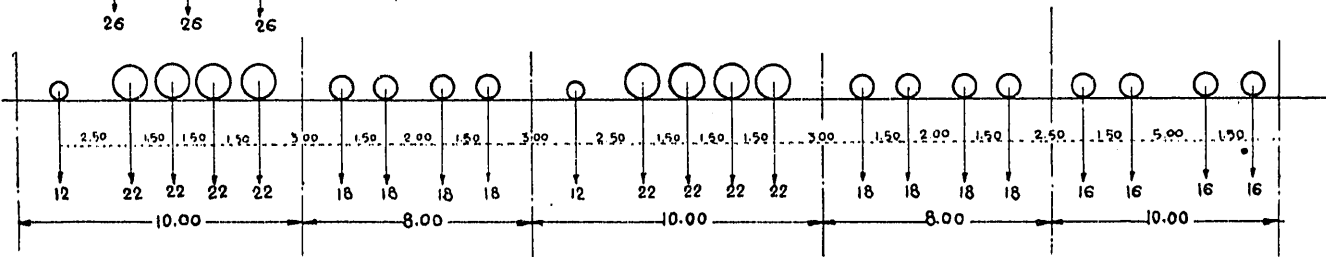
CUADRO NUM. 1 Zona de 2 m de anchura

Luz - Metros	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
Para los momentos flectores - Kg	4 900	2 800	2 400	2 000	1 800	1 700	1 600	1 575	1 565	1 560	1 555	1 550	1 525	1 500	1 475	1 450	1 425	1 400	1 375	1 350
Para los esfuerzos cortantes - Kg	5 400	3 400	2 600	2 200	2 000	1 900	1 850	1 800	1 775	1 750	1 700	1 675	1 650	1 600	1 585	1 570	1 555	1 540	1 525	1 510

Para los momentos flectores, la sobrecarga correspondiente se aplicará en toda la longitud del tramo.  
 Para los esfuerzos cortantes, la sobrecarga correspondiente se aplicará entre la sección considerada y el apoyo más lejano.

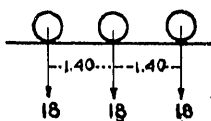


Tren tipo para ferrocarril de vía ancha

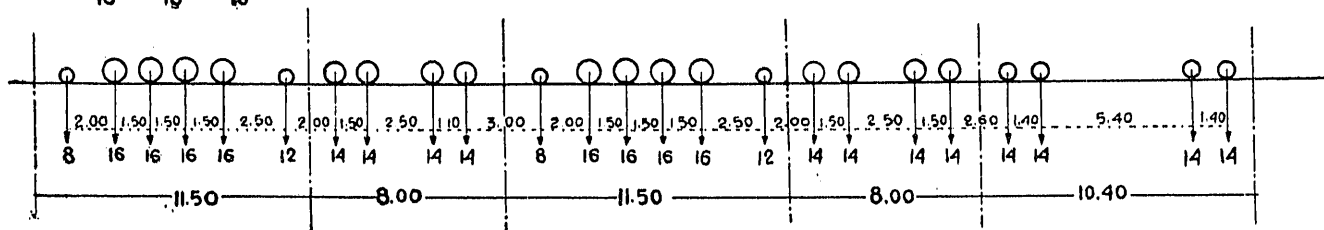


CUADRO NUM. 2

Luz - Metros	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
Para los momentos flectores - Kg	18 720	12 800	11 620	10 780	10 310	10 120	9 930	9 890	9 710	9 540	9 360	9 180	9 010	8 850	8 710	8 580	8 470	8 360	8 260	8 170
Para los esfuerzos cortantes - Kg	21 840	14 900	13 170	11 950	11 560	11 260	11 020	10 750	10 500	10 250	10 060	9 870	9 770	9 550	9 420	9 290	9 180	9 070	8 980	8 900



Tren tipo para ferrocarril de vía estrecha



CUADRO NUM. 3

Luz - Metros	1	2	3	4	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80
Para los momentos flectores - Kg	36 000	18 000	14 106	14 400	13 536	9 440	8 550	8 050	7 740	7 590	7 460	7 390	7 320	7 210	7 100	6 990	6 870	6 750	6 660	6 570
Para los esfuerzos cortantes - Kg	36 000	23 400	19 200	17 550	15 552	10 920	9 720	8 910	8 580	8 370	8 220	8 060	7 900	7 740	7 600	7 470	7 350	7 230	7 150	7 070

CUADRO NUM. 4

Datos de cálculo de algunos puentes en arco

	Servicio	Material	Luz	Sobrecarga en calzada	Sobrecarga en aceras	Impacto	Viento	
Kill-van-Kull.....	Carretera ..	Metálico..	504	3 750 kg/m. l.	490 kg/m²	»	»	Construido 1931
	Ferrocarril.			9 000 kg/m. l.				
Sydney.....	Carretera ..	Idem.....	501	»	»	»	»	Construido 1931
Hell Gate.....	Ferrocarril.	Idem.....	310	8 940 kg/m. l.	»	»	»	Construido 1915
Cañon Marmol.....	Carretera ..	Idem.....	165	580 kg/m²	»	30 0/0	»	Construido 1929
Plougastel.....	Carretera ..	H. armado	187	»	»	»	»	Construido 1931
	Ferrocarril.							
G. Westinghouse...	Carretera ..	Idem.....	140	»	»	»	»	Construido 1932
Echelsbach.....	Carretera ..	Idem.....	130	»	»	»	250 kg/m²	Construido 1930
Coflans fin d'Oise..	Carretera ..	Idem.....	126	730 kg/m²	365 kg/m²	»	»	Construido 1930
Raritan.....	Carretera ..	Idem.....	72	500 kg/m²	400 kg/m²	Incluido im- pacto..... 680 $\frac{20 + l}{990}$ $\frac{20 + l}{20 + l}$	250 kg/m²	Construido 1929
	Carretera ..	Idem.....	181	1 000 kg/m. l.	»			
	Ferrocarril.			2 300 kg/m. l.				
Rance.....	Carretera ..	Idem.....	460	3 camiones de 17 ton + 1 ca- mión de 4 ton en fila conti- nua.....	»	»	»	En proyecto.

tudinal, para obtener en todas las secciones del arco la distribución más desfavorable a su resistencia. Las Instrucciones de los diferentes países fijan los trenes de sobrecarga que es preciso tener en cuenta para cada caso, los cuales, en determinadas condiciones, pueden reemplazarse por una carga uniformemente repartida. En la hoja adjunta hemos reunido los trenes fijados por la Instrucción española, y en los cuadros 1, 2 y 3, las cargas uniformemente repartidas equivalentes. No se fijan normas para luces superiores a 100 metros, ni para los puentes de carretera de más de ocho metros de calzada. En el cuadro número 4 reúno datos del cálculo de algunos arcos de gran luz, recientemente construídos o en proyecto.

En las sobrecargas móviles es preciso considerar los efectos dinámicos, el más importante de los cuales es el correspondiente a impacto, que se tiene en cuenta adicionando a los pesos correspondientes un tanto por ciento variable con la naturaleza de la estructura, de la sobrecarga y de la velocidad de circulación. La Instruc-

ción española da una fórmula para aplicación especial a los tramos metálicos ferroviarios, deducida por Mendizábal, teniendo en cuenta las experiencias llevadas a cabo en estas estructuras y las prescripciones vigentes. Da el incremento por impacto:

$$I = 1,40 - 0,56 \sqrt{500l - l^2}$$

correspondiéndole los valores numéricos que aparecen en el cuadro número 5. Para los arcos de fábrica los ingenieros italianos admiten un incremento  $\frac{1}{10}$  a  $\frac{1}{30}$  disminuyendo con la luz y el peso propio; los alemanes toman distintos valores, según la clase de estructura, servicio y luz, como puede verse en el cuadro número 6; en las experiencias de los ingenieros suizos sobre arcos de hormigón armado en puentes de carretera y ferrocarril (ver R. O. P. de 15 de octubre de 1932, páginas 473 y siguientes), obtuvieron valores del 10 a 15 por 100 en clave, y 8 a 23 por 100 en

CUADRO NUM. 5

Valores del incremento de impacto para tramos metálicos, según la fórmula de Mendizábal

l	l %	l	l %	l	l %	l	l %
1	127,50	7	107,10	22	82,58	40	64,04
1,25	126,02	7,50	105,97	23	81,35	45	59,87
1,50	124,70	8	104,87	24	80,15	50	56,00
1,75	123,47	8,50	103,81	25	78,98	55	52,39
2	122,33	9	102,68	26	77,84	60	49,01
2,25	121,26	9,50	101,77	27	76,72	65	45,84
2,50	120,25	10	100,80	28	75,62	70	42,85
2,75	119,30	11	98,99	29	74,56	75	40,02
3	118,38	12	97,15	30	73,51	80	37,35
3,25	117,50	13	95,45	31	72,49	85	34,83
3,50	116,66	14	93,81	32	71,47	90	32,37
3,75	115,85	15	92,24	33	70,48	95	30,16
4	115,06	16	90,72	34	69,52	100	28,00
4,50	113,56	17	89,26	35	68,56	125	18,76
5	112,10	18	87,84	36	67,63	150	11,69
5,50	110,80	19	86,66	37	66,71	175	6,45
6	109,50	20	85,14	38	65,81	200	2,83
6,50	108,30	21	83,84	39	64,92	250	0,00

CUADRO NUM. 6

Coefficiente de impacto para puentes de fábrica en arco, según el reglamento alemán

Puentes de carretera	Puentes para vías sin balasto		Puentes de ferrocarril con un espesor de balasto de					
	Sin traviesas	Con traviesas	0,4 m	0,5 m	0,75 m	1,0 m	1,5 m	
a) Tablero, pilares, péndolas, etc...	1,4	1,65	1,6	1,4	1,3	1,2	1,1	1,03
b) Bóveda por arillos:								
hasta 50 m de luz	1,2	1,2			1,2		1,1	
de 50 a 70 m »	1,1	1,1			1,1		1,1	
más de 70 m »	1,0	1,0			1,0		1,0	
c) Bóveda continua:								
hasta 50 m de luz	1,1	1,2					1,1	
de 50 a 70 m »	1,0	1,1					1,0	
más de 70 m »	1,0	1,0					1,0	

secciones al cuarto de la luz. En el puente de Traumbergsund se han utilizado las fórmulas:  $\frac{680}{20 + l}$  y  $\frac{990}{20 + l}$ , según se trate de vía carretera o de ferrocarril.

Otro importante efecto dinámico es el correspondiente al frenado en puentes ferroviarios. La Instrucción española fija un esfuerzo horizontal equivalente a 1/7 del peso de la locomotora, más 1/12 del correspondiente a los vagones. Cuando se trate de puentes para doble vía habrá que prever el caso de frenado simultáneo, que da origen a esfuerzos longitudinales y transversales, y así, en el puente de Killvan-Kull se consideró el  $\frac{1}{10}$  y el  $\frac{1}{20}$  del peso de un tren de 305 m de longitud.

Otros efectos a considerar en el caso de sobrecargas móviles, especialmente en puentes de ferrocarril, son los choques laterales y la fuerza centrífuga.

La acción del viento es otra sobrecarga, más o menos importante según la clase de estructura, pues ya vimos que en el caso de cubiertas es fundamental, debiendo llevarse a cabo su determinación mediante estudios experimentales. En general, se supone una presión horizontal uniformemente repartida, variando entre 170 y 270 kilogramos por metro cuadrado, según los casos.

En algunos elementos de la estructura es preciso tener en cuenta los esfuerzos que se producen durante el montaje, los cuales resultan parcialmente más desfavorables a consecuencia del modo accidental de trabajar, distinto al que ha de corresponderles cuando la estructura está terminada.

**Variación termohigrométrica.**—En puentes la variación de temperatura se suele considerar constante en toda la masa del arco, fijándose en un tanto por ciento (función del espesor) de la máxima variación atmosférica en la localidad. En arcos de hormigón, a veces se tiene en cuenta el efecto de las variaciones higrométricas, que compensan una parte del anterior, ya que, en general, el aire está más cargado de humedad en invierno que en verano.

A continuación resumo los resultados más interesantes obtenidos en experiencias sobre puentes en arco:

PUENTE	Espesor medio	Variación de temperatura	
		Interior	Atmósfera
Walnut Lane (Filadelfia)	2,85	23	47
Ergolz...	2,00	16-20	49
Brooklyn Av. (Los Angeles)	0,40	19	38
Langwies (Suiza)	0,60	28	41
Idem	1,00	26	50
Idem	1,40	25	50
Danville	1,00	46	50
Experiencias Gehler	0,20	32-40	40-50
Squaw Creek	1,70	27	45
Walnut Street	0,45	33	44
Presa Arrow-rock	6,00	18	

Con estos datos se han obtenido los puntos que aparecen en la figura 1 y se ha deducido la recta que propone Whitney, del American Concrete Institute.

Lo más corriente en puentes de hormigón y de hormigón armado es considerar una variación de:  $\pm 15$  G. C. Así, en el Reglamento inglés:  $\pm 30$  G. F. (15,6 G. C.); en el alemán,  $\pm 15$  ó  $\pm 20$  G. C., según las localidades, y en el italiano,  $\pm 15$  G. C.

En puentes metálicos la Instrucción española fija una variación de  $\pm 30$  G. C. con relación a la temperatura media local.

En presas, teniendo en cuenta las condiciones tan diferentes en que se encuentran los paramentos de aguas arriba y aguas abajo, se considera una repartición lineal a través del espesor y se toma un tanto por ciento de la variación de temperatura exterior, variable con la profundidad del arco por bajo del nivel del embalse. (En la presa de Broc se han determinado experimentalmente las variaciones de tem-

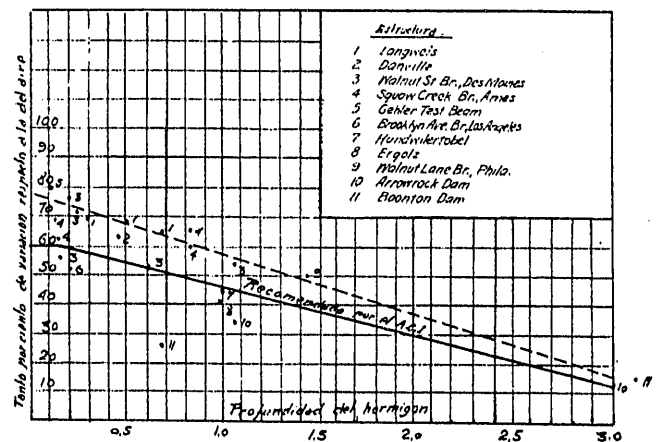


Fig. 1. Variación de temperatura en el interior del arco en función de la atmosférica

peratura, obteniéndose: 13, 10, 6, 5 y 4 G. C. para arcos situados a 1, 10, 20, 30 y 50 m por bajo de la coronación. La variación atmosférica fué de 24 G. C.)

El coeficiente de dilatación térmica se suele tomar:

- 0,00007 para la mampostería.
- 0,00012 para el hierro.
- 0,00010 para el hormigón.

**Retracción de fraguado.**—Sólo tiene lugar en hormigón y hormigón armado. Se puede tener en cuenta de tres maneras diferentes: o como acortamiento longitudinal, o como equivalente a un descenso de temperatura, o como un tanto por ciento de las tensiones debidas a variación de temperatura.

Así, el Reglamento italiano considera acortamiento de 0,12 mm/m lineal (valor escaso, y en el proyecto reciente de puente en Prato Isarco se ha aumentado hasta 0,20 mm/m lineal); Freyssinet, para los hormigones sin armar, de 0,4 a 0,6 mm/m lineal para 350 kg de cemento; 0,5 a 0,7 para 400, y 0,6 a 0,8 para 450 kg; en el Reglamento alemán, 25 G. C. para hormigón sin armar, 20 para hormigón con armadura inferior al 0,5 por 100, y 15 para cuantía superior al 0,5 por 100; en el puente de Rocky River, los norteamericanos consideraron el 85 por 100 de la tensión máxima producida por variación de temperatura.

**Reacciones de sustentación.**—Si miramos el problema estructural, desde el punto de vista de las deformaciones (que, como ya hemos indicado varias

veces, constituyen la realidad más patente), nos aparece del siguiente modo: al actuar las causas exteriores del primer género, tienden a desplazar la estructura; pero si las sustentaciones están bien dispuestas, se obtendrá un equilibrio (estabilidad estática), por aparición de reacciones, que si lo realizan de un modo estricto, se denominan *isostáticas*, así como a la sustentación correspondiente, no precisando para su determinación más que las ecuaciones de la Estática, pues es un problema que cae dentro del ámbito de esta Ciencia.

Pero si las sustentaciones, además de oponerse al desplazamiento de la estructura, se oponen en algún

fuerzos, siempre que la sustentación sea isostática, o sea estrictamente para oponerse al desplazamiento; pero si la sustentación impide la deformación en determinadas direcciones, aparecerán las reacciones hiperestáticas correspondientes.

Después de estas consideraciones, aparece lleno de sentido el método empleado para la determinación de las reacciones de sustentación. Consiste en sustituir el obstáculo de la sustentación por las fuerzas que lo representan, que en el caso más general son una fuerza inclinada (componentes horizontal y vertical), pasando por el centro de gravedad de la sección extrema y un par; establecer entre estas fuerzas incógnitas y las exteriores las condiciones de equilibrio estático (igualdad de componentes e igualdad de momentos), las cuales, en general, no serán suficientes, pues el arco es una estructura esencialmente hiperestática; entonces calcular las deformaciones que se producirían en la estructura con sustentación isostática, y determinar, por último, las reacciones que anularán las deformaciones incompatibles con la sustentación. Una variante del método (la más generalmente empleada) deduce las deformaciones debidas a reacciones y esfuerzos en bloque, y entonces no habrá sino anular las deformaciones correspondientes.

Los tipos de sustentación y las condiciones que es preciso establecer en cada caso se detallan en el cuadro siguiente:

ARCO	Reacciones sustentación	CONDICIONES		
		Estática	Deformaciones	Total
3 articulaciones.	VV'HH'	3+1		4
2 articulaciones.	VV'HH'	3	invariabilidad luz.	4
1 articulación (en clave)...	VV'HH'MM'	3+1	invariabilidad luz.	6
			invariabilidad luz.	
			invariabilidad giro sección derecha.	
Empotrado.....	VV'HH'MM'	3	invariabilidad giro sección izqda.	6

El modo de lograr el isostatismo de la estructura puede ser uno de los indicados en la figura 2; es decir: mediante articulación y apoyo de libre deslizamiento (a), extremidad en voladizo (b), extremidad unida al centro elástico mediante barra de rigidez infinita (c), fraccionamiento de la estructura en dos ménsulas (d)<sup>1</sup>. En las figuras aparecen las reacciones que es preciso considerar para no alterar el equilibrio, suponiendo se trata de arco doblemente empotrado.

Carlos FERNANDEZ CASADO  
Ingeniero de C., C. y P.

<sup>1</sup> Estos modos se aplican según el método de cálculo, sistema de sustentación y clase de carga; así, por ejemplo, el (d) resulta indicado en caso de arco con articulación única en clave o cuando las cargas son simétricas. Lo emplean Rathbun, Manning, Jacobsen, Vierendel, entre otros autores (véase Bibliografía).

El (c) es el modo clásico del método de Müller Breslau.

El (b) se emplea en el método de las deformaciones.

El (a) es clásico del teorema de Castigliano y método de trabajos virtuales.

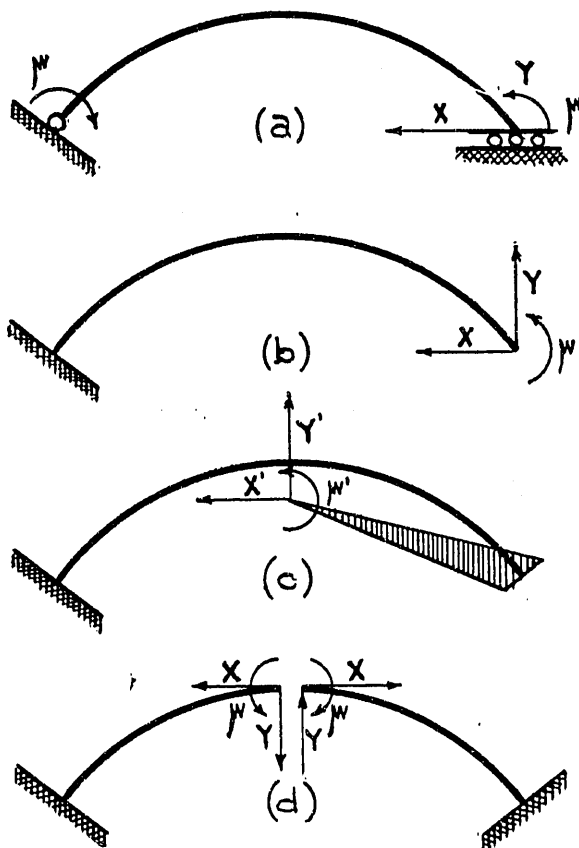


Fig. 2. Modos de hacer isostático un arco

sentido a las deformaciones que en ésta debieran aparecer por motivo de la actuación de esfuerzos y reacciones isostáticas, será preciso la aparición de nuevas reacciones, que impidan las citadas deformaciones y que se equilibren entre sí. Estas nuevas reacciones se denominan por algunos *redundantes* o términos *hiperestáticos*, aplicándose este mismo nombre a la sustentación y, por ampliación, a la estructura. Para el cálculo de estas nuevas reacciones es preciso acudir a la teoría de las deformaciones, expresando analítica o gráficamente las condiciones en que han surgido, según nuestra interpretación anterior.

En cuanto a las causas exteriores del segundo género (variaciones de temperatura, retracción de fraguado, etc.), al actuar producen deformaciones sin trabajo elástico, es decir, sin acompañamiento de es-